Ejercicios resueltos de Geometría Afín

1. Halla la ecuación implícita del plano paralelo al plano $\pi \equiv 2x-2y+3z-12=0$ que pasa por el punto $P(-2,3,-1)$.

Solución:

El plano π' está determinado por $\pi' \equiv \{P, u_\pi, v_\pi\}$, donde u_π y v_π son vectores directores del plano π.

$$\pi \equiv 2x-2y+3z-12=0 \Rightarrow \pi \equiv \begin{cases} x=6+\lambda-3\mu \\ y=\lambda \\ z=2\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_\pi}=(1,1,0) \\ \overrightarrow{v_\pi}=(-3,0,2) \end{cases}$$

Así, el plano pedido es:

$$\pi' \equiv \det\begin{pmatrix} x+2 & 1 & -3 \\ y-3 & 1 & 0 \\ z+1 & 0 & 2 \end{pmatrix}=0 \Rightarrow \pi' \equiv 2x-2y+3z+13=0$$

2. Halla la ecuación implícita del plano que pasa por el punto $P(-1,0,2)$ y contiene a la recta de ecuación $r \equiv \frac{x-1}{-1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+4}{3}$.

Solución:

El plano es $\pi \equiv \{P, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{P_rP}\}$ donde $P_r(1,3,-4)\in r$ y $\overrightarrow{u_r}$ es el vector director de la recta r.

Tenemos que $\overrightarrow{u_r}=(1,-1,3)$ y $\overrightarrow{P_rP}=(-1,0,2)-(1,3,-4)=(-2,-3,6)$, luego:

$$\pi \equiv \det\begin{pmatrix} x+1 & -1 & -2 \\ y-0 & -1 & -3 \\ z-2 & 3 & 6 \end{pmatrix}=0 \Rightarrow \pi \equiv 3x+z+1=0$$

3. Dados los planos $\alpha \equiv -x+2y+z+2=0$ y $\beta \equiv -2y+z=0$, encuentra razonadamente la ecuación general o implícita de la recta paralela a los planos α y β que pase por el punto $P(0,-1,3)$, sabiendo que α y β son secantes.

Solución:

La recta está determinada por el vector director de la recta $r \equiv \begin{cases} \alpha \equiv -x+2y+z+2=0 \\ \beta \equiv -2y+z=0 \end{cases}$ y el punto $P(0,-1,3)$.

El vector director de la recta r es:

$$\overrightarrow{u_r}=\det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}=4\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}=(4,1,2)$$

Por tanto, la ecuación continua de la recta pedida es:

$$s \equiv \frac{x}{4} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{2}$$

y, como consecuencia, la ecuación general o implícita es:

$$s \equiv \begin{cases} \frac{x}{4} = \frac{y-1}{1} \\ \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{2} \end{cases} \rightarrow s \equiv \begin{cases} x-4y-4=0 \\ 2y-z+5=0 \end{cases}$$

4. Dado el punto $P(2,0,-1)$ y las rectas

$$r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{0} \text{ y } s \equiv \begin{cases} x-y+2z+4=0 \\ x+z+1=0 \end{cases}$$

Encuentra razonadamente la ecuación general del plano que pasando por P es paralelo a r y s.

Solución:

El plano está determinado por el punto P y por los vectores directores de las rectas:

$$\pi \equiv \left\{ P, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s} \right\}$$

La ecuación general del plano es:

$$\pi \equiv \det \begin{pmatrix} x-2 & -1 & -1 \\ y & 2 & 1 \\ z+1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 2(x-2)-(z+1)+2(z+1)+y=0 \Rightarrow \pi \equiv 2x+y+z-3=0$$

«De otra forma»:

El plano está determinado por P y por el vector normal $\vec{n} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}$.

El vector normal es:

$$\vec{n} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2\vec{i} - \vec{k} + 2\vec{k} + \vec{j} = (2,1,1)$$

Por tanto, el plano es de la forma $\pi \equiv 2x+y+z+D=0$.

Imponiendo que $P(2,0,-1) \in \pi$:

$$2 \cdot 2 + 0 - 1 + D = 0 \Rightarrow D = -3$$

Así, la ecuación del plano es: $\pi \equiv 2x+y+z-3=0$.

5. Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x+2y-z=1 \\ -x+y-3z=2 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x+y=0 \\ 3x+2y+z=-1 \end{cases}$, da la ecuación implícita de un plano π que contenga a r y s.

Solución:

El plano π está determinado por P (punto de intersección de r y s) y por los vectores directores de las rectas.

$$\pi \equiv \left\{ P, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s} \right\}$$

Calculamos el punto de intersección de r y s:

$$\begin{cases} x+2y-z=1 \\ -x+y-3z=2 \\ x+y=0 \to x=-y \\ 3x+2y+z=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y+2y-z=1 \\ y+y-3z=2 \\ -3y+2y+z=-1 \end{cases} \to \begin{cases} y-z=1 & [1] \\ 2y-3z=2 & [2] \\ -y+z=-1 & [3] \end{cases}$$

De $-2\cdot[1]+[2]$: $-z=0 \Rightarrow z=0$

Sustituyendo en [1]: $y=1+z \Rightarrow y=1$

Como $x+2y-z=1 \Rightarrow x=1-2\cdot 1=-1$

Por tanto, el punto de corte es $P(-1,1,0)$ y el plano pedido es:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x+1 & -5 & -1 \\ y-1 & 4 & 1 \\ z & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4(x+1)-3(y-1)-5z+4z-3(x+1)+5(y-1)=0 \Rightarrow \pi \equiv x+2y-z-1=0$$

6. Dados los planos $\alpha \equiv -x+2y+z+2=0$ y $\beta \equiv -2y+z=0$, encuentra razonadamente la ecuación general o implícita de la recta paralela a los planos α y β que pase por el punto $P(0,-1,3)$.

Solución:

La recta que nos piden está determinada por $P(0,-1,3)$ y el vector $\overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{n_\alpha} \times \overrightarrow{u_\beta}$.

Calculamos el vector director de la recta:

$$\overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i}+2\vec{k}+2\vec{i}+\vec{j} = (4,1,2)$$

Por tanto, la ecuación continua de la recta pedida es:

$$r \equiv \frac{x}{4} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{2}$$

y sus ecuaciones generales o implícitas:

$$r \equiv \begin{cases} x-4y-4=0 \\ 2y-z+5=0 \end{cases}$$

7. Halla la ecuación de la recta que pasa pro el punto $P(1,0,0)$ y corta a las rectas $r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$ y $s \equiv \begin{cases} x-2y+z-1=0 \\ 2x-y-z-3=0 \end{cases}$.

Solución:

La ecuación pedida está determinada por $r \equiv \{P, \pi_1, \pi_2\}$, donde π_1 es el plano que contiene a P y a la recta r, y π_2 es el plano que contiene a P y a la recta s.

El plano que contiene a P y a la recta r:

$$\pi_1 \equiv \left\{P, \overrightarrow{PP_r}, \overrightarrow{u_r}\right\} \equiv \det\begin{pmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ y & 1 & -1 \\ z & 0 & 2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_1 \equiv x-y-z-1=0$$

El plano que contiene a P y a la recta s:

$$s \equiv \begin{cases} x-2y+z-1=0 \\ 2x-y-z-3=0 \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=4-3\lambda \\ z=-7+5\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_s}=(1,-3,5) \\ P_s(0,4,-7) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{PP_s}=(0,4,-7)-(1,0,0)=(-1,4,-7)$$

$$\pi_2 \equiv \left\{P,\overrightarrow{PP_s},\overrightarrow{u_s}\right\} \equiv \det\begin{pmatrix} x-1 & -1 & 1 \\ y & 4 & -3 \\ z & -7 & 5 \end{pmatrix}=0 \Rightarrow \pi_2 \equiv x+2y+z-1=0$$

La ecuación de la recta pedida es:

$$t \equiv \begin{cases} x-y-z-1=0 \\ x+2y+z-1=0 \end{cases} \text{(Implícita)} \Rightarrow t \equiv \begin{cases} x=\mu \\ y=2-2\mu \\ z=-3+3\mu \end{cases} \text{(Paramétricas)} \Rightarrow t \equiv \frac{x}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+3}{3} \text{ (Continua)}$$

8. Determina la ecuación de la recta contenida en el plano $\pi \equiv x+2y+6z-2=0$ que corta a los ejes OY y OZ.

Solución:

La recta pedida está determinada por $r \equiv \left\{A,\overrightarrow{AB}\right\}$, donde A es el punto de intersección de π con el eje OY y B es el punto de intersección de π con el eje OZ.

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+6z-2=0 \\ x=0 \\ z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,1,0) \text{ es el punto de intersección del plano con el eje OY.}$$

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+6z-2=0 \\ x=0 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow B\left(0,0,\frac{1}{3}\right) \text{ es el punto de intersección del plano con el eje OZ.}$$

Así, un vector director de la recta contenida en π que corta a los ejes OY y OZ es $\overrightarrow{AB}=\left(0,-1,\frac{1}{3}\right)$ y, por tanto, la ecuación de la recta pedida es:

$$r \equiv \begin{cases} x=0 \\ y=1-\lambda \\ z=\frac{1}{3}\lambda \end{cases}$$

9. Ecuación del plano que contiene a una recta y es paralelo a otra (las rectas se cruzan)

Hallar, si es posible, un plano paralelo a $r \equiv \frac{x}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{3}$ que contenga a $s \equiv \begin{cases} x=2-2\lambda \\ y=2\lambda \\ z=5-6\lambda \end{cases}$

Solución:

Las rectas r y s se cruzan, por lo que el plano pedido está determinado por $\pi \equiv \left\{P_s,\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}\right\}$, donde $P_s \in s$.

Las rectas se cruzan, ya que $\text{rango}\left(\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s},\overrightarrow{P_rP_s}\right)=\text{rango}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 3 & -6 & 4 \end{pmatrix}=3$, donde

$$\begin{cases} \overrightarrow{u_r}=(2,-1,3) \\ \overrightarrow{u_s}=(-2,2,-6) \\ \overrightarrow{P_rP_s}=(2,0,5)-(0,2,1)=(2,-2,4) \end{cases}$$

El vector $\overrightarrow{u_r}$ es paralelo al plano que buscamos y el vector $\overrightarrow{u_s}$ está contenido en él. Luego con ellos y con un punto de $P_s(2,0,5)\in s$, obtenemos el plano π:

$$\pi\equiv\det\begin{pmatrix} x-2 & 2 & -2 \\ y & -1 & 2 \\ z-5 & 3 & -6 \end{pmatrix}=0\Rightarrow\pi\equiv 6y+2z-10=0\Rightarrow\pi\equiv 3y+z-5=0$$

10. Ecuación del plano que contiene a dos rectas paralelas

Hallar, si es posible, un plano que contenga a $r\equiv\dfrac{x+5}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{-4}$ y a $s\equiv\begin{cases}2x+y+2z+5=0\\ 2x-y+z+11=0\end{cases}$.

Solución:

El plano está determinado por $\pi\equiv\left\{P_r,\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{P_rP_s}\right\}$, donde $P_r\in r$ y $P_s\in s$.

Los vectores directores de r y s son: $\overrightarrow{u_r}=(3,2,-4)$ y $\overrightarrow{u_s}=\det\begin{pmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}=3\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k}=(3,2,-4)$,

que no son proporcionales y, por tanto, las rectas son paralelas o coincidentes. Ahora bien, como $P_r(-5,1,2)\in r$, no verifica la ecuación de s, $2\cdot(-5)-1+2+11\neq 0$, se tiene que $P_r\in s$ y como consecuencia, r y s son paralelas.

El plano pedido es:

$$\pi\equiv\det\begin{pmatrix} x+5 & 3 & 1 \\ y-1 & 2 & 2 \\ z-2 & -4 & -2 \end{pmatrix}=0\Rightarrow\pi\equiv 2x+y+2z+5=0$$

ya que, haciendo $z=0$ en las ecuaciones de s, obtenemos $P_s(-4,3,0)\in s$ y, por tanto, $\overrightarrow{P_rP_s}=(-4,3,0)-(-5,1,2)=(1,2,-2)$