POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS

Sean $\begin{cases} x = a_1 + \lambda v_1 \\ y = a_2 + \lambda v_2 \\ z = a_3 + \lambda v_3 \end{cases}$ y $\begin{cases} x = a'_1 + \mu v'_1 \\ y = a'_2 + \mu v'_2 \\ z = a'_3 + \mu v'_3 \end{cases}$ dos rectas y llamemos $M = \begin{pmatrix} v_1 & v'_1 \\ v_2 & v'_2 \\ v_3 & v'_3 \end{pmatrix}$ y $\widetilde{M} = \begin{pmatrix} v_1 & v'_1 & a'_1 - a_1 \\ v_2 & v'_2 & a'_2 - a_2 \\ v_3 & v'_3 & a'_3 - a_3 \end{pmatrix}$. Se pueden presentar las siguientes posiciones relativas:

rango M	rango $\widetilde{M}$	Sistema	Posición relativa
2	3	Incompatible	Se cruzan
2	2	Compatible determinado	Se cortan en un punto
1	2	Incompatible	Son paralelas
1	1	Compatible indeterminado	Son coincidentes

Si las rectas vienen dadas por sus ecuaciones implícitas, entonces:

$$\begin{cases} r \equiv \begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases} \\ s \equiv \begin{cases} A_3 x + B_3 y + C_3 z + D_3 = 0 \\ A_4 x + B_4 y + C_4 z + D_4 = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \widetilde{M} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{pmatrix}$$

y se pueden presentar las siguientes posiciones relativas:

rango M	rango $\widetilde{M}$	Sistema	Posición relativa
3	4	Incompatible	Se cruzan
3	3	Compatible determinado	Se cortan en un punto
2	3	Incompatible	Paralelas
2	2	Compatible indeterminado	Coincidentes

Esto, se puede escribir **de otra forma**:

Sean $\overrightarrow{u_r}$ y $\overrightarrow{u_s}$ los vectores directores de las rectas r y s, y P_r y P_s puntos cualesquiera de r y de s respectivamente. Se tiene:

Vectores directores			
Proporcionales		No proporcionales	
$\overrightarrow{u_r} \parallel \overrightarrow{u_s}$		$\overrightarrow{u_r} \nparallel \overrightarrow{u_s}$	
Coincidentes	Paralelas	Secantes	Se cruzan
$\overrightarrow{u_r} \parallel \overrightarrow{P_rP_s}$	$\overrightarrow{u_r} \nparallel \overrightarrow{P_rP_s}$	$\det\left(\overrightarrow{u_r},\ \overrightarrow{u_s},\ \overrightarrow{P_rP_s}\right) = 0$	$\det\left(\overrightarrow{u_r},\ \overrightarrow{u_s},\ \overrightarrow{P_rP_s}\right) \neq 0$

POSICIONES RELATIVAS DE DOS PLANOS

Sean $\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0,\ \pi' \equiv A'x+B'y+C'z+D'=0$ dos planos y llamemos

$$M=\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} \text{ y } \widetilde{M}=\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{pmatrix}.$$

Se tienen las siguientes posiciones relativas:

rango M	rango $\widetilde{M}$	Sistema	Posición relativa
2	2	Compatible indeterminado	Se cortan en una recta
1	2	Incompatible	Son paralelos
1	1	Compatible indeterminado	Son coincidentes

POSICIONES RELATIVAS DE UNA RECTA Y UN PLANO

Sea $\begin{cases} x = a_1 + \lambda v_1 \\ y = a_2 + \lambda v_2 \\ z = a_3 + \lambda v_3 \end{cases}$ una recta y $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ un plano.

Se pueden presentar las siguientes posiciones relativas:

1ª forma:

- $Av_1 + Bv_2 + Cv_3 \neq 0 \Leftrightarrow$ La recta y el plano se cortan en un punto
- $Av_1 + Bv_2 + Cv_3 = 0 \begin{cases} Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 + D \neq 0 \Rightarrow r \text{ y } \pi \text{ paralelos} \\ Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 + D = 0 \Rightarrow r \text{ contenida en } \pi \end{cases}$

2ª forma:

Si la recta viene dada como intersección de dos planos y el plano a través de su ecuación implícita:

$$\begin{cases} r \equiv \begin{cases} A'x + B'y + C'z + D' = 0 \\ A''x + B_2 y + C''z + D'' = 0 \end{cases} \\ \pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$$

consideramos

$$M = \begin{pmatrix} A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \\ A & B & C \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \widetilde{M} = \begin{pmatrix} A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \\ A & B & C & D \end{pmatrix}$$

y se pueden presentar las siguientes posiciones relativas:

rango M	rango $\widetilde{M}$	Sistema	Posición relativa
3	3	Compatible determinado	Se cortan en un punto
2	3	Incompatible	Son paralelos
2	2	Compatible indeterminado	Recta contenida en el plano

POSICIONES RELATIVAS DE TRES PLANOS

Sean $\begin{cases} \pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0 \\ \pi' \equiv A'x + B'y + C'z + D' = 0 \\ \pi'' \equiv A''x + B''y + C''z + D'' = 0 \end{cases}$ tres planos y consideremos

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix} \text{ y } \widetilde{M} = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix}.$$

Se tienen las siguientes posiciones relativas:

$\mathrm{rg}(M)$	$\mathrm{rg}(\widetilde{M})$	Sistema	Rango de las submatrices de M de orden 2×3	Rango de las submatrices de $\widetilde{M}$ de orden 2×4	Posición relativa
3	---	C.D.	---	---	Secantes en un punto
2	3	I.	2 (todas)	---	Se cortan dos a dos según tres rectas
2	3	I.	1 (una)	---	Dos planos paralelos y el tercero los corta según dos rectas paralelas
2	2	C.I	---	2 (todas)	Distintos y se cortan en una recta
2	2	C.I.	---	1 (una)	Dos planos coinciden y el tercero los corta según una recta
1	2	I.	---	2 (todas)	Paralelos
1	2	I.	---	1 (una)	Dos planos coinciden y el otro es paralelo
1	1	I.	---	---	Coincidentes