Julio 2020

UCLM
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Evaluación para el Acceso a la Universidad
Curso 2019/2020

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá resolver **CUATRO** ejercicios, si resuelve más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos. Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

1. *a*) [**1,25 puntos**] Determina razonadamente los valores de a para los que la matriz A no tiene inversa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & a \\ a & 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

   b) [**1,25 puntos**] Calcula razonadamente todos los posibles valores x, y, z para que el producto de las matrices $C = \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & z \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ conmute.

2. *a*) [**1,75 puntos**] Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left\{ \begin{array}{rrrcl} ax & -ay & -z & = & a \\ ax & -ay & & = & a \\ ax & +2y & -z & = & 1 \end{array} \right. .$$

   b) [**0,75 puntos**] Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 2$, si es posible.

3. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x-2} & \text{si} \quad x < 2 \\[2ex] \cos(\pi x) & \text{si} \quad 2 \leq x \leq 3 \\[2ex] \dfrac{\ln(x-2)}{3-x} & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

   a) [**1,5 puntos**] Determina razonadamente los puntos en los que la función es continua, calcula los puntos en los que es discontinua y clasifica el tipo de discontinuidad, si los hubiera.

   b) [**1 punto**] Calcula razonadamente el siguiente límite: $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{xe^{-x}}{1 + 2x - cos(x^2)}$.

4. Sea la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1}$.

   a) [**1,5 puntos**] Halla razonadamente las coordenadas de los extremos relativos de la función $f(x)$ y clasifícalos.

   b) [**1 punto**] Calcula la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

5. *a*) [**1,25 puntos**] Calcula razonadamente la siguiente integral: $\displaystyle\int \frac{3x-2}{x^2 - 2x + 1}\, dx$.

   b) [**1,25 puntos**] Calcula, justificadamente, el área acotada del recinto limitado por la gráfica de la función $g(x) = -x^3 + 2x^2 + 3x$ y el eje de abscisas.

Evaluación para el Acceso a la Universidad
Curso 2019/2020

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá resolver **CUATRO** ejercicios, si resuelve más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos. Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

6. Dados los planos $\pi_1 \equiv 2x + y + z - 2 = 0$ y $\pi_2 \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & -1 + \lambda - \mu \\ y & = & -\lambda + \mu \\ z & = & -2 + 2\lambda \end{array} \right.$.

   a) **[1 punto]** Calcula razonadamente el ángulo que forman los dos planos.

   b) **[1,5 puntos]** Halla razonadamente el volumen del tetraedro formado por el punto $P(3, -3, 2)$ y los puntos de corte del plano π_1 con los ejes coordenados.

7. Dados el plano $\pi \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & -1 + \mu \\ y & = & 1 + \lambda + a\mu \\ z & = & 1 + 2\lambda - \mu \end{array} \right.$ y la recta $s \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} x - 2y & = & 1 - b \\ z & = & -3 \end{array} \right.$.

   a) **[1,5 puntos]** Calcula razonadamente el valor de los parámetros a y b para que la recta s esté contenida en el plano π.

   b) **[1 punto]** Si $a = 0$ y $b = 3$, calcula razonadamente la ecuación en forma implícita de la recta r que pasa por el punto $P(1, -1, -8)$ es paralela al plano π y perpendicular a la recta s.

8. *a*) En un servicio de emergencias el 60 % de los avisos que se reciben se clasifican con el código amarillo, el 30 % con el naranja y el 10 % con el rojo. Se sabe que el porcentaje de avisos recibidos que son falsas alarmas es 3 % en el caso de código amarillo, 2 % en el naranja y 1 % en el rojo. Si se recibe un aviso,

   a.1) **[0,5 puntos]** ¿qué probabilidad hay de que se trate de una falsa alarma?

   a.2) **[0,75 puntos]** Si se sabe que el aviso recibido no ha sido falsa alarma, ¿qué probabilidad hay de que haya sido un aviso código rojo o naranja?

   b) Si en una centralita se reciben 9 avisos,

   b.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que la centralita reciba 2 o menos avisos naranjas?

   b.2) **[0,75 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que todos los avisos sean amarillos o naranjas?

n	k \ p	0.01	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.33	0.35	0.40	0.45	0.49	0.50
9	**0**	0.9135	0.6302	0.3874	0.2316	0.1342	0.0751	0.0404	0.0272	0.0207	0.0101	0.0046	0.0023	0.0020
	1	0.0830	0.2985	0.3874	0.3679	0.3020	0.2253	0.1556	0.1206	0.1004	0.0605	0.0339	0.0202	0.0176
	2	0.0034	0.0629	0.1722	0.2597	0.3020	0.3003	0.2668	0.2376	0.2162	0.1612	0.1110	0.0776	0.0703
	3	0.0001	0.0077	0.0446	0.1069	0.1762	0.2336	0.2668	0.2731	0.2716	0.2508	0.2119	0.1739	0.1641
	4	0.0000	0.0006	0.0074	0.0283	0.0661	0.1168	0.1715	0.2017	0.2194	0.2508	0.2600	0.2506	0.2461
	5	0.0000	0.0000	0.0008	0.0050	0.0165	0.0389	0.0735	0.0994	0.1181	0.1672	0.2128	0.2408	0.2461
	6	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006	0.0028	0.0087	0.0210	0.0326	0.0424	0.0743	0.1160	0.1542	0.1641
	7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0012	0.0039	0.0069	0.0098	0.0212	0.0407	0.0635	0.0703
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0008	0.0013	0.0035	0.0083	0.0153	0.0176
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0008	0.0016	0.0020

Julio de 2020

1 a) $A = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & a \\ a & 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

A no tiene inversa $\iff |A| = 0$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & a+1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & a \\ a & 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[-aF_1+F_4]{-aF_1+F_3} \begin{vmatrix} 1 & -a+1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & a \\ 0 & -a^2-a & -2a+1 & -a \\ 0 & -a^2-a & -2a+2 & -a \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 & a \\ -a^2-a & -2a+1 & -a \\ -a^2-a & -2a+2 & -a \end{vmatrix} = -2a(-2a+1) + a(-a^2-a)(-2a+2) -$$

$$- a(-a^2-a) - \left[a(-2a+1)(-a^2-a) - 2a(-2a+2) - a(-a^2-a)\right] =$$

$$= 4a^2 - 2a + (-a^3-a^2)(-2a+2) + a^3 + a^2 -$$

$$- \left[(-2a^2+a)(-a^2-a) + 4a^2 - 4a + a^3 + a^2\right] =$$

$$= \cancel{4a^2} - 2a + \cancel{2a^4} - \cancel{2a^3} + \cancel{2a^3} - 2a^2 + \cancel{a^3} + \cancel{a^2} - \cancel{2a^4} - 2a^3 + a^3 + a^2 -$$

$$- \cancel{4a^2} + 4a - \cancel{a^3} - \cancel{a^2} = -a^3 - a^2 + 2a = a(-a^2-a+2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ -a^2-a+2 = 0 \Rightarrow a = \begin{cases} -2 \\ +1 \end{cases} \end{cases}$$

$\boxed{\text{A no tiene inversa para } a = -2, 0, 1}$

b) $C = \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & z \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

C y D conmutan $\iff CD = DC$

$$CD = \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+1 & x-1 \\ 3y+z & y-z \end{pmatrix}$$

$$DC = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 1 \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+y & z+3 \\ x-y & 1-z \end{pmatrix}$$

$$CD = DC \iff \begin{pmatrix} 3x+1 & x-1 \\ 3y+z & y-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+y & z+3 \\ x-y & 1-z \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} 3x+1 = 3x+y \Rightarrow y=1 \\ x-1 = z+3 \\ 3y+z = x-y \\ y-z = 1-z \Rightarrow y=1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x-z=4 \\ -x+z=-4 \end{array}\right\} \text{Iguales}$$

Llamamos $z = \lambda \in \mathbb{R}$

Entonces: $\left.\begin{array}{l} x = 4+\lambda \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{array}\right\}$ $\boxed{\text{Soluciones } (x,y,z) = (4+\lambda, 1, \lambda) \text{ con } \lambda \in \mathbb{R} \text{ para que } CD = DC}$

2 a) $A = \begin{pmatrix} a & -a & -1 \\ a & -a & 0 \\ a & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\tilde{A} = \begin{pmatrix} a & -a & -1 & a \\ a & -a & 0 & a \\ a & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Rango de A

$$|A| = a^2 - 2a - a^2 - a^2 = -a^2 - 2a = 0 \Rightarrow a(-a-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = -2 \end{cases}$$

- Si $a \neq \begin{cases} 0 \\ -2 \end{cases} \Rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow$ rango $A = 3 =$ rango $(\tilde{A}) =$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ (teorema de Rouché-Fröbenius) S.C.D.

- Si $\boxed{a=0} \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow rg\, A < 3$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow rg\, A = 2 \text{ ya que } \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow rg\, \tilde{A} = 2 \text{ ya que } \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

- Si $\boxed{a=-2} \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow rg\, A < 3$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow rg\, A = 2 \text{ ya que } \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-F_1+F_3]{-F_1+F_2} \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Cipri

$\Rightarrow \operatorname{rg} \tilde{A} = 3$

Discusión:

Si $a \neq \begin{cases} 0 \\ -2 \end{cases} \Rightarrow \operatorname{rg} A = 3 = \operatorname{rg} \tilde{A} =$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ S.C.D.

Si $a = 0 \Rightarrow \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} \tilde{A} = 2 <$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ S.C.I.

Si $a = -2 \Rightarrow \operatorname{rg} A = 2 \neq 3 = \operatorname{rg} \tilde{A} \Rightarrow$ S.I.

b) Si $a = 2$, el sistema es C.D.

$$\begin{cases} 2x - 2y - z = 2 \\ 2x - 2y \qquad = 2 \\ 2x + 2y - z = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-F_1+F_3]{-F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} [1] \\ [2] \\ [3] \end{array}$$

De [2]: $z = 0$

De [3]: $4y = -1 \Rightarrow y = -\frac{1}{4}$

Sustituimos en [1]: $x = \dfrac{2 + 2y + z}{2} = \dfrac{2 + 2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) + 0}{2} = \dfrac{3}{4}$

Solución: $(x, y, z) = \left(\frac{3}{4}, \frac{-1}{4}, 0\right)$

3) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x-2} & x < 2 \\ \cos(\pi x) & 2 \leq x \leq 3 \\ \dfrac{\ln(x-2)}{3-x} & x > 3 \end{cases}$

Cada una de las funciones componentes es continua en su dominio, por ser una función racional bien definida, una función trigonométrica y un cociente (que no hace cero el denominador), en el que el numerador está bien definido.

Continuidad en $x=2$: ¿ $\exists \lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$?

$f(2) = \cos(2\pi) = 1$ (la calculadora en radianes)

$$\lim_{x\to 2} f(x) \begin{cases} \lim_{x\to 2^-} \frac{3}{x-2} = -\infty \\ \lim_{x\to 2^+} \cos(\pi x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 2} f(x) \to f \text{ no es continua en } x=2$$

$\boxed{f \text{ tiene una discontinuidad de salto infinito en } x=2}$

Continuidad en $x=3$: ¿ $\exists \lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$?

$f(3) = \cos(3\pi) = -1$

$$\lim_{x\to 3} f(x) \begin{cases} \lim_{x\to 3^-} \cos(\pi x) = -1 \\ \lim_{x\to 3^+} \frac{\ln(x-2)}{3-x} = \left[\frac{0}{0}\right] \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 3^+} \frac{\frac{1}{x-2}}{-1} = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \exists \lim_{x\to 3} f(x) = -1 \Rightarrow f(3) = \lim_{x\to 3} f(x) \Rightarrow f$ es continua en $x=3$

$\boxed{\text{Conclusión: } f \text{ es continua en } \mathbb{R}-\{2\} \text{ y en } x=2 \text{ presenta una discontinuidad de salto infinito.}}$

b) $$\lim_{x\to 0} \frac{xe^{-x}}{1+2x-\cos(x^2)} = \left[\frac{0}{0}\right] \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}-xe^{-x}}{2+\operatorname{sen}(x^2)\cdot 2x} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

4 $$f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x^2+1}$$

a) $Dom(f) = \mathbb{R}$ ya que $x^2+1 \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(x^2+1)-(x^2-2x+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2-2}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (2x-2)(x^2+1)-(x^2-2x+1)\cdot 2x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{2x^3} + \cancel{2x} - 2x^2 - 2 - \cancel{2x^3} + 4x^2 - \cancel{2x} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \text{ (posibles extremos relativos)}$$

$$f''(x) = \frac{4x(x^2+1)^2 - (2x^2-2)\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$$

$f''(1) > 0 \Rightarrow x = 1$ es un mínimo relativo de f

$f''(-1) < 0 \Rightarrow x = -1$ es un máximo relativo de f

Las coordenadas de los extremos relativos son:

$(1, f(1)) = (1, 0)$ mínimo relativo de f

$(-1, f(-1)) = (-1, 2)$ máximo relativo de f

b) Ec. de la recta tangente a f en $x = a$

$$y - f(a) = f'(a)(x-a)$$

En nuestro caso: $y - f(0) = f'(0)x$

$\boxed{y - 1 = -2x}$ Recta tangente a f en $x = 0$

Ec. de la recta normal a f en $x = a$

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x-a)$$

En nuestro caso: $\boxed{y - 1 = \frac{1}{2}x}$ Recta normal a f en $x=0$

5 a) $\displaystyle\int \frac{3x-2}{x^2-2x+1}\,dx$

Descomponemos $\dfrac{3x-2}{x^2-2x+1}$ en fracciones simples:

$x^2-2x+1 = 0 \Rightarrow x = 1$ (doble)

$$\frac{3x-2}{x^2-2x+1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)}{(x-1)^2} + \frac{B}{(x-1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x-2 = Ax - A + B \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A = 3 \\ -2 = -A+B \end{array}\right\} \Rightarrow B = 1$$

Así $$\int \frac{3x-2}{x^2-2x+1}\,dx = \int \frac{3}{x-1}\,dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx =$$

$$= 3\log|x-1| + \frac{(x-1)^{-1}}{-1} = 3\log|x-1| - \frac{1}{(x-1)} + C$$

donde $\log$ es el logaritmo natural.

b) $g(x) = -x^3 + 2x^2 + 3x$

$$g(x) = 0 \Rightarrow x(-x^2+2x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -x^2+2x+3=0 \Rightarrow x = \begin{cases} -1 \\ 3 \end{cases} \end{cases}$$

$$\boxed{A} = \left| \int_{-1}^{0} g(x)\,dx \right| + \left| \int_{0}^{3} g(x)\,dx \right| = \left| \left[\frac{-x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \right]_{-1}^{0} \right| +$$

$$+ \left| \left[\frac{-x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} \right]_{0}^{3} \right| = |G(0) - G(-1)| + |G(3) - G(0)| =$$

$$= \left| -\frac{7}{12} \right| + \left| \frac{45}{4} \right| = \boxed{\frac{71}{6}\ u^2}$$

$$\int g(x)\,dx = \int (-x^3+2x^2+3x)\,dx = \frac{-x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} = G(x)$$

$G(0) = 0$

$G(-1) = \frac{-7}{12}$

$G(3) = \frac{45}{4}$

6 a) $\pi_1 \equiv 2x + y + z - 2 = 0$

$$\pi_2 \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda - \mu \\ y = -\lambda + \mu \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases}$$

$\vec{n}_{\pi_1} = (2, 1, 1)$

$$\vec{n}_{\pi_2} = \vec{u}_{\pi_2} \times \vec{v}_{\pi_2} = (1,-1,2) \times (-1,1,0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{k} - 2\vec{j} - \vec{k} - 2\vec{i} = -2\vec{i} - 2\vec{j} = (-2,-2,0)$$

$$\cos \sphericalangle\{\pi_1, \pi_2\} = \frac{|\vec{n}_{\pi_1} \cdot \vec{n}_{\pi_2}|}{|\vec{n}_{\pi_1}|\,|\vec{n}_{\pi_2}|} = \frac{|-4-2|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}\sqrt{(-2)^2+(-2)^2}} =$$

$$= \frac{6}{\sqrt{6}\sqrt{8}} = \frac{6}{\sqrt{48}}$$

$$\boxed{\alpha = \sphericalangle\{\pi_1, \pi_2\} = \arccos \frac{6}{\sqrt{48}} = 30^\circ}$$

b) $V = \frac{1}{6}\left|\det(\vec{PA}, \vec{PB}, \vec{PC})\right|$

donde A, B y C son los puntos de corte de π_1 con los ejes coordenados

$A: \begin{cases} \pi_1 \\ \text{eje } OX: \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases} \end{cases} A(1,0,0)$

$B: \begin{cases} \pi_1 \\ \text{eje } OY: \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases} \end{cases} B(0,2,0)$

$C: \begin{cases} \pi_1 \\ \text{eje } OZ: \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \end{cases} C(0,0,2)$

$\vec{PA} = (1,0,0)-(3,-3,2) = (-2,3,-2)$

$\vec{PB} = (0,2,0)-(3,-3,2) = (-3,5,-2)$

$\vec{PC} = (0,0,2)-(3,-3,2) = (-3,3,0)$

$$\boxed{V = \frac{1}{6}\left|\det\begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 \\ -3 & 5 & -2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{6}|-6| = 1\,u^3}$$

7 a) $s \subset \pi \iff \begin{cases} \vec{n}_\pi \cdot \vec{u}_s = 0 \\ P_s \in \pi \quad \forall P_s \in s \end{cases}$

De otra forma al final

$s \equiv \begin{cases} x-2y = 1-b \\ z=-3 \end{cases} \equiv \begin{cases} x = 1-b+2\alpha \\ y=\alpha \\ z=-3 \end{cases}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$

$\vec{n}_\pi = \vec{u}_\pi \times \vec{v}_\pi = (0,1,2)\times(1,a,-1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & a & -1 \end{vmatrix} =$

$= -\vec{i} + 2\vec{j} - k - 2a\vec{i} = (-2a-1, 2, -1)$

$\vec{u}_s = (2,1,0)$

$\vec{n}_\pi \cdot \vec{u}_s = 0 \Rightarrow 2(-2a-1)+1\cdot 2+0\cdot(-1) = 0 \Rightarrow a=0$

$P_s(1-b, 0, -3) \in \pi \iff \begin{cases} 1-b = -1+\mu \\ 0 = 1+\lambda \Rightarrow \lambda=-1 \\ -3 = 1+2\lambda-\mu \end{cases}$

$-3 = 1-2-\mu \Rightarrow \mu = 2$

Sustituyendo en la 1ª ecuación:

$b = 1+1-2 = 0$

$$\boxed{\text{Si } (a,b) = (0,0) \Rightarrow s\subset\pi}$$

b) $\vec{n}_\pi = (-1-2a, 2, -1) = (-1, 2, -1)$

$\vec{u}_s = (2, 1, 0)$

$\left.\begin{array}{l} r \parallel \pi \Rightarrow \vec{u}_r \perp \vec{n}_\pi \\ r \perp s \Rightarrow \vec{u}_r \perp \vec{u}_s \end{array}\right\}$ $\vec{u}_r = \vec{n}_\pi \times \vec{u}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$

$= -\vec{k} - 2\vec{j} - 4\vec{k} + \vec{i} = (1, -2, -5)$

$r = \{P, \vec{u}_r\} \equiv \begin{cases} x = 1 + \beta \\ y = -1 - 2\beta \\ z = -8 - 5\beta \end{cases}$ con $\beta \in \mathbb{R}$

De otra forma al final

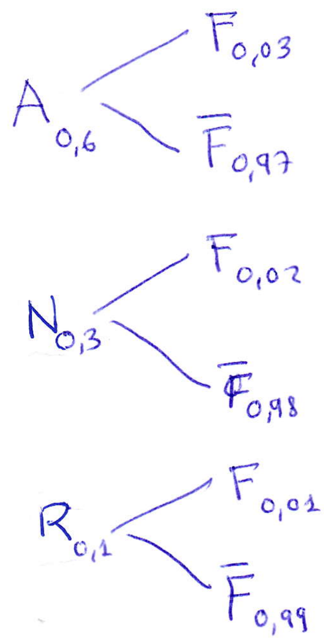
$r \equiv \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z+8}{-5}$

$r \equiv \begin{cases} \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{-2} \Rightarrow -2x+2 = y+1 \Rightarrow -2x-y = -1 \\ \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z+8}{-5} \Rightarrow -5y-5 = -2z-16 \Rightarrow -5y+2z = -11 \end{cases}$

$\boxed{r \equiv \begin{cases} -2x-y = -1 \\ -5y+2z = -11 \end{cases} \text{ Ec. implícita}}$

8) a) A = aviso de código amarillo
N = " " " naranja
R = " " " rojo

F = falsa alarma
$\overline{F}$ = no hay falsa alarma



a₁) $\boxed{P(F)} = P(A)P(F/A) + P(N)P(F/N) + P(R)P(F/R) =$

$= 0{,}6 \cdot 0{,}03 + 0{,}3 \cdot 0{,}02 + 0{,}1 \cdot 0{,}01 = \boxed{0{,}025}$

a₂) $\boxed{P(R \cup N / \overline{F})} = \dfrac{P[(R \cup N) \cap \overline{F}]}{P(\overline{F})} =$

$= \dfrac{P(N)P(\overline{F}/N) + P(R)P(\overline{F}/R)}{1 - P(F)} =$

$= \dfrac{0{,}3 \cdot 0{,}98 + 0{,}1 \cdot 0{,}99}{1 - 0{,}025} = \boxed{0{,}4031}$

Cipri

b) X = nº de avisos naranjas en la centralita

$X \rightsquigarrow B(9, 0{,}3)$

b₁) $\boxed{P(X \leq 2)} = P(X=2) + P(X=1) + P(X=0) =$

$= 0{,}2668 + 0{,}1556 + 0{,}0404 = \boxed{0{,}4628}$

b₂) Y = nº de avisos rojos en la centralita

$Y \rightsquigarrow B(9, 0{,}1)$

$\boxed{P(\text{Avisos amarillos o naranjas}) = P(Y=0) = 0{,}3874}$

(7) a) Mediante rangos (tiene que ser rango $M = 2 =$ rango $\tilde{M}$)

$$\pi \equiv \begin{cases} x = -1 & +\mu \\ y = 1 + \lambda + \mu \\ z = 1 + 2\lambda - \mu \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x+1 & 0 & 1 \\ y-1 & 1 & 1 \\ z-1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi \equiv (-2a-1)x + 2y - z = 2 + 2a$$

Formamos las matrices:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2a-1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1-b \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ -2a-1 & 2 & -1 & 2+2a \end{pmatrix}$$

Si rango $M = 2 =$ rango $\tilde{M} < 3 =$ nº de incógnitas, entonces por el teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es compatible indeterminado.

Rango de M

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2a-1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4a = 0 \Rightarrow a = 0$$

Para $a = 0$, $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ rango $M = 2$

Rango de $\tilde{M}$

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1-b \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2b = 0 \Rightarrow b = 0$$

Conclusión

Para $a=0$ y $b=0$, rango $M = 2 =$ rango $\tilde{M} \neq 3 =$ nº de incógnitas, luego por el tª de Rouché-Fröbenius, el sistema es compatible indeterminado, y, como consecuencia, $s \subset \pi$.

b) [1] $r \parallel \pi \Rightarrow r \subset \pi'$ (plano) t.q. $\begin{cases} \pi' \parallel \pi \\ P \in \pi' \end{cases}$

[2] $r \perp s \Rightarrow r \subset \pi''$ (plano) t.q. $\begin{cases} P \in \pi'' \\ \vec{u}_r = \vec{n}_{\pi''} \end{cases}$

$\Bigg\} \; r \equiv \pi' \cap \pi''$

[1] $\left.\begin{array}{r} \pi' \equiv -x+2y-z = D' \\ P(1,-1,-8) \in \pi' \end{array}\right\} \Rightarrow D' = 5 \Rightarrow \pi' \equiv -x+2y-z=5$

[2] $\vec{u}_r = \vec{n}_{\pi''} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2\vec{i}-\vec{j} = (-2,-1,0) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} \pi'' \equiv -2x-y = D'' \\ P(1,-1,-8) \in \pi'' \end{array}\right\} \Rightarrow D'' = -1 \Rightarrow \pi'' \equiv -2x-y=-1$

Por tanto: $\boxed{r \equiv \begin{cases} -x+2y-z=5 \\ -2x-y=-1 \end{cases}}$

¡Importante! Las ecuaciones implícitas de una recta no son únicas.

Septiembre 2020

UCLM

CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Evaluación para el Acceso a la Universidad
Curso 2019/2020

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá resolver **CUATRO** de los ocho ejercicios propuestos, si resuelve más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos. Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

1. Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&-2\\0&-1&0\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1&2\\0&-1\\1&-1\end{pmatrix}\quad \text{y}\quad C=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&0&-2\end{pmatrix}$$

   a) **[1 punto]** Calcula razonadamente la matriz inversa de A.

   b) **[1,5 puntos]** Calcula razonadamente la matriz X de la ecuación matricial $AX+I_3=BC$, donde I_3 es la matriz identidad.

2. *a*) **[1,75 puntos]** Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a\in\mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} x & +2y & +az & = & a\\ x & +ay & +2z & = & a\\ -x & +y & +z & = & 1\end{array}\right. .$$

   b) **[0,75 puntos]** Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a=2$, si es posible.

3. *a*) **[1 punto]** Calcula razonadamente el siguiente límite: $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{sen}(2x)}\right)$.

   b) **[1,5 puntos]** Dada la función

$$f(x)=\left\{\begin{array}{lll} 2^{(x-1)} & \text{si} & x\le 1\\ x-2 & \text{si} & 1<x<2\\ \ln(x-1) & \text{si} & x\ge 2\end{array}\right. ,$$

   donde ln es el logaritmo neperiano, estudia la continuidad de la función $f(x)$ en $x=1$ y en $x=2$, y clasifica el tipo de discontinuidad si las hubiera.

4. *a*) **[1,5 puntos]** Calcula las dimensiones de una caja de base cuadrada (prisma cuadrangular) sin tapa superior y con un volumen de 108 dm^3 para que la superficie total de la caja (formada por las caras laterales y la base) sea mínima.

   b) **[1 punto]** Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)=x^2+x-1$ en el punto de abscisa $x=1$.

5. *a*) **[1,25 punto]** Calcula razonadamente la siguiente integral: $\displaystyle\int\frac{-dx}{1+e^x}$.

   (Cambio de variable sugerido: $e^x=t$.)

   b) **[1,25 puntos]** Determina justificadamente el área acotada que encierran las gráficas de las funciones $f(x)=-x^2+2x+4$ y $g(x)=x+2$.

Evaluación para el Acceso a la Universidad
Curso 2019/2020

Materia: MATEMÁTICAS II

6. Sean el plano $\pi \equiv x + 2y - z - 4 = 0$ y la recta $r \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x - 2y - 2 & = & 0 \\ y - z - 2 & = & 0 \end{array} \right.$.

   a) **[1 punto]** Calcula razonadamente la distancia del punto $P(1, 2, -1)$ al plano π.

   b) **[1,5 puntos]** Calcula razonadamente el área del triángulo que forman el punto intersección de la recta r con el plano π, y los puntos $B(1, -1, 2)$ y $C(0, 1, 1)$.

7. Dadas las rectas $r \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} 2x - 2y & = & 4 \\ z & = & 0 \end{array} \right.$, $\quad s \equiv \dfrac{x}{3} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z-1}{1}$ y el punto $P(-1, 0, 2)$.

   a) **[1,25 puntos]** Determina razonadamente la posición relativa de las rectas r y s.

   b) **[1,25 puntos]** Halla razonadamente la ecuación general del plano que pasa por el punto P y es paralelo a las rectas r y s.

8. *a*) El 70 % de los usuarios de instagram tiene menos de 34 años, el 25 % entre 34 y 54 años (ambos incluídos) y el 5 % más de 54 años. Se sabe que acceden a diario a dicha red: el 98 % de los menores de 34 años, el 40 % de los usuarios entre 34 y 54 años (ambos incluídos) y el 10 % de los mayores de 54 años. Si se selecciona un usuario al azar:

   a.1) **[0,5 puntos]** ¿qué probabilidad hay de que no acceda a diario a dicha red social?

   a.2) **[0,75 puntos]** Si el usuario seleccionado al azar confiesa que accede diariamente, ¿qué probabilidad hay de que pertenezca al grupo que tiene entre 34 y 54 años (ambos incluídos)?

   b) El tiempo que un usuario de la red instagram pasa conectado a diario a dicha red social sigue una ley normal de media 53 minutos y desviación típica 10 minutos.

   b.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que un usuario seleccionado al azar se conecte más de 30 minutos al día?

   b.2) **[0,75 puntos]** ¿Qué porcentaje de usuarios (tanto por ciento) se conectan entre 40 y 67 minutos al día?

a	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936

Septiembre de 2020

Cipri

1 $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&-2\\0&-1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2\\0&-1\\1&-1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&0&-2\end{pmatrix}$

a) A^{-1}

$$(A|I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&1&1&1&0&0\\1&0&-2&0&1&0\\0&-1&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_1\leftrightarrow F_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-2&0&1&0\\0&1&1&1&0&0\\0&-1&0&0&0&1\end{array}\right)\rightarrow$$

$$\xrightarrow{F_2+F_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-2&0&1&0\\0&1&1&1&0&0\\0&0&1&1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[2F_3+F_1]{-F_3+F_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&2&1&2\\0&1&0&0&0&-1\\0&0&1&1&0&1\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix}2&1&2\\0&0&-1\\1&0&1\end{pmatrix}}$$

b) $AX+I=BC$

$AX=BC-I$

$A^{-1}AX=A^{-1}(BC-I)$

$\boxed{X=A^{-1}(BC-I)}$

$$BC=\begin{pmatrix}1&2\\0&-1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\2&0&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&1&-3\\-2&0&2\\-1&1&3\end{pmatrix}$$

$$BC-I=\begin{pmatrix}5&1&-3\\-2&0&2\\-1&1&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}4&1&-3\\-2&-1&2\\-1&1&2\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=A^{-1}(BC-I)=\begin{pmatrix}2&1&2\\0&0&-1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&+1&-3\\-2&-1&+2\\-1&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&3&0\\1&-1&-2\\3&2&-1\end{pmatrix}}$$

2 a) $\begin{cases}x+2y+az=a\\x+ay+2z=a\\-x+y+z=1\end{cases}$ $A=\begin{pmatrix}1&2&a\\1&a&2\\-1&1&1\end{pmatrix}$, $\tilde{A}=\begin{pmatrix}1&2&a&a\\1&a&2&a\\-1&1&1&1\end{pmatrix}$

Rango de A

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&a\\1&a&2\\-1&1&1\end{vmatrix}=a+a-4+a^2-2-2=a^2+2a-8=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a=\begin{cases}-4\\2\end{cases}$$

Rango de $\tilde{A}$

$\boxed{a=-4}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 1 & -4 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_1+F_3]{-F_1+F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 0 & -6 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{2F_3+F_2}$

$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 0 & -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow$ rango $\tilde{A}=3$ y rango $A=2$ ya que $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \neq 0$

$\boxed{a=2}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-F_2+F_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ rango $\tilde{A}=2=$
$=$ rango A

Discusión:

Si $a \neq \begin{cases} -4 \\ 2 \end{cases}$, entonces rango $A=3=$ rango $\tilde{A}=$ nº incógnitas $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ (teorema de Rouché-Fröbenius) S.C.D.

Si $a=-4 \Rightarrow$ rango $A=2<3=$ rango $\tilde{A} \Rightarrow$ (t^a de Rouché-Fröbenius) S.I.

Si $a=2 \Rightarrow$ rango $A=2=$ rango $\tilde{A}<3 \Rightarrow$ (t^a de Rouché-Fröbenius) S.C.I.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-F_2+F_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-F_3+F_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ [1] \\ [2] \end{matrix}$

Llamamos $z=\lambda \in \mathbb{R}$

De [1]: $y+\lambda=1 \Rightarrow y=1-\lambda$

Sustituyendo en [2]: $x=1-(1-\lambda)-\lambda=0$

$\boxed{\text{Soluciones: } (x,y,z)=(0,1-\lambda,\lambda) \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}}$

3 a) $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{sen}(2x)}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(2x)-x}{x\operatorname{sen}(2x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=$

$\underset{\uparrow}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(2x)\cdot 2-1}{1\cdot\operatorname{sen}(2x)+x\cdot\cos(2x)\cdot 2}=+\infty$

regla de L'Hôpital

b) $f(x) = \begin{cases} 2^{x-1} & x \leq 1 \\ x-2 & 1 < x < 2 \\ \ln(x-1) & x \geq 2 \end{cases}$

Continuidad en $x=1$: ¿$\exists \lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$?

$$\lim_{x \to 1} f(x) \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} 2^{x-1} = 2^0 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} (x-2) = -1 \end{cases} \Rightarrow \nexists \lim_{x \to 1} f(x) \Rightarrow$$

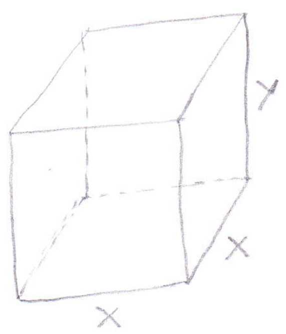
$\boxed{\text{f tiene en } x=1 \text{ una discontinuidad (no evitable) de salto finito } 1-(-1)=2}$

Continuidad en $x=2$: ¿$\exists \lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$?

$$\lim_{x \to 2} f(x) \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} (x-2) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} \ln(x-1) = \ln 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \exists \lim\limits_{x \to 2} f(x) = 0 \\ f(2) = \ln 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \boxed{\text{f es continua en } x=2}$

(4) a)



Planteamiento: $\begin{cases} x^2 y = 108 \\ S = x^2 + 4xy \end{cases}$

Como $x^2 y = 108 \Rightarrow y = \dfrac{108}{x^2}$

y sustituyendo

$$S = x^2 + 4x \frac{108}{x^2} = x^2 + \frac{432}{x} = f(x)$$

Hay que minimizar $f(x)$:

$$f'(x) = 2x - \frac{432}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - \frac{432}{x^2} = 0 \Rightarrow 2x^3 - 432 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{432}{2}} = 6 \quad \text{(posible extremo relativo)}$$

$$f''(x) = 2 + \frac{432 \cdot 2x}{x^4}$$

$f''(6) > 0 \Rightarrow x = 6$ es un mínimo relativo de f

$\boxed{\text{Las dimensiones de la caja son } 6 \times 6 \times \frac{108}{6^2} = 6 \times 6 \times 3 \text{ dm}}$

b) Recta tangente a $y = f(x)$ en $x = a$

$$y - f(a) = f'(a)(x-a)$$

En nuestro caso $a = 1$ y $f(x) = x^2 + x - 1$.

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1 \\ f'(x) = 2x + 1 \rightarrow f'(1) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{y - 1 = 3(x-1) \text{ recta tangente a } f(x) \text{ en } x = 1}$$

5 a) $$\boxed{\int \frac{-dx}{1+e^x}} = \left[\begin{array}{l} t = e^x \\ x = \log t \rightarrow dx = \frac{1}{t} dt \end{array}\right] = \int \frac{-dt}{(1+t)t} \overset{1}{=}$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{-1}{(1+t)t} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{t} = \frac{At + B(1+t)}{(1+t)t} \Rightarrow At + B(1+t) = -1$$

Para $t = -1$: $-A = -1 \Rightarrow A = 1$

$t = 0$: $B = -1$

Así: $$\frac{-1}{(1+t)t} = \frac{1}{1+t} - \frac{1}{t}$$

y, por tanto:

$$\overset{1}{=} \int \frac{dt}{1+t} - \int \frac{dt}{t} = \log|1+t| - \log|t| = \boxed{\log|1+e^x| - \log|e^x| + C}$$

b) Calculamos los puntos de corte de f y g:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow -x^2 + 2x + 4 = x + 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} -1 \\ 2 \end{cases}$$

Calculamos el área pedida:

$$\boxed{A} = \left| \int_{-1}^{2} (f(x) - g(x))\, dx \right| = \left| \int_{-1}^{2} [(-x^2 + 2x + 4) - (x+2)]\, dx \right| =$$

$$= \left| \int_{-1}^{2} (-x^2 + x + 2)\, dx \right| = \left| \left[\frac{-x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^{2} \right| =$$

$$= \left|\left(\frac{-8}{3} + 2 + 4\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right)\right| = \boxed{\frac{9}{2}\, u^2}$$

⑥ $\pi \equiv x + 2y - z - 4 = 0$, $r \equiv \begin{cases} x - 2y - 2 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases}$

a) $P(1,2,-1)$, ¿$d(P,\pi)$?

$$\boxed{d(P,\pi) = \frac{|1 + 2\cdot 2 - (-1) - 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}\, u}$$

b) Sea A el punto de intersección de r y π

$$A \equiv \begin{cases} x + 2y - z - 4 = 0 \\ x - 2y \quad\;\; - 2 = 0 \\ \quad\;\; y - z - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_1 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{4F_3 + F_2} \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} [1] \\ [2] \\ [3] \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{De [3]: } z = -2 \\ \text{Sustituimos en [2]: } y = \dfrac{-2+2}{-4} = 0 \\ \text{Sustituimos en [1]: } x = 2 \end{array}\right\} A(2,0,-2)$$

El área del triángulo es:

$$\boxed{A_{\text{TRIÁNGULO}}} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2}\left\| \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right\| =$$

$\overrightarrow{AB} = (-1,-1,4)$

$\overrightarrow{AC} = (-2,1,3)$

$$= \frac{1}{2}\|(-7,-5,-3)\| = \frac{1}{2}\sqrt{(-7)^2 + (-5)^2 + (-3)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{83} = \boxed{\frac{\sqrt{83}}{2}\, u^2}$$

⑦ a) $r \equiv \begin{cases} 2x - 2y = 4 \\ \qquad\;\; z = 0 \end{cases}$

$$s \equiv \frac{x}{3} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-1}{1} \equiv \begin{cases} \dfrac{x}{3} = \dfrac{y+2}{-2} \\[2ex] \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z-1}{1} \end{cases} \equiv \begin{cases} 2x + 3y = -6 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

Estudiamos los rangos de M y $\widetilde{M}$:

$$M=\begin{pmatrix}2&-2&0\\0&0&1\\2&3&0\\0&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{-F_1+F_3}\begin{pmatrix}2&-2&0\\0&0&1\\0&5&0\\0&1&2\end{pmatrix}\Rightarrow \text{rango } M=3$$

$$\tilde{M}=\begin{pmatrix}2&-2&0&4\\0&0&1&0\\2&3&0&-6\\0&1&2&0\end{pmatrix}\xrightarrow{-F_1+F_3}\begin{pmatrix}2&-2&0&4\\0&0&1&0\\0&5&0&-10\\0&1&2&0\end{pmatrix}\Rightarrow \text{rango } \tilde{M}=4$$

Como rango $M=3$ y rango $\tilde{M}=4 \Rightarrow$ $\boxed{r \text{ y } s \text{ se cruzan}}$

b) $\pi \equiv \begin{cases} P(-1,0,2) \\ \vec{u}_r=(-2,-2,0) \\ \vec{u}_s=(3,-2,1)\end{cases}$ ya que $\vec{u}_r=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&-2&0\\0&0&1\end{vmatrix}=-2\vec{i}-2\vec{j}=(-2,-2,0)$

$$\pi\equiv\det\begin{pmatrix}x+1&-2&3\\y&-2&-2\\z-2&0&1\end{pmatrix}=-2x+2y+10z-22=0 \Rightarrow$$

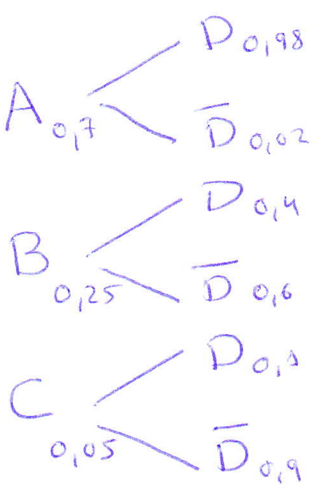
$$\Rightarrow \boxed{\pi \equiv -x+y+5z=11}$$

8 a) A = usuario de menos de 34 años

B = " " entre 34 y 54 años

C = " " más de 54 años

D = el usuario se conecta a diario



$a_1)$ $\boxed{P(\bar{D})}=P(A)P(\bar{D}/A)+P(B)P(\bar{D}/B)+$

$+P(C)P(\bar{D}/C)=0{,}7\cdot 0{,}02+0{,}25\cdot 0{,}6+0{,}05\cdot 0{,}9=$

$\boxed{=0{,}209}$

$a_2)$ $\boxed{P(B/D)}=\dfrac{P(B\cap D)}{P(D)}=\dfrac{P(B)P(D/B)}{1-P(\bar{D})}=$

$=\dfrac{0{,}25\cdot 0{,}4}{1-0{,}209}=\boxed{0{,}1264}$

b) X = tiempo que un usuario de Insta pasa conectado (a diario)

$X\sim N(53,10)$

b₁) $\boxed{P(X \geq 30) = P\left(Z \geq \frac{30-53}{10}\right) = P(Z \geq -2{,}3) = P(Z \leq 2{,}3) = 0{,}9893}$

b₂) $P(40 \leq X \leq 67) = P\left(\frac{40-53}{10} \leq X \leq \frac{67-53}{10}\right) =$

$= P(-1{,}3 \leq Z \leq 1{,}4) = P(Z \leq 1{,}4) - P(Z \leq -1{,}3) =$

$= P(Z \leq 1{,}4) - \left(1 - P(Z \leq 1{,}3)\right) = 0{,}9192 - (1 - 0{,}9032) =$

$= 0{,}8224$

$\boxed{\text{El } 82{,}24\% \text{ de los usuarios se conectan entre 40 y 67 minutos.}}$