Estudio de la continuidad

1. *Estudia la continuidad de las siguientes funciones:*

a) $f(x)=\begin{cases} |x+2| & \text{si} \quad x<-1 \\ x^2 & \text{si} \quad -1\le x<1 \\ 2x+1 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$ *b)* $g(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1} & \text{si} \quad x>1 \\ k & \text{si} \quad x=1 \end{cases}$

Solución:

a) Cada una de las funciones componentes es continua en su dominio por ser funciones polinómicas.

Estudiamos la continuidad en los puntos de unión:

Continuidad en $x=-1$ *: ¿*$\exists \lim_{x\to -1} f(x)=f(-1)$ *?*

Para ver si existe el límite, estudiamos los límites laterales:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to -1-} f(x)=\lim_{x\to -1-} |x+2|=1 \\ \lim_{x\to -1+} f(x)=\lim_{x\to -1+} x^2=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \lim_{x\to -1} f(x)=1$$

Ahora calculamos el valor de la función en $x=-1$ *:*

$f(-1)=(-1)^2=1$

Como $\exists \lim_{x\to -1} f(x)=1=f(-1)$*, se tiene que* f *es continua en* $x=-1$.

Continuidad en $x=1$ *: ¿*$\exists \lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$ *?*

Para ver si existe el límite, estudiamos los límites laterales:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1-} x^2=1 \\ \lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1+} (2x+1)=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to -1} f(x)$$

Como $\nexists \lim_{x\to -1} f(x)$*, se tiene que* f *no es continua en* $x=1$.

Conclusión: f *es continua en* $\mathbb{R}-\{1\}$.

b) Cada una de las funciones componentes es continua en su dominio, ya que la primera rama es un cociente con numerador bien definido y cuyo denominador no se anula.

Estudiamos la continuidad en el punto de unión:

Continuidad en $x=1$ *: ¿*$\exists \lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$ *?*

Estudiamos si existe el límite: en este caso solo hay que estudiar el límite por la derecha.

$$\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1+}\frac{\sqrt{x-1}}{x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1+}\sqrt{\frac{x-1}{(x-1)^2}}=\lim_{x\to 1+}\sqrt{\frac{1}{x-1}}=+\infty \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 1} f(x)$$

Como $\nexists \lim_{x\to -1} f(x)$*, se tiene que* f *no es continua en* $x=1$.

Conclusión: $\nexists k\in\mathbb{R}$ *tal que* f *sea continua en* $x=1$.

2. *Calcula el valor de k para que la función $f(x)$ sea continua:*

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} & \text{si} \quad x>1 \\ k & \text{si} \quad x=1 \end{cases}$$

Solución:

Cada una de las funciones componentes es continua en su dominio, ya que la primera rama es un cociente con numerador bien definido y cuyo denominador no se anula.

Estudiamos la continuidad en el punto de unión:

Continuidad en $x=1$: ¿$\exists \lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$?

Estudiamos si existe el límite: en este caso solo hay que estudiar el límite por la derecha.

$$\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1+}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1+}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1+}\frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x}+1)}=\frac{1}{2}\Rightarrow \exists \lim_{x\to 1} f(x)=2$$

Ahora calculamos el valor de la función en $x=1$:

$f(1)=k$

Imponemos que $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$ y obtenemos: $k=2$

Conclusión: para $k=2$ la función f es continua en $x=1$ y, como consecuencia, en $[1,+\infty)$.

3. *Calcula a y b para que $f(x)$ sea continua en $x=0$* y en $x=1$*:*

$$f(x)=\begin{cases} e^x+a & \text{si} \quad x\le 0 \\ ax^2+2 & \text{si} \quad 0<x\le 1 \\ \dfrac{b}{2x} & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

Solución:

Continuidad en $x=0$: ¿$\exists \lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$?

Para ver si existe el límite, estudiamos los límites laterales:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-}\left(e^x+a\right)=1+a \\ \lim\limits_{x\to 0+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+}\left(ax^2+2\right)=2 \end{array}\right\}\Rightarrow \text{para que } \exists \lim_{x\to 0} f(x) \textit{ se tiene que cumplir que } 1+a=2$$

Ahora calculamos el valor de la función en $x=0$:

$f(0)=e^0+a=1+a$

Para que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$, se tiene que cumplir que $\boxed{1+a=2}$.

Continuidad en $x=1$: ¿$\exists \lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$?

Para ver si existe el límite, estudiamos los límites laterales:

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(ax^2+2\right)=a+2\\ \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{b}{2x}=\frac{b}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow \text{para que } \exists\lim_{x\to 1} f(x) \textit{ se tiene que cumplir que } a+2=\frac{b}{2}.$$

Ahora calculamos el valor de la función en $x=1$*:*

$f(1)=a+2$

Para que $\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$*, se tiene que cumplir que* $\boxed{a+2=\frac{b}{2}}$.

Resolvemos el sistema $\begin{cases}1+a=2\\ a+2=\frac{b}{2}\end{cases}\Rightarrow (a,b)=(1,6)$.

Conclusión: para $(a,b)=(1,6)$ *la función* $f(x)$ *es continua en* $x=0$ y en $x=1$.

4. *Se considera la función* $f(x)=\begin{cases}\log x & \text{si} \quad 0<x<1\\ ax^2+b & \text{si} \quad x\geq 1\end{cases}$*. Determina los valores de a y b para que* $f(x)$ *sea continua y* $f(2)=3$.

Solución:

Para que f *sea continua en* $x=1$ *(ya que cada una de las ramas lo es en su dominio, por se una función logarítmica bien definida y una función polinómica) se tiene que verificar:*

$$\exists\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$$

Como además queremos que $f(2)=3$, hay que resolver el sistema correspondiente.

Continuidad en $x=1$*: ¿*$\exists\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$*?*

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\log x=0\\ \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(ax^2+b\right)=a+b\end{array}\right\}\Rightarrow \text{para que } \exists\lim_{x\to 1} f(x) \textit{ se tiene que cumplir que } a+b=0.$$

Ahora calculamos el valor de la función en $x=1$*:*

$f(1)=a+b$

Para que $\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$*, se tiene que cumplir que* $\boxed{a+b=0}$.

Como, además $f(2)=3$, se tiene que $\boxed{4a+b=3}$

Resolvemos el sistema correspondiente: $\begin{cases}a+b=0\\ 4a+b=3\end{cases}\Rightarrow (a,b)=(1,-1)$

Conclusión: para $(a,b)=(1,-1)$ *se verifican las condiciones del enunciado.*

5. *Dada la función* $f\left(x\right)=\begin{cases}2^{x-1} & \text{si} \quad x\le 1\\ x-2 & \text{si} \quad 1<x<2\\ \ln\left(x-1\right) & \text{si} \quad x\ge 2\end{cases}$

donde $\log$ *es el logaritmo neperiano, estudia la continuidad de la función* $f\left(x\right)$ *en* $x=1$ *y en* $x=2$, *y clasifica el tipo de discontinuidad si las hubiera.*

Solución:

Continuidad en $x=1$ *: ¿* $\exists \lim\limits_{x\to 1} f\left(x\right)=f\left(1\right)$ *?*

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1-} 2^{x-1}=2^0=1\\ \lim\limits_{x\to 1+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1+}\left(x-2\right)=-1\end{array}\right\}\Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 1} f\left(x\right)\Rightarrow f \text{ no es continua en } x=1$$

f *presenta una discontinuidad de salto finito (de salto* $1-\left(-1\right)=2$ *).*

Continuidad en $x=2$ *: ¿* $\exists \lim\limits_{x\to 2} f\left(x\right)=f\left(2\right)$ *?*

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 2-}\left(x-2\right)=0\\ \lim\limits_{x\to 2+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 2+}\log\left(x-1\right)=\log 1=0\end{array}\right\}\Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to 1} f\left(x\right)=0$$

Ahora calculamos el valor de la función en $x=2$ *:*

$f\left(2\right)=1$

Como $\exists \lim\limits_{x\to 2} f\left(x\right)=f\left(2\right)\Rightarrow f$ *es continua en* $x=2$.

6. *Dada la función*

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{3}{x-2} & \text{si} \quad x<2\\ \cos\left(\pi x\right) & \text{si} \quad 2\le x\le 3\\ \dfrac{\ln\left(x-2\right)}{3-x} & \text{si} \quad x>3\end{cases}$$

determina razonadamente los puntos en los que la función es continua, calcula los puntos en los que es discontinua y clasifica el tipo de discontinuidad, si los hubiera.

Solución:

Cada una de las funciones componentes es continua en su dominio por ser: la primera, una función racional cuyo denominador no se anula; la segunda la función coseno que es continua en $\mathbb{R}$ *; y la tercera un cociente en el que el numerador está bien definido y el denominador no se anula.*

Estudiamos la continuidad/discontinuidad en los puntos de unión, esto es, en 2 y en 3.

Continuidad en $x=2$ *: ¿* $\exists \lim\limits_{x\to 2} f\left(x\right)=f\left(2\right)$ *?*

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 2-}\dfrac{3}{x-2}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 2+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 2+}\cos\left(\pi x\right)=\cos\left(2\pi\right)=1\end{array}\right\}\Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 2} f\left(x\right)\Rightarrow f \text{ no es continua en } x=2$$

f *presenta una discontinuidad de salto infinito en* $x=2$.

Continuidad en $x=3$*: ¿*$\exists \lim_{x\to 3} f(x)=f(3)$*?*

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 3-} f(x)=\lim_{x\to 3-}\cos(\pi x)=\cos(3\pi)=-1\\ \lim_{x\to 3+} f(x)=\lim_{x\to 3+}\dfrac{\log(x-1)}{3-x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=-1\end{array}\right\}\Rightarrow \exists \lim_{x\to 1} f(x)=-1$$

Ahora calculamos el valor de la función en $x=3$*:*

$f(3)=-1$

Como $\exists \lim_{x\to 3} f(x)=-1=f(3)\Rightarrow f$ *es continua en* $x=3$.

7. *Estudia la continuidad en todo* $\mathbb{R}$ *de la función* $f(x)=\dfrac{2x^3-x^2-x}{x^2-1}$ *indicando los tipos de discontinuidad que aparecen.*

Solución:

Una función racional es continua en su dominio, luego es continua en $\mathbb{R}-\{-1,1\}$*. Estudiamos las discontinuidades de* f *en dichos puntos:*

Discontinuidad en $x=1$*:*

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{2x^3-x^2-x}{x^2-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{x\cancel{(x-1)}(2x+1)}{(x+1)\cancel{(x-1)}}=\lim_{x\to 1}\frac{x(2x+1)}{x+1}=\frac{3}{2}\Rightarrow \exists \lim_{x\to 1} f(x)=\frac{3}{2}$$ *y,*

por tanto, f *tiene una discontinuidad evitable en* $x=1$ *(se evita definiendo* $f(1)=\frac{3}{2}$*).*

Discontinuidad en $x=-1$*:*

$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\dfrac{2x^3-x^2-x}{x^2-1}=\left[\dfrac{-2}{0}\right]=-\infty\Rightarrow$ *y, por tanto,* f *tiene una discontinuidad asintótica en* $x=-1$.

8. *Clasifica las discontinuidades de la función* $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-2x}$.

Solución:

Los puntos de discontinuidad de una función racional son los puntos en los que se anula el denominador:

$$x^2-2x=x(x-2)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ x=2\end{cases}$$

Discontinuidad en $x=0$*:*

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0-}\dfrac{x^2-4}{x^2-2x}=\left[\dfrac{-4}{0}\right]=-\infty\\ \lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+}\dfrac{x^2-4}{x^2-2x}=\left[\dfrac{-4}{0}\right]=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow f \text{ tiene una discontinuidad asintótica en } x=0.$$

Discontinuidad en $x=2$ *:*

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2-}\dfrac{x^2-4}{x^2-2x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 2-}\dfrac{(x+2)(x-2)}{x(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2-}\dfrac{x+2}{x}=2\\ \lim\limits_{x\to 2+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2+}\dfrac{x^2-4}{x^2-2x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 2+}\dfrac{(x+2)(x-2)}{x(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2+}\dfrac{x+2}{x}=2\end{array}\right\}\Rightarrow \exists\lim_{x\to 2} f(x)=2$$

Por tanto, tiene una discontinuidad evitable en $x=2$.

9. *¿Existe algún* $a\in\mathbb{R}$ *para que la función* $f(x)=\dfrac{x^2+x-a}{x^2+3x-4}$ *tenga una discontinuidad evitable en* $x=1$?

Solución:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+a}{x^2+3x-4}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+a}{(x-1)(x+4)}$$

Para que el denominador no se anule, el numerador tiene que tener como factor a $x-1$, *luego aplicando la regla de Ruffini:*

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 1 & a\\ 1 & & 1 & 2\\ \hline & 1 & 2 & 0\end{array}\quad\Rightarrow a+2=0\Rightarrow a=-2$$

Así:

$$x^2+x+a=(x-1)(x+2)$$

y

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2+3x-4}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+2)}{\cancel{(x-1)}(x+4)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x+4}=\frac{3}{5}$$

Luego definiendo $f(1)=\dfrac{3}{5}$ *evitamos la discontinuidad.*