Límites y continuidad

1. Calcula razonadamente los siguientes límites, resolviendo las correspondientes indeterminaciones, cuando estas se presenten:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x}-\dfrac{1+2x^2}{2x-1}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+3x}-3x\right)$

2. Calcula razonadamente las asíntotas de la siguiente función: $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x+1}$

3. **a)** Definición de función continua en un punto.

b) Dada la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{e}}{2-x} & \text{si} \quad x\le 1\\[2ex] \left(\dfrac{x+1}{2}\right)^{\frac{2}{x^2-1}} & \text{si} \quad x>1\end{cases}$, estudia razonadamente su continuidad.

4. Estudia la continuidad en todo $\mathbb{R}$ de la función $f(x)=\dfrac{2x^3-x^2-x}{x^2-1}$ indicando los tipos de discontinuidad que aparecen.

5. Enuncia correctamente el teorema de Bolzano y como aplicación comprueba que la ecuación $x^2=x\operatorname{sen}x+\cos x$ tiene al menos una solución, razonando la respuesta.

SOLUCIONES

Ejercicio 1:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x}-\dfrac{1+2x^2}{2x-1}\right)=[\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x^2-1)(2x-1)-x(1+2x^2)}{x(2x-1)}=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{2x^3}-x^2-2x+1-x-\cancel{2x^3}}{2x^2-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2-3x+1}{2x^2-x}=-\frac{1}{2}$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+3x}-3x\right)=[\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{9x^2+3x}-3x\right)\left(\sqrt{9x^2+3x}+3x\right)}{\sqrt{9x^2+3x}+3x}=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{9x^2+3x}\right)^2-(3x)^2}{\sqrt{9x^2+3x}+3x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{9x^2}+3x-\cancel{9x^2}}{\sqrt{9x^2+3x}+3x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{\sqrt{9x^2+3x}+3x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3x}{x}}{\sqrt{\frac{9x^2}{x^2}+\frac{3x}{x^2}}+\frac{3x}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{9+\frac{3}{x}}+3}=\frac{3}{\sqrt{9}+3}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

Ejercicio 2:

- Asíntotas verticales

  $x+1=0\Rightarrow x=-1$

  $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\infty\Rightarrow x=-1$ es una A.V. de $f(x)$

- Asíntotas horizontales

  $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-4}{x+1}=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-4}{x+1}=+\infty\Rightarrow f(x)$ no tiene A.H.

- Asíntotas oblicuas

  $y=mx+n$

  $$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2-4}{x+1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4}{x(x+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4}{x^2+x}=1$$

  $$n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-4}{x+1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4-x(x+1)}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-4-x}{x+1}=-1$$

  La recta $y=x-1$ es una A.O. de $f(x)$.

Ejercicio 3:

a) Una función $f(x)$ es continua en $x=a\in\mathrm{Dom}(f)$ cuando $\exists\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$.

b) Cada una de las funciones componentes es continua en su dominio por ser un cociente (bien definido) y una función potencial-exponencial.
Estudiamos la continuidad en el punto de unión:
Continuidad en $x=1$: ¿$\exists\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)$?

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{e}}{2-x} = \frac{\sqrt{e}}{1} = \sqrt{e}$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \left(\frac{x+1}{2}\right)^{\frac{2}{x^2-1}} = \left[1^\infty\right] = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{2}{x^2-1}\left(\frac{x+1}{2}-1\right) = \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{2}{x^2-1}\cdot\frac{x+1-2}{2}\right) = \lim_{x\to 1^+}\frac{2(x-1)}{2(x^2-1)} = \lim_{x\to 1^+}\frac{2\cancel{(x-1)}}{2(x+1)\cancel{(x-1)}} =$$

$$= \lim_{x\to 1^+}\frac{2}{2(x+1)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Por tanto, $\exists \lim_{x\to 1} f(x) = \sqrt{e}$ y como $f(1) = \frac{\sqrt{e}}{2-1} = \sqrt{e}$, se tiene que $f(x)$ es continua en $x=1$.

Conclusión: $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 4:

Una función racional es continua en su dominio, luego es continua en $\mathbb{R}-\{-1,1\}$. Estudiamos las discontinuidades de f en dichos puntos:

Discontinuidad en $x=1$:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{2x^3-x^2-x}{x^2-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1}\frac{x\cancel{(x-1)}(2x+1)}{(x+1)\cancel{(x-1)}} = \lim_{x\to 1}\frac{x(2x+1)}{x+1} = \frac{3}{2} \Rightarrow \exists \lim_{x\to 1} f(x) = \frac{3}{2} \quad \text{y,}$$

por tanto, f tiene una discontinuidad evitable en $x=1$ (se evita definiendo $f(1)=\frac{3}{2}$).

Discontinuidad en $x=-1$:

$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1}\frac{2x^3-x^2-x}{x^2-1} = \left[\frac{-2}{0}\right] = -\infty \Rightarrow$ y, por tanto, f tiene una discontinuidad asintótica en $x=-1$.

Ejercicio 5:

a) **Teorema de Bolzano**: Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$ y en los extremos del intervalo toma valores de signo contrario [signo $f(a) \neq$ signo $f(b)$], entonces $\exists c \in (a,b): f(c)=0$.

b) Consideramos la función $h(x) = x^2 - x\,\text{sen}\,x - \cos x$ que es una función continua en $\mathbb{R}$, por ser suma de funciones continuas en $\mathbb{R}$. Dicha función verifica:

i) $h(x)$ es continua en cualquier intervalo cerrado $[a,b]$

Podemos considerar $[a,b]=[0,\pi]$, $\left[\frac{\pi}{4},\pi\right]$, $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$...

ii) $h(0)<0$

iii) $h(\pi)>0$

Por el teorema de Bolzano, $\exists c\in(0,\pi)$ tal que $h(c)=0$, es decir, la ecuación $x^2 = x\,\text{sen}\,x + \cos x$ tiene, al menos, una solución en $(0,\pi)$.