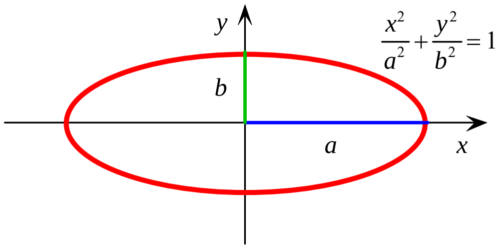

Longitud de la elipse

Sea $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ la elipse. Entonces

$$L = 4\int_0^a \sqrt{1+\frac{a^2x^2}{a^2\left(a^2-x^2\right)}}dx = \frac{4}{a}\int_0^a \sqrt{\frac{a^4-a^2x^2+b^2x^2}{a^2\left(a^2-x^2\right)}}dx = \left[\begin{matrix} x = a\operatorname{sen}\theta \\ dx = a\cos\theta d\theta \end{matrix}\right] =$$

$$= \frac{4}{a}\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^4-a^2\left(a^2-b^2\right)\operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta = \left[e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = \frac{c}{a} \right] =$$

$$= 4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-e^2\operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta \;\left(\begin{matrix}\text{Integral elíptica}\\ \text{completa de 2ª especie}\end{matrix}\right) =$$

$$= 2a\pi\left(1-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left[(2n)!\right]^2}{\left(2^n\cdot n!\right)^4}\cdot\frac{e^{2n}}{2n-1}\right), \text{ donde } e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{c}{a} \text{ es la excentricidad.}$$

Aproximaciones:

(1) Fórmula de Ramanujan

$$L \simeq \pi\left[3(a+b)-\sqrt{(3a+b)(a+3b)}\right]$$

(2) Fórmula de Ramanujan II

$$L \simeq \pi(a+b)\left[1+\frac{3\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2}{10+\sqrt{4-3\left(\frac{a-b}{a+b}\right)}}\right]$$

(3) Fórmula de Ramanujan II-Cantrel: $H=\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2$

$$L \simeq \pi(a+b)\left[1+\frac{3H}{10\sqrt{4-3H}}+\left(\frac{4}{\pi}-\frac{14}{11}\right)H^{12}\right]$$

(4) Fórmula de Gauss-Krammer

$$L \simeq \pi(a+b)\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 H - \left(\frac{1}{2\cdot 4}\right)^2 H^2 + \left(\frac{1}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 H^3 + \ldots\right] = \pi(a+b)\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{0,5}{n}^2 H^n$$

Área de la elipse

Las ecuaciones paramétricas de la elipse son: $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\operatorname{sen} t\end{cases}$, donde $x\in[-a,a]$ y, como consecuencia, $t\in[\pi,0]$. Así, el área de la elipse es:

$$A=2\int_{\pi}^{0}(b\,\mathrm{sen}\,t)(-a\,\mathrm{sen}\,t)\,dt=-2ab\int_{\pi}^{0}\mathrm{sen}^2\,tdt=2ab\int_{0}^{\pi}\mathrm{sen}^2\,tdt=2ab\int_{0}^{\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}dt=$$

$$=2ab\left[\frac{t}{2}-\frac{\mathrm{sen}\,2t}{4}\right]\Bigg|_0^{\pi}=2ab\frac{\pi}{2}=\pi ab$$

Dicha fórmula se puede obtener también mediante integración doble:

$$E_1=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}_0^+\times\mathbb{R}_0^+:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1\right\}$$

$$A_1=\int_{E_1}1d(x,y)=\iint_{E_1}1dxdy=\int_0^a\left(\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}dy\right)dx=\int_0^a\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx=$$

$$=\begin{bmatrix} x=a\,\mathrm{sen}\,t & \Rightarrow & dx=a\cos tdt \\ x=0 & \Rightarrow & t=0 \\ x=a & \Rightarrow & t=\dfrac{\pi}{2}\end{bmatrix}=\frac{b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-a^2\,\mathrm{sen}^2\,t}\cdot a\cos tdt=b\int_0^a\sqrt{1-\mathrm{sen}^2\,t}\,\cos tdt=$$

$$=ab\int_0^a\cos^2\,tdt=ab\int_0^a\frac{1+\cos 2t}{2}dt=ab\left[\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{sen}\,2t}{4}\right]\Bigg|_0^a=\frac{\pi}{4}ab$$

$$\Rightarrow A_{\text{Elipse}}=4A_1=4\frac{\pi}{4}ab=\pi ab$$

C.Q.D.