Distancia de un punto a una recta

Para calcular la distancia del punto P a la recta r, podemos usar, además de la fórmula, los siguientes métodos:

(1) Método del plano perpendicular

i) Calculamos un plano π tal que $\begin{cases} \pi \perp r \\ P \in \pi \end{cases}$

ii) Hallamos $P' = \pi \cap r$ (punto de corte de π y de r.

iii) $d(P,r) = d(P,P') = \left|\overrightarrow{PP'}\right|$

(2) Método del punto genérico

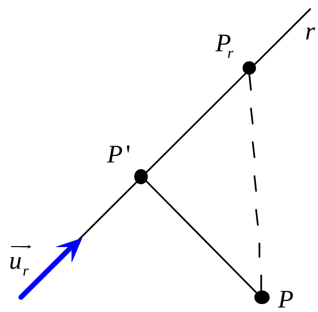
i) Tomamos $P_r \in r$ genérico (que dependerá de λ)

ii) Hallamos $\overrightarrow{PP_r}$ (que dependerá de λ)

iii) Imponemos que $\overrightarrow{PP_r} \perp r$ ($\Leftrightarrow \overrightarrow{PP_r} \cdot \overrightarrow{u_r} = 0$), de donde se obtendrá un único valor de λ.

iv) Sustituimos el valor de λ obtenido en las ecuaciones paramétricas de la recta, obteniendo el punto P'.

v) $d(P,r) = d(P,P') = \left|\overrightarrow{PP'}\right|$



Ejemplo:

Calcular $d(P,r)$, donde $P(5,1,6)$ y $r \equiv \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 5 + \lambda \end{cases}$.

(1) Método del plan perpendicular

i) $\pi \equiv \{P, \overrightarrow{u_r}\} \equiv -2(x-5) - (y+1) + (z-6) = 0 \Rightarrow \pi \equiv 2x + y - z - 3 = 0$

ii) $P' = \pi \cap r \Rightarrow 2(1-2\lambda) + (-\lambda) - (5+\lambda) - 3 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow P'(3,1,4)$

iii) $d(P,r) = d(P,P') = \left|\overrightarrow{PP'}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ u

donde $\overrightarrow{PP'} = (3,1,4) - (5,1,6) = (-2,0,-2)$

(2) Método del punto genérico

i) $P_r(1-2\lambda, -\lambda, 5+\lambda) \in r$ genérico

ii) $\overrightarrow{P_rP} = (5,1,6) - (1-2\lambda, -\lambda, 5+\lambda) = (4+2\lambda, -1+\lambda, 1+\lambda)$

iii) $\overrightarrow{P_rP} \perp \overrightarrow{u_r} \Leftrightarrow \overrightarrow{P_rP} \cdot \overrightarrow{u_r} = 0 \Leftrightarrow (4+2\lambda, -1+\lambda, 1+\lambda)\cdot(-2,-1,1) = 0 \Rightarrow \lambda = -1$

iv) $P'(3,1,4)$

v) $d(P,r) = d(P,P') = \left|\overrightarrow{PP'}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ u

donde $\overrightarrow{PP'} = (3,1,4) - (5,1,6) = (-2,0,-2)$

Distancia entre dos rectas

Para calcular la distancia entre dos rectas r y s que se cruzan, podemos usar, además de la fórmula, los siguientes métodos:

(1) Método del plano paralelo

$d(r,s) = d(s,\pi)$ donde π es un plano tal que $\begin{cases} \pi \parallel s \\ r \subset \pi \end{cases}$

(2) Método del vector variable

i) $P_r \in r$ punto genérico de r (depende de λ)

ii) $P_s \in s$ punto genérico de s (depende de μ)

iii) Calculamos el vector $\overrightarrow{P_rP_s}$ (con origen en r y extremo en s), que depende de (λ,μ).

iv) Imponemos que $\overrightarrow{P_rP_s} \perp r$ y $\overrightarrow{P_rP_s} \perp s$ ($\overrightarrow{P_rP_s} \cdot \overrightarrow{u_r} = 0 = \overrightarrow{P_rP_s} \cdot \overrightarrow{u_s}$) y obtenemos (λ,μ).

v) Sustituyendo λ y μ en las ecuaciones de r y s, respectivamente, obtenemos dos puntos $R \in r$ y $S \in s$.

vi) $d(r,s) = d(R,S) = \left|\overrightarrow{RS}\right|$

Ejemplo:

Calcular la distancia entre las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = -1 \\ z = 8 + 2\lambda \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 4 + 3\mu \\ y = 3 - \mu \\ z = 5 + 4\mu \end{cases}$.

(1) Método del plano paralelo

Hallamos un plano π tal que $\begin{cases} \pi \parallel s \\ r \subset \pi \end{cases}$: $\pi \equiv \left\{P_r, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}\right\}$ o también $\pi \equiv \left\{P_r, \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}\right\}$

$$\pi \equiv \det\begin{pmatrix} x-5 & 1 & 3 \\ y+1 & 0 & -1 \\ z-8 & 2 & 4 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv 2x + 2y - z = 0$$

$$d(r,s) = d(s,\pi) = d(P_s,\pi) = \frac{|2\cdot 4 + 2\cdot 3 - 5|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = 3 \text{ u}$$

(2) Método del vector variable

i) Punto genérico de $r: P_r(5+\lambda, -1, 8+2\lambda)$

ii) Punto genérico de $s: P_s\left(4+3\mu, 3-\mu, 5+4\mu\right)$

iii) Vector genérico:
$\overrightarrow{P_rP_s}=\left(4+3\mu,3-\mu,5+4\mu\right)-\left(5+\lambda,-1,8+2\lambda\right)=\left(-1+3\mu-\lambda,4-\mu,-3+4\mu-2\lambda\right)$

iv) Imponemos que $\overrightarrow{P_rP_s}\perp r$ y $\overrightarrow{P_rP_s}\perp s$:

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{P_rP_s}\perp r\Rightarrow 5+5\lambda-11\mu=0\\ \overrightarrow{P_rP_s}\perp s\Rightarrow 19+11\lambda-26\mu=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left(\lambda,\mu\right)=\left(3,2\right)$$

v) Sustituyendo en r y en s obtenemos los puntos:
$R\left(8,-1,14\right)$ y $S\left(10,1,13\right)$

vi) $d\left(r,s\right)=d\left(R,S\right)=\left|\overrightarrow{RS}\right|=\sqrt{\left(10-8\right)^2+\left(1+1\right)^2+\left(13-14\right)^2}=3$ u