Ejercicios finales: matrices

1. Resuelve la siguiente ecuación matricial, $A^{-1}X+B=C$, con $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

2. Despeja X de las siguientes ecuaciones matriciales:
a) $BXA^{-1}=B$ b) $BXA^{-1}=A^{-1}$

3. Comprueba que $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$, siendo $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -2 & -2 & 1\end{pmatrix}$.

4. Comprueba que $\left(A^{T}\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{T}$, siendo $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

5. Encuentra, razonadamente, una matriz cuadrada, simétrica ($A=A^{T}$), de orden 2, distinta de la identidad, cuyos elementos sean números naturales y tal que su inversa coincida con su traspuesta.

6. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}0 & 5\\ -4 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, ¿qué relación hay entre $A-B$ y $B-A$?

7. Calcula A^{n}, con $n\in\mathbb{N}$, en cada caso:
a) $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ d) $A=\begin{pmatrix}0 & a & 0\\ 0 & 0 & a\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ $\forall a\in\mathbb{N}$
b) $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ e) $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}$
c) $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 0\end{pmatrix}$ f) $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$

8. Expresa la condición que tienen que cumplir dos matrices M y N para que pueda realizarse su suma. Y, si lo que pretendemos es multiplicarlas, ¿qué condición deben cumplir las matrices?

9. Responde a estas preguntas.
a) ¿Existe siempre el producto $A^{T}A$, siendo A una matriz cualquiera? ¿Por qué?
b) ¿El producto de dos matrices simétricas de la misma dimensión es también una matriz simétrica? ¿Por qué?