Aplicaciones del teorema de Bolzano

Teorema de Bolzano: Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$ y en los extremos del intervalo toma valores de signo contrario [signo $f(a) \neq$ signo $f(b)$], entonces $\exists c \in (a,b):\ f(c)=0$.

1. Como aplicación del teorema de Bolzano, razona que la ecuación $x^2 \operatorname{sen} x = \log x$ (donde $\log x$ representa el logaritmo natural de x) tiene al menos una solución.

<u>Solución:</u>
Consideramos la función $h(x)=x^2 \operatorname{sen} x - \log x$, que es continua en $(0,+\infty)$ por ser diferencia de funciones continuas en $(0,+\infty)$.

- h es continua en $(0,+\infty)$, luego en particular, en cualquier intervalo cerrado $[a,b]$ contenido en $(0,+\infty)$.
- $[a,b]=[2,6]$

  $h(2)>0$

  $h(6)<0$

Por el teorema de Bolzano, $\exists c \in (2,6)$ tal que $h(c)=0$, esto es, la ecuación $x^2 \operatorname{sen} x = \log x$ tiene al menos una solución en el intervalo $(2,6)$.

2. Como aplicación del teorema de Bolzano, razona que la ecuación $x^3 + \log x = -\sqrt{x}$ (donde $\log x$ representa el logaritmo natural de x) tiene al menos una solución.

<u>Solución:</u>
Consideramos la función $h(x)=x^3+\log x+\sqrt{x}$, que es continua en $(0,+\infty)$ por ser suma de funciones continuas en $(0,+\infty)$.

- h es continua en $(0,+\infty)$, luego en particular, en cualquier intervalo cerrado $[a,b]$ contenido en $(0,+\infty)$.
- $[a,b]=[0{,}1\ ,\ 1]$

  $h(0{,}1)<0$

  $h(1)>0$

Por el teorema de Bolzano, $\exists c \in (0{,}1\ ,\ 1)$ tal que $h(c)=0$, esto es, la ecuación $x^3+\log x=-\sqrt{x}$ tiene al menos una solución en el intervalo $(0{,}1\ ,\ 1)$.

3. ¿Se puede aplicar el teorema de Bolzano a la función $f(x)=x-\log^2 x$ (donde $\log x$ representa el logaritmo natural de x) en el intervalo $[0{,}1\ ,\ 0{,}5]$?

<u>Solución:</u>

La función $f(x) = x - \log^2 x$, que es continua en $(0, +\infty)$ por ser diferencia de funciones continuas en $(0, +\infty)$.

- f es continua en $[0,1 \, , \, 0,5]$
- $f(0,1) < 0$
  $f(0,5) > 0$

Por el teorema de Bolzano, $\exists c \in (0,1 \;,\; 0,5)$ tal que $f(c) = 0$.

4. ¿$\exists x \in \mathbb{R}$ tal que $3 \operatorname{sen} x = e^{-x} \cos x$?

Solución:
La igualdad anterior es cierta si la función $f(x) = 3 \operatorname{sen} x - e^{-x} \cos x$ verifica el teorema de Bolzano en algún intervalo.

Consideramos el intervalo cerrado $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Se tiene que:

1) f es continua en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ya que es diferencia de funciones continuas en $\mathbb{R}$.
2) $f(0) = -1 < 0$
3) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 > 0$

Aplicando el teorema de Bolzano podemos asegurar que $f(x) = 0$ para algún $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ y, por tanto, que la ecuación anterior tiene, al menos, una solución en dicho intervalo.

5. ¿Alguna de las ecuaciones $\pi^x = e$ o $\Phi^x = e$ tiene solución en el intervalo $(0, 2)$?

Solución:
1) Consideramos la función $f(x) = \pi^x - e$, que verifica:

a) f es continua en $[0, 2]$ por serlo en $\mathbb{R}$ (es una función exponencial)

b) $f(0) = \pi^0 - e = 1 - e < 0$

c) $f(2) = \pi^2 - e > 0$

Aplicando el teorema de Bolzano, $\exists c \in (0, 2)$ tal que $f(c) = 0$, esto es, c es una solución de la ecuación $\pi^x = e$.

2) Consideramos la función $g(x) = \Phi^x - e$, que verifica:

a) g es continua en $[0, 2]$ por serlo en $\mathbb{R}$ (es una función exponencial)

b) $g(0) = \Phi^0 - e = 1 - e < 0$

c) $g(2) = \Phi^2 - e < 0$

No se verifican las hipótesis del teorema de Bolzano y, por tanto, no podemos asegurar que dicha ecuación tenga una solución en el intervalo que nos dan.

6. ¿Se puede aplicar el teorema de Bolzano a la función $f(x)=\dfrac{\log x+2x}{x-2}$ en el intervalo $(0,1)$? En caso negativo, encuentra algún intervalo en el que la función se anule.
(Notacion: $\log$ representa el logaritmo natural)

Solución:
La función f está definida en $(0,+\infty)-\{2\}=(0,2)\cup(2,+\infty)$, luego no es continua en $[0,1]$ y, por tanto, no podemos aplicar el teorema de Bolzano en dicho intervalo.
Consideramos el intervalo $(0{,}1\ ,\ 1)$. Se tiene que:

a) f es continua en $[0{,}1\ ,\ 1]$ (es un cociente de funciones continuas, ya que el numerador es diferencia de funciones continuas y el denominador no se anula en dicho intervalo)

b) $f(0{,}1)=\dfrac{\log 0{,}1+2\cdot 0{,}1}{0{,}1-2}\simeq 1{,}1>0$

c) $f(1)=\dfrac{\log 1+2\cdot 1}{1-2}=-2<0$

Aplicando el teorema de Bolzano, $\exists c\in(0,1)$ tal que $f(c)=0$, esto es, la ecuación $\log x+2x=0$ tiene, al menos, una solución en el intervalo $(0,1)$.

7. ¿Alguna de las soluciones de la ecuación $(x-3)^2+1=\dfrac{3}{2}$ está en el intervalo $[4,5]$? Indicación: no se puede resolver la ecuación de segundo grado.

Solución:
La función $f(x)=(x-3)^2+1$ es continua en $\mathbb{R}$ y, por tanto, continua en el intervalo cerrado $[4,5]$.
Aplicando el teorema de Weierstrass, f tiene máximo y mínimo absoluto en $[4,5]$.
Ahora bien, como dicha función es una parábola, abierta hacia arriba, su mínimo absoluto lo tiene en el vértice y su máximo absoluto en uno de los extremos del intervalo (solo tiene uno ya que el intervalo no es simétrico respecto del eje de simetría de la parábola):

Mínimo absoluto: $\left(\dfrac{-b}{2a},f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)\right)=(3,f(3))=(3,1)$

Máximo absoluto: $f(5)=5$ (ya que $f(4)=2$)

Como $\dfrac{3}{2}\in[1,5]$, alguna de las soluciones de la ecuación $(x-3)^2+1=\dfrac{3}{2}$ está en el intervalo $[4,5]$.

Comprobación:

Las soluciones de $(x-3)^2+1=\dfrac{3}{2}$ son: $x=\begin{cases}3-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\simeq 2{,}29\\[2mm] 3+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\simeq 3{,}71\in[4,5]\end{cases}$