UNIDAD 9:
DERIVADAS. APLICACIONES

1. INTRODUCCIÓN

Las aplicaciones de la derivada (la razón de cambio instantáneo, que indica cómo varía (de forma instantánea) el valor de la variable dependiente, según varía el valor de la variable independiente) son innumerables y aparecen no solo en matemáticas, sino en muchas otras ciencias (física, química, economía, arquitectura, ingeniería, ecología, medicina…)

Como la derivada de una función está sujeta a manipulaciones cada vez más complejas, es crucial saber con precisión cómo se define la derivada y cómo interactúa con otras operaciones matemáticas.

Aunque las aplicaciones físicas no se discuten explícitamente aquí, sí que daremos varias interpretaciones físicas de la derivada y responderemos a algunas cuestiones relativas a la relación entre la continuidad y la derivabilidad como son: ¿las funciones continuas son siempre derivables? Si no, ¿qué tan no derivable puede ser una función continua? ¿Son continuas las funciones derivables?

Además, veremos dos aplicaciones de las derivadas: la representación gráfica de una función (estudio global de la misma) y la resolución de problemas de optimización.

2. TASA DE VARIACIÓN

La razón de cambio promedio (o tasa de variación media) de $y = f(x)$ con respecto a *x* en el intervalo $[a, x]$ es:

$$\text{Razón de cambio promedio} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \equiv TVM\,[a, x]$$

Con frecuencia interesa considerar la razón de cambio en intervalos cada vez más pequeños. Esto lleva a definir lo que podemos llamar "razón de cambio puntual (o instantánea) de $y = f(x)$ con respecto a *x* en el punto *a*" como:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \equiv \text{Tvi}(a)$$

Ejemplos:

(1) El índice de la bolsa de Madrid pasó cierto año de 1350 a 1510 puntos. En este caso la *tasa de variación media mensual* es:

$$TVM = \frac{1510 - 1350}{12} = \frac{160}{12} = 13{,}33 \text{ puntos}$$

(2) La *tasa de variación media* $f(x) = x^2 - x$ en $[1, 4]$ es:

$$TVM\,[1,4] = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{12 - 0}{3} = 4$$

(3) Para estudiar como varía la velocidad en un intervalo de tiempo estudiamos su *velocidad media*, que no es más que la tasa de variación media de la posición respecto al tiempo.

$$v_m = \frac{\Delta e}{\Delta t}$$

Cuando la velocidad media es grande, la posición varía mucho para una variación de tiempo dada.

(4) *Segunda ley de Newton*. Para estudiar la fuerza aplicada a un cuerpo en un intervalo de tiempo estudiamos la tasa de variación media del momento lineal respecto al tiempo en ese intervalo. Cuando la fuerza aplicada en el intervalo es alta, el momento lineal varía mucho en ese intervalo de tiempo. Cuando la fuerza aplicada es pequeña, la variación del momento lineal también es pequeña.

3. CONCEPTO DE DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO Y DE FUNCIÓN DERIVADA. DERIVADAS LATERALES

En toda la unidad y salvo que expresamente se diga otra cosa, $D = (\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo abierto de números reales.

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función real de variable real y $a \in D$. Se llama derivada de la función f en el punto a al límite siguiente, si existe y es finito:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \qquad [1]$$

Dicho límite, caso de existir, se representa[1] por:

$$f'(a) = \frac{df(a)}{dx} = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=a}$$

$f'(a)$ se lee f prima en a (derivada de f en a)

$\frac{df(a)}{dx}$ se lee derivada de f respecto de x en a

Si en la definición anterior hacemos el cambio de variable $a + h = x$, el límite [1] se escribe como sigue:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad [2]$$

Los límites [1] y [2] son simplemente dos formulaciones "distintas" del concepto de derivada de una función en un punto. ¿Cuál usar entonces? La respuesta es que podemos usar una u otra indistintamente porque con ambas vamos a llegar al mismo resultado.

[1] La notación $\frac{d}{dx} f(a)$ fue introducida por Leibniz (1646-1716), y en ella se entiende que $\frac{d}{dx}$ es un operador, mientras que la notación $f'(a)$ fue introducida por Lagrange (1736-1813) y la notación $\dot{f}(a)$ se suele usar en física, ingeniería…

Ejemplos:

Calculamos la derivada de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $f(x)=x^5$ en $a=0$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^5-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}x^4=0$$

b) $f(x)=x^2+x+1$ en $a=0$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x+1-1}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x+1)}{x}=\lim_{x\to 0}(x+1)=1$$

c) $f(x)=x^2+1$ en $a=2$

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2+1-5}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+4h}{h}=\lim_{h\to 0}(h+4)=4$$

d) $f(x)=x^3$ en $a=1$

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^3-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^3+3h^2+3h}{h}=\lim_{h\to 0}(h^2+3h+3)=3$$

Ejercicios:

1. *Calcula la derivada de las siguientes funciones en los puntos que se indican:*

a) $f(x)=x^2$ *en* $a=1$

b) $f(x)=3x^2-2x+1$ en $a=2$

c) $f(x)=\dfrac{3}{x}$ en $a=2$

Si $B\subseteq D$, diremos que f <u>es derivable en</u> B cuando f sea derivable en todos los puntos de B. Sea $C=\{a\in D: f \text{ es derivable en } a\}$. Definimos la <u>función derivada de</u> f por:

$$f':C\to\mathbb{R}$$
$$a\in C\mapsto f'(a)$$

Ejercicios:

2. *Calcula la función derivada de* $f(x)=x^2$, $g(x)=2x^3-x^2+3x-1$ *y* $h(x)=\dfrac{3}{x}$

Una función $f:D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es

- <u>derivable por la izquierda[2] en $x=a$</u> $\Leftrightarrow \exists f_-'(a)\equiv f'(a-):=\lim_{x\to a-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\in\mathbb{R}$

---

[2] Esta definición es equivalente a la siguiente: Una función $f:D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es

- <u>derivable por la derecha en $x = a$</u> $\Leftrightarrow \exists f'_{+}(a) \equiv f'(a+) := \lim_{x\to a+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \in \mathbb{R}$

<u>Caracterización:</u>

Son equivalentes:

1) f es derivable en $x = a$
2) $\exists f'(a-), f'(a+)$ y $f'(a-) = f'(a+)$

En cuyo caso, $f'(a) = f'(a-) = f'(a+)$

<u>Ejemplos:</u>

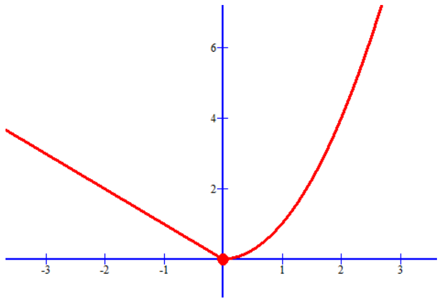
Vamos a estudiar la derivabilidad de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$ en $a = 0$

$$f'_{+}(0) = \lim_{x\to 0+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{x\to 0+} \frac{h^2}{h} = \lim_{x\to 0+} h = 0$$

$$f'_{-}(0) = \lim_{x\to 0-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{x\to 0-} \frac{-h}{h} = \lim_{x\to 0+} (-1) = -1$$

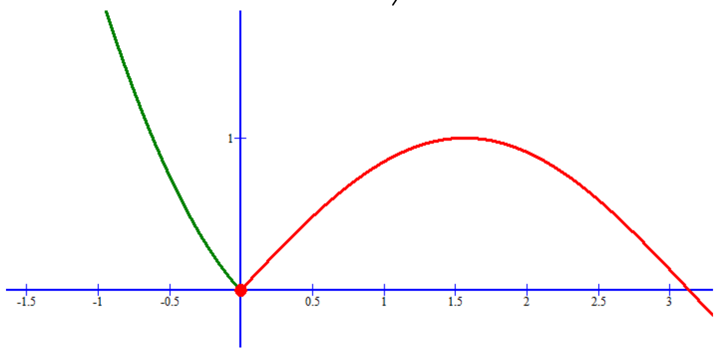
Las derivadas laterales en 0 existen, pero no son iguales, luego la función no es derivable en 0.



b) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ x^2 - x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$ en $a = 0$

$$f'_{+}(0) = \lim_{x\to 0+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{x\to 0+} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1$$

$$f'_{-}(0) = \lim_{x\to 0-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{x\to 0-} \frac{h^2-h}{h} = \lim_{x\to 0-} \frac{\cancel{h}(h-1)}{\cancel{h}} = -1$$



Las derivadas laterales en 0 existen, pero no son iguales, luego la función no es derivable en 0.

<u>derivable por la izquierda en $x = a$</u> $\Leftrightarrow \exists f'(a-) = \lim_{h\to 0-} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \in \mathbb{R}$

<u>derivable por la derecha en $x = a$</u> $\Leftrightarrow \exists f'(a+) = \lim_{h\to 0+} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \in \mathbb{R}$

Ejercicios:

3. *Indica en qué puntos es derivable la siguiente función y halla $f'(x)$:*

$$f(x)=\begin{cases} x^2+3x & \text{si } x\le 0 \\ x^3+3x & \text{si } 0<x<2 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$$

4. *Dada la función* $f(x)=\left|1-x^2\right|=\begin{cases} x^2-1 & x<-1 \\ 1-x^2 & -1\le x\le 1 \\ x^2-1 & x>1 \end{cases}$

Estudiar la continuidad, la derivabilidad y representarla gráficamente.

5. *Halla el valor de* a *para que* $f(x)$ *sea derivable en* $x=1$*, siendo*

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2 & \text{si } x\le 1 \\ ax+1 & \text{si } x>1 \end{cases}$$

6. *Consideremos la función* $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & 0<x<b \\ 1-\dfrac{1}{4}x & b\le x \end{cases}$

Se pide:

a) Determinar el valor de b para que sea continua.

b) ¿Es derivable f en el valor de b calculado en el apartado anterior?

Aunque lo más habitual es que los intervalos donde se estudie la derivabilidad sean abiertos y de hecho es en intervalos abiertos donde se obtienen las mejores propiedades de las funciones derivables, daremos la definición de función derivable en un intervalo cerrado $[\alpha,\beta]$, que es similar a la que dimos para funciones continuas en un tal intervalo.

Una función $y=f(x)$ es <u>derivable en</u> $[\alpha,\beta]$ cuando:

- sea derivable en (α,β)
- sea derivable por la derecha en α
- sea derivable por la izquierda en β

3.1. <u>Derivabilidad de las funciones elementales</u>

- Las **funciones polinómicas**,

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$$

son derivables en todos los puntos.

- Las **funciones racionales**, $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, son derivables en su dominio.

- La **función exponencial**, $y=e^{f(x)}$, es derivable siempre que lo sea $f(x)$.

- La **función logarítmica**, $y=\log f(x)$, es derivable en todo punto x, tal que $f(x)>0$ y $f(x)$ sea derivable.

- Las **funciones trigonométricas**, $y=\operatorname{sen} x$ e $y=\cos x$, son siempre derivables. La función $y=\operatorname{tg} x$ es derivable en su dominio: $\mathbb{R}-\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi \text{ con } k\in\mathbb{Z}\right\}$

- Las **funciones definidas a trozos** serán derivables si lo son en sus intervalos respectivos y en los puntos de unión. En estos puntos habrá que ver que la función esté definida y que las derivadas laterales existan y sean iguales.

4. PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES DERIVABLES

4.1. Continuidad y derivabilidad: relación

Propiedad 1: Si una función $f: D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es derivable en un punto a, entonces es continua en a.

Demostración:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)+f(a)\right]=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\lim_{x\to a}(x-a)+\lim_{x\to a} f(a)=$$

$$=f'(a)\cdot 0+f(a)=f(a)$$ C.Q.D.

El recíproco es falso:

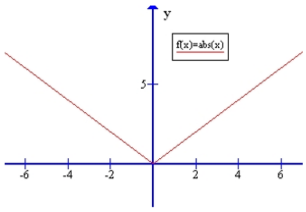
Contraejemplo: La función $f(x)=|x|$ es continua en $a=0$ pero no es derivable en dicho punto.

Continuidad en $a=0$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-}|x|=\lim\limits_{x\to 0-}(-x)=0\\ \lim\limits_{x\to 0+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+}|x|=\lim\limits_{x\to 0+} x=0\end{array}\right\}\Rightarrow \exists\lim_{x\to 0}|x|=0$$ y $f(0)=|0|=0$, luego $f(x)$ es continua en $a=0$.

Derivabilidad en $a=0$:

$$\left.\begin{array}{l}f'(0-)=\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{-x}{x}=-1\\ f'(0+)=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{x}{x}=1\end{array}\right\}\Rightarrow$$ no existe $f'(0)$ y, por tanto, $y=|x|$ no es derivable en $a=0$.



Resumiendo:

- *f* es continua en 0
- *f* no es derivable en 0
- La gráfica de *f* no tiene recta tangente en 0

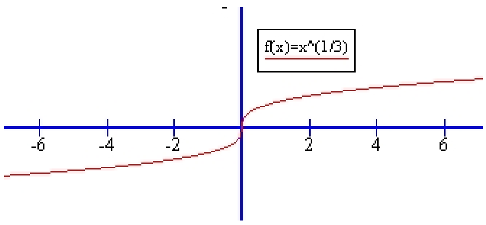
<u>Otro contraejemplo más</u>: La función $y = x^{1/3}$ es continua en $a = 0$ pero no es derivable en dicho punto.

Continuidad en $a = 0$:

$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x^{1/3} = 0 = f(0)$, luego $f(x)$ es continua en $a = 0$.

Derivabilidad en $a = 0$:

$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^{1/3} - 0}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^{2/3}} = \left[\frac{1}{0}\right] = +\infty \Rightarrow \nexists f'(0)$, y, por tanto, $y = x^{1/3}$ no es derivable en $a = 0$.



Resumiendo:

- *f* es continua en 0
- *f no* es derivable en 0

La gráfica de *f* tiene una recta tangente vertical en 0

Este resultado también se puede utilizar en *sentido negativo*:

<u>Propiedad 1':</u> Si f no es continua en a, entonces no puede ser derivable en dicho punto.

Como consecuencia, *siempre que nos pidan estudiar la derivabilidad de una función, comenzaremos por estudiar su continuidad.*

<u>Resumen:</u>

$$\boxed{f \text{ derivable en } a \Rightarrow f \text{ continua en } a}$$

$$\boxed{f \text{ NO continua en } a \Rightarrow f \text{ NO derivable en } a}$$

4.2. <u>Continuidad y acotación: relación</u>

<u>Propiedad:</u> Toda función derivable en a está acotada en a.

<u>Demostración:</u>

En efecto, si es derivable en a es continua en a, y por ser continua en a está acotada en a.

4.3. <u>Continuidad y convergencia: relación</u>

<u>Propiedad:</u> Toda función derivable en a es convergente en a.

Demostración:
En efecto, por ser derivable en a es continua en a, y como a no es un punto aislado, se deduce que es convergente en a.

5. OPERACIONES CON FUNCIONES DERIVABLES

5.1. Suma

La función derivada de una suma de funciones derivables es la suma de las funciones derivadas:

$$\boxed{(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)}$$

Demostración:
Si f y g son derivables en a, entonces:

$$(f+g)'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(a+h)-(f+g)(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)+g(a+h)-f(a)-g(a)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h)-g(a)}{h} = f'(a) + g'(a)$$

5.2. Producto de un número real por una función

La función derivada del producto de una constante por una función derivable es la constante por la función derivada de la función:

$$\boxed{(\alpha f)'(x) = \alpha \cdot f'(x)}$$

Demostración:
Si f es derivable en a y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces:

$$(\alpha f)'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{(\alpha f)(a+h)-(\alpha f)(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\alpha f(a+h)-\alpha f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\alpha \cdot \left[f(a+h)-f(a)\right]}{h} =$$

$$= \alpha \cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \alpha \cdot f'(a)$$

5.3. Producto de funciones

La función derivada de un producto de funciones derivables es igual a la derivada del primer factor por el segundo sin derivar más el primer factor si derivar por la derivada del segundo factor:

$$\boxed{(f\cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}$$

Demostración:
Si f y g son derivables en a, entonces:

$$(fg)'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{(fg)(a+h)-(fg)(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a)}{h} =$$

$$\underset{[1]}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a+h)+f(a)g(a+h)-f(a)g(a)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left[f(a+h)-f(a)\right]g(a+h)+f(a)\left[g(a+h)-g(a)\right]}{h} =$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}g(a+h)+\lim_{h\to 0}f(a)\frac{g(a+h)-g(a)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}g(a+h)+f(a)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}=$$

$$=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$$

donde en [1] hemos sumado y restado $f(a)g(a+h)$.

5.4. <u>Función recíproca de una función</u>

La derivada de la función recíproca de una función derivable viene dada por:

$$\boxed{\left(\frac{1}{f}\right)'(x)=\frac{-f'(x)}{f(x)^2}}$$

<u>Demostración:</u>
Si f es derivable en a, entonces:

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{1}{f}\right)(a+h)-\left(\frac{1}{f}\right)(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{f(a+h)}-\frac{1}{f(a)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a)-f(a+h)}{h\cdot f(a+h)\,f(a)}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(-\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{1}{f(a+h)\,f(a)}=-f'(a)\cdot\frac{1}{f^2(a)}=-\frac{f'(a)}{f^2(a)}$$

5.5. <u>Cociente de funciones</u>

La función derivada de un cociente de funciones derivables es igual al cociente de la derivada del numerador por el denominador sin derivar menos el numerador sin derivar por la derivada del denominador, entre el denominador al cuadrado:

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}}$$

<u>Demostración:</u>
Si f y g son derivables en a, entonces:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a)=\left(f\cdot\frac{1}{g}\right)'(a)=f'(a)\frac{1}{g(a)}+f(a)\left(\frac{-g'(a)}{g^2(a)}\right)=\frac{f'(a)f(a)-f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$

5.6. <u>Composición de funciones: regla de la cadena</u>

Sean $f:A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:B\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funciones reales de variable real con $f(A)\subseteq B$. Supongamos que *f* es derivable en *a* y que *g* es derivable en $b=f(a)$. Entonces:

$$\boxed{(g\circ f)'(a)=g'(f(a))\,f'(a)}$$

<u>Demostración:</u>

$$(g\circ f)'(a)=\lim_{x\to a}\frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{g(f(a))-g(f(a))}{x-a}\underset{[1]}{=}$$

$$=\lim_{x\to a}\left(\frac{g\left(f(x)\right)-g\left(f(a)\right)}{f(x)-f(a)}\cdot\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{g\left(f(x)\right)-g\left(f(a)\right)}{f(x)-f(a)}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=g'\left(f(a)\right)\cdot f'(a)$$

donde en [1] hemos multiplicado y dividido por $f(x)-f(a)$, que sabemos que es distinto de cero.

6. TABLAS DE DERIVADAS

A modo de ejemplo calcularemos las funciones derivadas de algunas funciones elementales. A la vez que practicamos el cálculo de derivadas aplicando la definición, también nos sirve para construir la conocida tabla de derivadas y que esta no aparezca como por arte de magia.

1) La función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=c$ es derivable en cualquier punto $a\in\mathbb{R}$. Su derivada viene dada por:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{c-c}{x-a}=0$$

2) La función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x$ es derivable en cualquier punto $a\in\mathbb{R}$ y su derivada es:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x-a}{x-a}=1$$

3) La función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^n$ es derivable en cualquier punto $a\in\mathbb{R}$. Para calcular su función derivada utilizaremos la fórmula del binomio de Newton:

$$f'(a)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{(a+h)^n-a^n}{h}=$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\cancel{\binom{n}{0}a^n}h^0+\binom{n}{1}a^{n-1}h+\ldots+\binom{n}{n-1}ah^{n-1}+\binom{n}{n}a^0h^n-\cancel{a^n}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{na^{n-1}h+\binom{n}{2}a^{n-2}h^2+\ldots+\binom{n}{n-1}ah^{n-1}+\binom{n}{n}ah^n}{h}=$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\cancel{h}\left[na^{n-1}+\binom{n}{2}a^{n-2}h+\ldots+\binom{n}{n-1}ah^{n-2}+\binom{n}{n}ah^{n-1}\right]}{\cancel{h}}=na^{n-1}$$

4) La función $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x}$, es derivable en cualquier $a\in(0,+\infty)$. Su derivada es:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}{(x-a)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{a}\right)^2}{(x-a)\left(\sqrt{x}-\sqrt{a}\right)}=\lim_{x\to a}\frac{\cancel{(x-a)}}{\cancel{(x-a)}\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}=\lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}$$

5) La función exponencial $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^x$, es derivable en cualquier $a\in\mathbb{R}$.

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{a+h}-e^a}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^a\left(e^h-1\right)}{h}=e^a$$

teniendo en cuenta que

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$$

6) La función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\operatorname{sen}x,$ es derivable en cualquier $a\in\mathbb{R}$.

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(a+h)-\operatorname{sen}a}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{h}{2}}{h}=\cos a$$

donde hemos tenido en cuenta que

$$\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}y=2\cos\frac{x+y}{2}\operatorname{sen}\frac{x-y}{2}$$

y que

$$\lim_{h\to 0}\frac{sen\,{}^{h}\!/_{2}}{{}^{h}\!/_{2}}=1$$

7) La función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\cos x,$ es derivable en cualquier $a\in\mathbb{R}$. Su función derivada se puede obtener teniendo en cuenta que $\cos x=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\quad\forall x\in\mathbb{R}$ y aplicando la regla de la cadena:

$$f'(a)=-\operatorname{sen}a$$

8) La función $\begin{array}{l}\operatorname{tg}:\mathbb{R}-\left\{k\pi+\frac{\pi}{2}:k\in\mathbb{Z}\right\}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\operatorname{tg}x\end{array}$ es derivable en cualquier punto de su dominio y su derivada viene dada por:

$$\operatorname{tg}'x=\left(\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}\right)'(x)=\frac{\cos x\cos x-\operatorname{sen}x(-\operatorname{sen}x)}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=$$

$$=1+\operatorname{tg}^2x=\sec^2 x$$

9) La función $\begin{array}{l}\log_a:(0,+\infty)\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\log_a x\end{array}$ es derivable en cualquier $x_0\in(0,+\infty)$. Su función derivada viene dada por:

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x_0+h)-\log_a x_0}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a\frac{x_0+h}{x_0}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{h}{x_0}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{x_0}{x_0}\log_a\left(1+\frac{h}{x_0}\right)=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{x_0}\log_a\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{h}}=\frac{1}{x_0}\log_a\left(\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{h}}\right)=$$

$$=\frac{1}{x_0}\log_a\left(\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{1}{\frac{x_0}{h}}\right)^{\frac{x_0}{h}}\right)=\frac{1}{x_0}\log_a e$$

En particular la función $\begin{array}{l}\log_e:(0,+\infty)\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\log_e x\equiv\ln x\end{array}$ es derivable en cualquier $x_0\in(0,+\infty)$, y su derivada viene dada por: $\ln' x=\dfrac{1}{x}$

Tabla de derivadas (de funciones simples)

Función	Derivada
$y=c\in\mathbb{R}$	$y'=0$
$y=x$	$y'=1$
$y=x^n$	$y'=nx^{n-1}$
$y=\sqrt{x}$	$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$y=\sqrt[n]{x}$	$y'=\dfrac{1}{n\cdot\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$y=a^x$ con $a>0$	$y'=a^x\ln a$
$y=e^x$	$y'=e^x$
$y=\log_a x$	$y'=\dfrac{1}{x}\log_a e$
$y=\ln x$	$y'=\dfrac{1}{x}$

$y=\text{sen}\,x$	$y'=\cos x$
$y=\cos x$	$y=-\ \text{sen}\,x$
$y=\text{tg}\,x$	$y'=1+\text{tg}^2 x$
$y=\text{arcsen}\ x$	$y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y=\text{arccos}\ x$	$y'=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y=\text{arctg}\,x$	$y'=\dfrac{1}{1+x^2}$

<u>Ejercicio:</u>

7. *Calcula la derivada de las siguientes funciones:*

1) $f(x)=7x^5-2x^3+3x^2-4$
2) $f(x)=5x^4+3x^2+2x-7$
3) $f(x)=(3x-1)(5x^2+3x-2)$
4) $f(x)=\dfrac{4x^2+1}{7x+1}$
5) $f(x)=x-\dfrac{1}{x}+\sqrt[3]{x}$
6) $f(x)=(x-\sqrt{x})(x+\sqrt{x})$
7) $f(x)=\dfrac{(3x-1)(2x+3)}{x^2+7}$
8) $f(x)=(5x^2-3x+1)\dfrac{2x}{5x+3}$
9) $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt[5]{x^3}+\sqrt{x^5}$
10) $f(x)=\dfrac{(3x-1)^2-(3x+1)^2}{2-x^2}$
11) $f(x)=\dfrac{1}{3x^2-5x+2}$
12) $f(x)=\dfrac{1}{5x-3}(3x^2-x+2)$
13) $f(x)=(x^2+3x)\text{sen}\,x$
14) $f(x)=3^x$
15) $f(x)=\dfrac{x\,\text{tg}\,x}{x+1}$
17) $f(x)=\text{tg}\,x\,\text{sen}\,x$
18) $f(x)=\cos x\,\text{tg}\,x$
19) $f(x)=e^x\ \text{tg}\,x$
20) $f(x)=2^x\ln x$
21) $f(x)=e^x\log_{10}x$
22) $f(x)=\log_5 x\cos x$
23) $f(x)=\dfrac{\text{sen}\,x}{\text{tg}\,x}$
24) $f(x)=\dfrac{2^x}{\ln x}$
25) $f(x)=\dfrac{x^2}{\ln x}$
26) $f(x)=\text{sen}\,x\cos x$
27) $f(x)=\text{sen}\,x+e^x\ \text{sen}\,x$
28) $f(x)=\dfrac{\cos x}{\text{sen}\,x+\cos x}$
29) $f(x)=\dfrac{3^x\ \text{sen}\,x}{2x+e^x}$
30) $f(x)=\log_5 x\log_7 x$
31) $f(x)=e^x\ \text{sen}\,x$

16) $f(x)=\dfrac{(x^2-3x+2)\text{sen } x}{1+\text{tg } x}$ 32) $f(x)=5^x$

Aplicando la regla de la cadena, obtenemos la siguiente tabla de derivadas para funciones compuestas:

Tabla de derivadas, para funciones compuestas:

Función	**Derivada**
$y=f(x)^n$	$y'=n\cdot f(x)^{n-1}\cdot f'(x)$
$y=\sqrt{f(x)}$	$y'=\dfrac{f'(x)}{2\cdot\sqrt{f(x)}}$
$y=\sqrt[n]{f(x)}$	$y'=\dfrac{f'(x)}{n\cdot\sqrt[n]{f(x)^{n-1}}}$
$y=a^{f(x)}$ con $a>0$	$y'=f'(x)\cdot a^{f(x)}\cdot\ln a$
$y=e^{f(x)}$	$y'=f'(x)\cdot e^{f(x)}$
$y=\log_a f(x)$	$y'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}\cdot\log_a e$
$y=\ln f(x)$	$y'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$
$y=\text{sen } f(x)$	$y'=f'(x)\cdot\cos f(x)$
$y=\cos f(x)$	$y=-f'(x)\cdot\text{sen } f(x)$
$y=\text{tg } f(x)$	$y'=f'(x)\cdot\left[1+\text{tg}^2 f(x)\right]$
$y=\text{arcsen } f(x)$	$y'=\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$
$y=\text{arccos} f(x)$	$y'=\dfrac{-f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$
$y=\text{arctg } f(x)$	$y'=\dfrac{f'(x)}{1+f(x)^2}$

Ejercicios:

8. *Calcula la derivada de las siguientes funciones:*

1) $f(x)=\text{sen }(2x^2-3x)$ 13) $f(x)=(x^2+1)^5$

2) $f(x)=\ln(3x+1)$
3) $f(x)=e^{5x}$
4) $f(x)=\text{tg}\,(2-3x)$
5) $f(x)=(x^2-5x+2)^7$
6) $f(x)=e^{\text{sen}\,x}$
7) $f(x)=3^{1+\text{sen}\,x+\cos x}$
8) $f(x)=\log_7(4+\text{sen}\,x)$
9) $f(x)=\text{sen}^2 x$
10) $f(x)=\text{tg}^3 x$
11) $f(x)=3^{x^2+2}\,\text{sen}\,x$
12) $f(x)=(3x^2-2)\,\text{sen}\,(5x)$
14) $f(x)=\text{sen}^3 x$
15) $f(x)=\text{sen}\,(x^3)$
16) $f(x)=\text{sen}^2 x\cos^2 x$
17) $f(x)=\dfrac{\text{sen}\,(5x+2)}{\cos\,(3x-1)}$
18) $f(x)=e^{\text{sen}\,x}\cos x$
19) $f(x)=\log_5(3x+1)$
20) $f(x)=\ln(\text{tg}\,x)$
21) $f(x)=\text{sen}\,(\cos(3x))$
22) $f(x)=\sqrt{5x^2-3x+2}$
23) $f(x)=\sqrt[3]{(3-2x^2)^2}$
24) $f(x)=\sqrt[4]{x^2-3x+1}$

9. *Halla la función derivada de las siguientes funciones:*

1) $f(x)=3x^2-6x+5$
2) $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}$
3) $f(x)=\sqrt{2x}+\sqrt[3]{5x}$
4) $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$
5) $f(x)=\text{sen}\,x\cos x$
6) $f(x)=\text{tg}\,x$
7) $f(x)=xe^x$
8) $f(x)=x2^x$
17) $f(x)=\cos(3x-\pi)$
18) $f(x)=\sqrt{1+2x}$
19) $f(x)=\text{sen}\,(3x+1)\cos(3x+1)$
9) $f(x)=(x^2+1)\log_2 x$
10) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$
11) $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2-5x+3}{x}$
13) $f(x)=\text{sen}\,(x^2-5x+7)$
14) $f(x)=\sqrt[3]{(5x+3)^2}$
15) $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$
16) $f(x)=\dfrac{\log x^2}{x}$
16) $f(x)=\dfrac{\log x^2}{x}$
20) $f(x)=\dfrac{\text{sen}\,(x^2+1)}{\sqrt{1-x^2}}$
21) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$
22) $f(x)=xe^{2x+1}$

7. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

Si f es continua en x_0, la recta tangente a la gráfica de f en el punto $P(x_0, f(x_0))$ es:

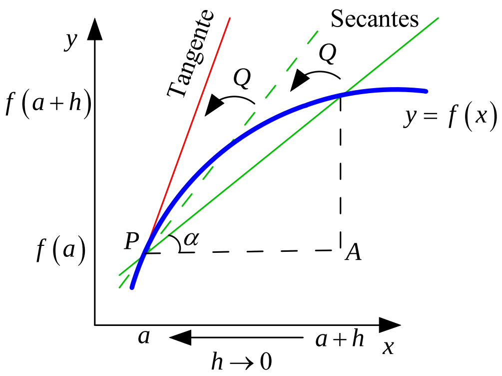
i) la recta que pasa por P y tiene pendiente

$$m(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

si este límite existe.

ii) la recta $x=x_0$ si $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\infty$

Aclaración: esta definición proviene del hecho de que la recta tangente a una función en un punto x_0 es el límite de la recta secante a la función, cuando el otro punto de corte de la recta secante y la función tiende a x_0.



Sea $f:D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función continua y

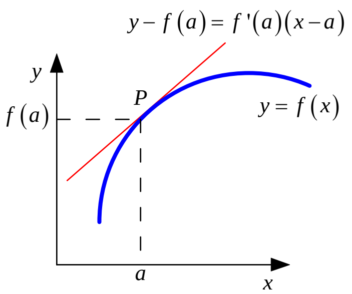
$P=(a, f(a))$, $Q=(a+h, f(a+h))$

dos puntos de su gráfica. Geométricamente se tiene que

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\text{tg }\alpha=m_{\text{secantes}}$$

que es el valor que mide la pendiente de la recta secante en los puntos P y Q a la curva.

Tomando límites en la igualdad anterior resulta:



$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\text{tg}\,\alpha=\lim_{h\to 0}m_{\text{secantes}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(a)=\text{tg}\,\alpha=m_{\text{secantes}}$$

es decir, *la derivada de una función en un punto es igual a la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto.*

Como **consecuencia**:

Ecuación de la recta tangente a la curva $y=f(x)$ en $(a, f(a))$:

$$\boxed{y-f(a)=f'(a)(x-a)}$$

Ecuación de la recta normal a la curva $y=f(x)$ en $(a, f(a))$:

$$\boxed{y-f(a)=\frac{-1}{f'(a)}(x-a)}$$

Ejercicios:

10. *Halla la ecuación de la recta tangente a* $f(x)=x^3$ *en el punto de abscisa* $x=-1$.

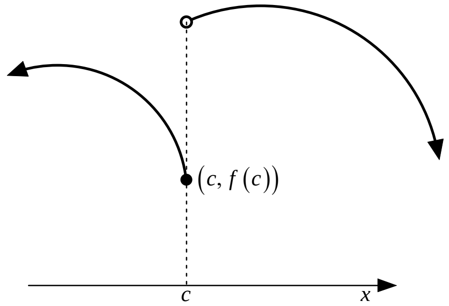
11. *Calcula las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la función* $f\left(x\right)=\dfrac{4}{x^2}$ *en el punto de abscisa* $x=2$.

12. *Calcula las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la función* $f\left(x\right)=\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ *en el punto de abscisa* $x=\dfrac{\pi}{2}$.

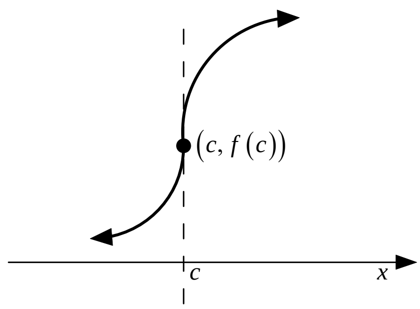
13. *Halla la ecuación de la recta tangente a* $f\left(x\right)=2x^3-x^2$ *en el punto de abscisa* $x=3$.

14. *Dada* $f\left(x\right)=x^2-10x+9$, *halla el punto en el que la recta tangente a la gráfica de* f *es paralela al eje de abscisas.*

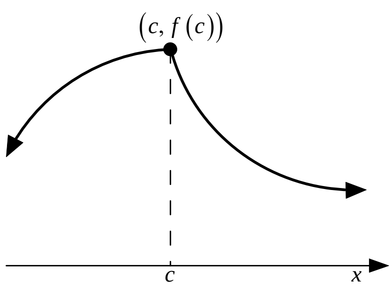
Gráficamente las <u>*situaciones en las que una función no es derivable*</u> en un punto son:



f no es continua en $c \Rightarrow$
$\Rightarrow$ f no es derivable en c



f es continua en c, pero la gráfica de f tiene una recta tangente vertical en c $\Rightarrow$ f no es derivable en c



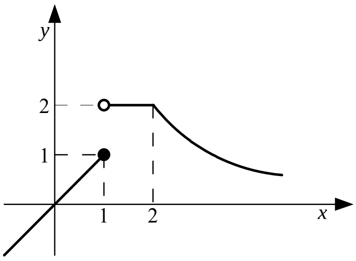
f es continua en c, pero la gráfica de f no tiene recta tangente en c (ya que tiene un pico) $\Rightarrow$ f no es derivable en el punto c

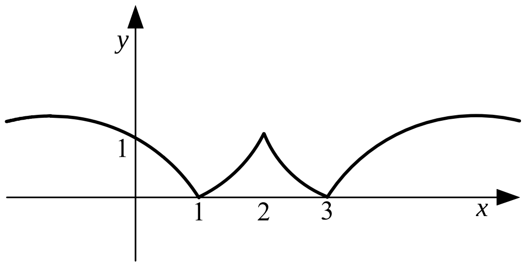
Los puntos en los que la gráfica de la función tiene picos se denominan **puntos angulosos**, y en ellos se verifica:

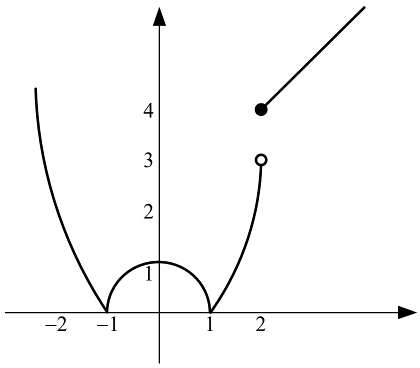
$$f'\left(x_0-\right)\neq f'\left(x_0+\right)$$

Ejercicios:

15. *Señala en qué puntos no son derivables las siguientes funciones:*







16. *Indica los puntos en los que las siguientes funciones no son derivables:*

a) $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{si } x>0 \\ x+1 & \text{si } x\le 0 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x>0 \\ -x+1 & \text{si } x\le 0 \end{cases}$

c) $f(x)=|\operatorname{sen} x|$

d) $f(x)=\begin{cases} |x^2-1| & \text{si } x<2 \\ x+2 & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$

8. DERIVADAS SUCESIVAS

Sea *I* un intervalo y f una función derivable en *I*. Si f' es derivable en $a\in I$, a la derivada $(f')'(a)$ se le llama derivada segunda de f en a y se designa por $f''(a)$.

Si $\forall x\in I$ existe $f''(x)$, la función $x\mapsto f''(x)$ se llama función derivada segunda de f en I.

En general, definidas las funciones $f',\dots,f^{n)}:I\to\mathbb{R}$, de tal modo que $f^{k)}=\left(f^{k-1)}\right)'$, para $k=2,\dots,n-1$, diremos que $f^{k)}$ es la <u>función derivada *k*-ésima</u> (o derivada de orden *k*) de f en I.

Ejercicio:

17. *Calcula las derivadas segunda y tercera y de cada una de las siguientes funciones:*

a) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ *c)* $h(x)=\cos^2 x$

b) $g(x)=\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ *d)* $i(x)=e^{x^2}$

9. ESTUDIO GLOBAL Y LOCAL DE FUNCIONES

9.1. Monotonía de una función

Recordemos que salvo que expresamente se diga lo contrario, el conjunto D es un intervalo abierto.

Una función $f: D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es creciente (resp. decreciente) en D cuando para cualesquiera $x,y\in D$ en la situación $x<y$, se verifica que $f(x)\leq f(y)$ (respectivamente $f(x)\geq f(y)$).

Una función $f: D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es estrictamente creciente (resp. estrictamente decreciente) en D cuando para cualesquiera $x,y\in D$ en la situación $x<y$, se verifica que $f(x)<f(y)$ (respectivamente $f(x)>f(y)$).

Criterio: de la derivada primera
Si $f: D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es derivable en D, y:

$$\boxed{f'(x)\begin{cases} >0 & \forall x\in D\Rightarrow f \text{ es estrictamente creciente en } D\\ <0 & \forall x\in D\Rightarrow f \text{ es estrictamente decreciente en } D\end{cases}}$$

Diremos que una función es monótona, cuando sea creciente o decreciente y estrictamente monótona, cuando sea estrictamente creciente o estrictamente decreciente.

Por tanto, **estudiar la monotonía de una función es estudiar el signo de** f'.

Ejercicio:

18. *Estudia la monotonía de las siguientes funciones:*

a) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}$ c) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x+1}$

b) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-9}$ d) $f(x)=\ln\sqrt{x^2+1}$

9.2. Extremos relativos (extremos locales o puntos críticos)

Se dice que $f: D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tiene un máximo (resp. mínimo) relativo en x_0 si $\exists E(x_0)$: $x\in E(x_0)\Rightarrow f(x)\leq f(x_0)$ (resp. $f(x)\geq f(x_0)$).

Las coordenadas del máximo (resp. mínimo) relativo son $(x_0, f(x_0))$.

Condición necesaria para la existencia de extremos relativos en funciones derivables:

Sea $f: D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función derivable en x_0 y supongamos que f tiene un extremo relativo en x_0. Entonces: $f'(x_0)=0$

Contraejemplo: *El recíproco no es cierto.*
La función $f(x)=x^3$ es derivable y $f'(0)=0$, y sin embargo, no tiene un extremo relativo en el origen, ya que es siempre creciente.

Condición necesaria y suficiente para que una función derivable posea un extremo relativo en un punto

Sea $f: D\subseteq\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ una función dos veces derivable en x_0 y supongamos que

1) $f'(x_0)=0$
2) $f''(x_0)\neq 0$

Entonces, $f(x)$ posee un extremo relativo en x_0, que es un $\begin{cases}\text{máximo relativo si } f''(x_0)<0\\ \text{mínimo relativo si } f''(x_0)>0\end{cases}$

Ejercicio:

19. *Halla, caso de que los tenga, los extremos relativos de las funciones del ejercicio anterior.*

Este **criterio** nos servirá en la mayoría de los casos, pero hay otro más **general** que es importante conocer:

Sea $f: D\subseteq\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ una función $(n-1)-$veces derivable en x_0 y supongamos que

1) $f'(x_0)=f''(x_0)=f'''(x_0)=...=f^{n-1)}(x_0)=0$
2) $f^{n)}(x_0)\neq 0$

Entonces, si n es par, $f(x)$ posee un extremo relativo en x_0, que es un

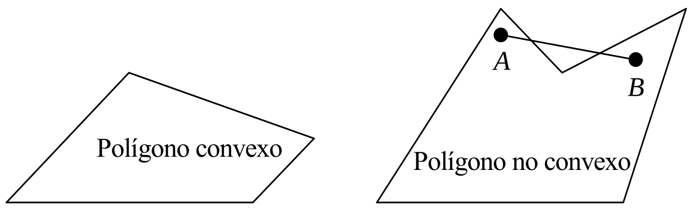
$$\begin{cases}\text{máximo relativo si } f^{n)}(x_0)<0\\ \text{mínimo relativo si } f^{n)}(x_0)>0\end{cases}$$

y si n es impar, entonces f no tiene un extremo relativo en el punto x_0.

9.3. Curvatura de una función: puntos de inflexión

9.3.1. Definición no rigurosa de convexidad

Una figura o región del plano es convexa si al tomar dos puntos cualesquiera de ella, el segmento que los une está completamente incluido en la figura. En caso contrario se dice que la figura o región es cóncava.



Una función es convexa[3] en un intervalo si la tangente a dicha función en cualquier punto del intervalo queda por debajo de la gráfica; si queda por encima se dirá que la función es cóncava.

Los puntos en los que la tangente a la gráfica atraviesa a la función, se llaman puntos de inflexión.

9.3.3. Criterio de la derivada segunda

Criterio para estudiar la curvatura de una función:

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable en D.

$$\text{Si } f''(x_0) \begin{cases} > 0 & \forall x_0 \in D \Rightarrow f \text{ es convexa en } D \\ < 0 & \forall x_0 \in D \Rightarrow f \text{ es cóncava en } D \end{cases}$$

Criterio para estudiar los puntos de inflexión de una función:

Los puntos en los que una función pasa de cóncava a convexa o de convexa a cóncava se llaman *puntos de inflexión*.

Condición necesaria: Si f es dos veces derivable en x_0 y x_0 es un punto de inflexión, entonces $f''(x_0) = 0$.

Condición necesaria y suficiente: Si f es tres veces derivable en x_0, $f''(x_0) = 0$ y $f'''(x_0) \neq 0$, entonces f tiene un punto de inflexión en x_0.

Si x_0 es un punto de inflexión de f, las coordenadas de dicho punto de inflexión son $(x_0, f(x_0))$.

Por tanto, **estudiar la curvatura de una función es estudiar el signo de la derivada segunda,** f''

Ejercicio:

20. *Estudia la curvatura de las funciones del ejercicio 18.*

10. APLICACIONES

10.1. Representación gráfica de funciones

Para representar gráficamente una función seguiremos los siguientes pasos:

1º) DOMINIO Y RECORRIDO

$\text{Dom}(f) = \{$números x para los que $f(x)$ tiene sentido$\}$

$\text{Img}(f) = \{y : \exists x \text{ de forma que } y = f(x)\}$

2º) SIMETRÍAS

a) **Función par**: $f(-x) = f(x) \Leftrightarrow f(x)$ es simétrica respecto del eje OY

[3] ¡¡Ojo!! Al consultar la bibliografía es posible encontrar libros donde llaman función cóncava a lo que nosotros llamamos función convexa. Lo importante es su significado, no el nombre que se le de. Sin embargo, no he encontrado ni un solo libro de texto que no sea de bachillerato en el que la función $y = x^2$ sea cóncava.

b) **Función impar**: $f(-x) = -f(x) \Leftrightarrow f(x)$ es simétrica respecto del origen, es decir, si giramos 180º la gráfica obtenemos la misma función.

3º) PERIODICIDAD

$y = f(x)$ es periódica de período $T \Leftrightarrow f(x+T) = f(T)$ y T es el menor de los números que cumplen dicha condición.

4º) PUNTOS DE CORTE CON LOS EJES

a) **Corte(s) con el eje *OX*:** $y = 0 \Rightarrow f(x) = 0$ → Ninguno, uno o más puntos

b) **Corte con el eje OY :** $x = 0 \Rightarrow f(0) = y$ → Ninguno o un punto

5º) REGIONES DE EXISTENCIA

a) Intervalos de positividad

$f(x) > 0 \Rightarrow$ gráfica por encima del eje OX

b) Intervalos de negatividad

$f(x) < 0 \Rightarrow$ gráfica por debajo del eje OX

Para determinar las regiones de existencia de la función $y = f(x)$ hay que estudiar el signo de $f(x)$.

6º) ASÍNTOTAS

a) Asíntotas verticales

La recta $x = a$ es una asíntota vertical de $y = f(x)$ si existe alguno de los siguientes límites:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x\to a+} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x\to a-} f(x) = \pm\infty$$

Observaciones:
(1) Una función puede tener infinitas asíntotas verticales.
(2) La gráfica ele la función no puede cortar a las asíntotas verticales.

b) Asíntotas horizontales

La recta $y = k$ es una asíntota horizontal de $f(x)$ si existe alguno de los siguientes límites:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = k \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = k$$

Observaciones:
(1) Una función tiene corno máximo dos asíntotas horizontales.
(2) La gráfica de la función puede cortar a las asíntotas horizontales.

c) Asíntotas oblicuas

La recta $y = mx + n$, $m \neq 0$, es una asíntota oblicua de $f(x)$ si existe alguno de los siguientes límites:

$$\lim_{x\to -\infty} (f(x) - mx - n) = 0 \qquad \lim_{x\to +\infty} (f(x) - mx - n) = 0$$

en cuyo caso $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ y $n = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - mx)$

Observaciones:
(1) Una función puede tener como máximo dos asíntotas oblicuas.
(2) Si una función tiene asíntota oblicua no tiene asíntota horizontal y recíprocamente.

(3) La gráfica de la función puede cortar a las asíntotas oblicuas en uno o varios puntos.

7º) PUNTOS DE DISCONTINUIDAD

$f(x)$ es continua en $x = a$ cuando $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, y por tanto la función $y = f(x)$ presenta discontinuidad en un punto cuando o no existe el límite de la función en dicho punto o cuando ese límite no coincide con el valor que toma la función en él. [**Tener en cuenta el criterio de la UCLM para la EvAU**].

8º) MONOTONÍA

a) **Intervalos de crecimiento**: $f'(x) > 0$ para todos los x del intervalo

b) **Intervalos de decrecimiento**: $f'(x) < 0$ para todos los x del intervalo

c) **Puntos críticos (extremos relativos)**:

$x = a$ es un posible máximo o mínimo de $f(x)$ si $f'(a) = 0$

Si $f''(a) > 0$, entonces $f(x)$ tiene en $x = a$ un mínimo

Si $f''(a) < 0$, entonces $f(x)$ tiene en $x = a$ un máximo

Para determinar la monotonía de la función hay que estudiar el signo de $f'(x)$.

9º) CURVATURA

a) **Intervalos de convexidad**: $f''(x) > 0$ para todos los x del intervalo

b) **Intervalos de concavidad**: $f''(x) < 0$ para todos los x del intervalo

c) **Puntos de inflexión**:

$x = a$ es un posible punto de inflexión de $f(x)$ si $f''(a) = 0$

Si $f'''(a) > 0$, entonces *f(x)* tiene en $x = a$ un punto de inflexión cóncavo-convexo

Si $f'''(a) < 0$, entonces *f(x)* tiene en $x = a$ un punto de inflexión convexo-cóncavo

Para determinar la curvatura de la función hay que estudiar el signo de $f''(x)$.

10.1.1. Ejemplos resueltos de representación gráfica de funciones

1.	Representa gráficamente la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$.

Dominio:

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{\text{puntos que anulan el denominador}\}$

$$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1,\ 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1,\ 1) \cup (1, +\infty)$

Simetrías:

$f(-x) = \dfrac{(-x)^2}{(-x)^2 - 1} = \dfrac{x^2}{x^2 - 1} = f(x) \Rightarrow f(x)$ es par, es decir, simétrica respecto del eje *OY*.

Periodicidad:

Esta función no es periódica

Puntos de corte con los ejes de coordenadas:

- Con *OX*

$$y=0\Rightarrow \frac{x^2}{x^2-1}=0\Rightarrow x^2=0\Rightarrow x=0\rightarrow(0,\ 0)$$

- Con *OY*

$$x=0\Rightarrow y=\frac{0^2}{0^2-1}=0\rightarrow(0,\ 0)$$

Regiones de existencia:

- Intervalos de positividad

$$f(x)>0\Leftrightarrow x^2-1>0\Leftrightarrow x^2>1\Leftrightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\rightarrow(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$$

- Intervalos de negatividad

$$f(x)<0\Leftrightarrow x^2-1<0\Leftrightarrow x^2<1\Leftrightarrow x\in(-1,1)\rightarrow(-1,1)$$

Asíntotas:

- Asíntotas verticales

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\infty \text{ con } \begin{cases}\lim\limits_{x\to 1-} f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 1+} f(x)=+\infty\end{cases}\Rightarrow x=1 \text{ es una asíntota vertical}$$

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\infty \text{ con } \begin{cases}\lim\limits_{x\to -1-} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to -1+} f(x)=-\infty\end{cases}\Rightarrow x=-1 \text{ es una asíntota vertical}$$

- Asíntotas horizontales

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^2-1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}}=1\Rightarrow y=1$$ es una asíntota horizontal

Como consecuencia, la función no tiene asíntotas oblicuas.

Puntos de discontinuidad:

Por tratarse de una función racional, es continua en su dominio, esto es, presenta discontinuidades en los puntos $x=-1$ y $x=1$.

Monotonía (crecimiento, decrecimiento y extremos):

$$f'(x)=\frac{2x\left(x^2-1\right)-x^2(2x)}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{2x^3-2x^2-2x^3}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{-2x^2}{\left(x^2-1\right)^2}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow \frac{-2x^2}{\left(x^2-1\right)^2}=0\Leftrightarrow -2x^2=0\Leftrightarrow x=0$$

signo de f': $\quad + \quad + \quad \mid_{-1} \quad + \quad \mid_{0} \quad - \quad \mid_{1} \quad -$

$$y=f(x)\begin{cases}\text{creciente en } (-\infty,\ -1)\cup(-1,\ 0)\\ \text{decreciente en } (0,\ 1)\cup(1,+\infty)\end{cases}$$

En $x=0$ tiene un posible extremo relativo (máximo o mínimo)[4], luego hay que calcular la derivada segunda:

$$f''(x)=\frac{-4x\left(x^2-1\right)^2-\left(-2x^2\right)2\left(x^2-1\right)2x}{\left(x^2-1\right)^4}=\frac{6x^2+2}{\left(x^2-1\right)^3}$$

$$f''(0)=\frac{6\cdot 0^2+2}{\left(0^2-1\right)^3}=-2<0\Rightarrow x=0 \text{ es un máximo relativo}$$

Para hallar la coordenada *y* del máximo relativo, sustituimos $x=0$ en $f(x)$: $f(0)=\dfrac{0^2}{0^2-1}=0$

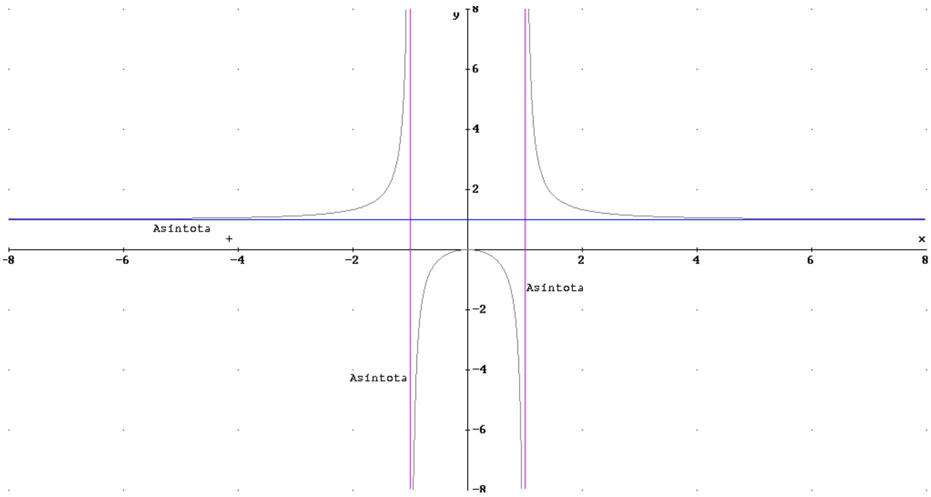
<u>Curvatura (concavidad, convexidad y puntos de inflexión):</u>

$f'(x)=\dfrac{2x(x-1)-x^2\cdot 1}{(x-1)^2}=\dfrac{2x^2-2x-x^2}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$ y por tanto la función no tiene puntos de inflexión.

signo de f'': $\quad + \quad \mid_{-1} \quad - \quad \mid_{1} \quad +$

$$y=f(x)\begin{cases}\text{convexa en } (-\infty,-1)\cup(1,\ +\infty)\\ \text{concava en } (-1,\ 1)\end{cases}$$

<u>Gráfica:</u>



2.	Representa gráficamente la función $f(x)=\ln\sqrt{x^2+1}$.

<u>Dominio:</u>

El dominio de la función logaritmo es $(0,+\infty)$ y el dominio de una función radical de índice par es el conjunto de los x tales que el radicando es ≥ 0 .

[4] En este caso sabemos que es un máximo por que la función es continua en $x=0$ y en dicho punto pasa de ser creciente a ser decreciente.

En nuestro caso, como $x^2+1>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$, se tiene que el dominio de la función $f(x)$ es $\mathbb{R}$.

Simetrías:

$f(-x)=\ln\sqrt{(-x)^2+1}=\ln\sqrt{x^2+1}=f(x)\Rightarrow f(x)$ es par, es decir, simétrica respecto del eje *OY*.

Periodicidad:

Esta función no es periódica

Puntos de corte con los ejes de coordenadas:

- Con *OX*

$$y=0\Rightarrow \ln\sqrt{x^2+1}=0\Rightarrow e^{\ln\sqrt{x^2+1}}=e^0\Rightarrow\sqrt{x^2+1}=1\Rightarrow x^2+1=1\Rightarrow x^2=0\Rightarrow x=0\rightarrow(0,0)$$

- Con *OY*

$$x=0\Rightarrow y=\ln\sqrt{0^2+1}=\ln 1=0\rightarrow(0,\ 0)$$

Regiones de existencia:

$f(x)=0\Rightarrow x=0$

signo de $f(x)$: $+$ | $+$ (en 0)

Así, $f(x)$ es positiva en $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

Asíntotas:

Esta función no tiene asíntotas.

Puntos de discontinuidad:

Por ser composición de funciones continuas es continua en todo su dominio.

Monotonía (crecimiento, decrecimiento y extremos relativos):

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}-1}2x=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{x^2+1}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{x}{x^2+1}=0\Leftrightarrow x=0$$

signo de f': $-$ | $+$ (en 0)

$$y=f(x)\begin{cases}\text{creciente en } (0,+\infty)\\ \text{decreciente en } (-\infty,0)\end{cases}$$

En $x=0$ tiene un posible extremo relativo (máximo o mínimo)[5], luego hay que calcular la derivada segunda:

[5] En este caso sabemos que es un mínimo relativo por que la función es continua en $x=0$ y en dicho punto pasa de ser decreciente a ser creciente.

$$f''(x)=\frac{1\cdot\left(x^2+1\right)-x\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{x^2+1-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{-x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$f''(0)=\dfrac{-0^2+1}{\left(0^2+1\right)^2}=1>0\Rightarrow x=0$ es un mínimo relativo

Para hallar la coordenada *y* del máximo relativo, sustituimos $x=0$ en $f(x)$: $f(0)=0$

Curvatura (concavidad, convexidad y puntos de inflexión):

$$f''(x)=0\Leftrightarrow\frac{-x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}=0\Leftrightarrow -x^2+1=0\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=\pm 1$$

signo de f''

$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,+\infty)$
$-$	$+$	$-$

$$f'(x)=\frac{2x(x-1)-x^2\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-2x-x^2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

Los puntos $x=\pm 1$ son posibles puntos de inflexión. Para verlo, calculamos la derivada tercera:

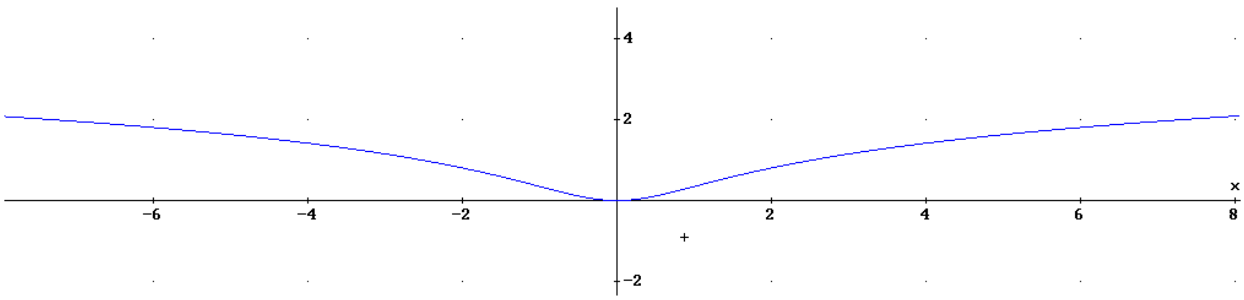
$$f'''(x)=\frac{-2x\left(x^2+1\right)^2-\left(-x^2+1\right)2\left(x^2+1\right)2x}{\left(x^2+1\right)^4}=\frac{\left(x^2+1\right)\left[-2x\left(x^2+1\right)-4x\left(-x^2+1\right)\right]}{\left(x^2+1\right)^4}=$$

$$=\frac{-2x\left(x^2+1\right)-4x\left(-x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^3}=\frac{-2x^3-2x+4x^3-4x}{\left(x^2+1\right)^3}=\frac{x^3-6x}{\left(x^2+1\right)^3}$$

$f'''(-1)>0\Rightarrow x=-1$ es un punto de inflexión convexo-cóncavo $\rightarrow(-1\ ,\ 0{,}35)$

$f'''(1)<0\Rightarrow x=1$ es un punto de inflexión cóncavo-convexo $\rightarrow(1\ ,\ 0{,}35)$

Gráfica:



Ejercicio:

21. *Representa gráficamente las siguientes funciones:*

1) $y=\dfrac{2x^2}{x^2-4}$ **13)** $y=\ln(x^2+1)$ **24)** $y=\dfrac{2x^2}{x^2+4}$

2) $y=x+\dfrac{4}{(x-1)^2}$ **14)** $y=\dfrac{x}{\ln x-1}$ **25)** $y=\dfrac{1-x}{x^2}$

3) $y=\sqrt[3]{x}$

4) $y=\dfrac{x^3}{x^2+4}$

5) $y=e^x-2x$

6) $y=\dfrac{e^x}{x^2-3}$

7) $y=x.e^{3x}$

8) $y=e^{\frac{2x}{x^2+1}}$

9) $y=e^x+e^{-x}$

10) $y=e^x-e^{-x}$

11) $y=x^2.e^{-x}$

12) $y=\dfrac{|x|}{2-x}$

15) $y=\ln(x^2-4)$

16) $y=\dfrac{2x}{x+1}$

17) $y=\dfrac{3x^2+x+3}{x^2+1}$

18) $y=x.e^{2x}$

19) $y=\dfrac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}$

20) $y=\dfrac{-4x}{\left(1+x^2\right)^2}$

21) $y=\dfrac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}$

22) $y=\dfrac{\operatorname{sen} x}{2-\cos x}$

23) $y=\dfrac{1}{1+\operatorname{sen}^2 x}$

26) $y=\sqrt[3]{x^2}$

27) $y=\sqrt[3]{x^2-4}$

28) $y=\sqrt{x^2-4}$

29) $y=\dfrac{\ln x}{x}$

30) $y=\dfrac{x^2}{|x-3|}$

31) $y=e^{-x}\left(x^2+1\right)$

32) $y=\dfrac{1}{\left(x-2\right)^2}$

33) $y=\dfrac{\left(2x-1\right)^2}{4x^2+1}$

34) $y=\dfrac{2x^3}{x^2-16}$

10.2. Optimización de funciones

Optimizar una función es obtener el valor o valores de la variable independiente que maximizan o minimizan la función objeto de estudio.

Ejercicios:

22. *El coste de fabricación de bote de conservas (en euros) viene dado por la función*

$$f\left(x\right)=\frac{5}{x}+x-4$$

Siendo $x>0$ *el volumen del bote, en litros. ¿Cuál debe ser el volumen del bote para que su coste sea mínimo? ¿Cuál es dicho coste)*

23. *Calcular* a, b y c *para que la función* $f\left(x\right)=x^3+bx^2+cx+d$ *tenga un punto de inflexión en* $x=3$, *pase por el punto* $P\left(1,0\right)$ *y tenga un mínimo relativo en* $x=1$.

24. *Tras la aparición de una cierta enfermedad infecciosa, el número de afectados viene dado por la función* $p\left(t\right)=48t^2-2t^3$, *siendo t el número de días desde que se detectó el primer caso. Se pide: ¿Cuántos días transcurrirán hasta que la enfermedad deje de propagarse? ¿Cuándo aumenta el número de personas afectadas? ¿Cuándo disminuye? ¿Cuándo se detecta el número máximo de personas afectadas? ¿Cuántas son las personas afectadas en ese momento?*

25. *La trayectoria de una bala, medida en metros, viene dada por la función*

$$f(x)=\frac{1}{40}\left(-x^2+80x\right)$$

donde x expresa el tiempo en segundos. 1) ¿Cuántos metros recorre la bala transcurridos 39 segundos? 2) ¿Cuántos segundos han de transcurrir para que la bala empiece a descender? 3) ¿A qué altura máxima llega antes de comenzar a descender? 4) ¿En qué momentos alcanza una altura de 30 m?

26. *Unos grandes almacenes abren a las 10 horas y cierran a las 22 horas. Se ha comprobado que el número de visitantes puede representarse, en función de la hora del día, como:*

$$N(t)=-t^2+36t+260 \text{ con } 10\leq t\leq 22$$

1) ¿Cuántos clientes han pasado por los almacenes a las 12 de la mañana? 2) ¿A qué hora hay la máxima afluencia de clientes? 3) ¿Cuál es el máximo número de clientes que registran? 4) ¿Cuántos clientes quedan a la hora de cerrar?

27. *La atención ante un anuncio de televisión (en una escala del 0 a 100) de 3 minutos de duración se comporta según la función*

$$A(t)=-10t^2+40t+40 \text{ con } 0\leq t\leq 3$$

1) ¿A cuántos minutos de comenzar el anuncio se presta la máxima atención? 2) Cuando finaliza el anuncio, ¿en qué punto de la escala de atención se está? 3) ¿En qué punto de la escala de atención se está transcurrido 90 segundos?

28. *Halla un número "xy" tal que la suma de sus cifras sea 12 y de modo que la suma del cubo de la cifra de las decenas y del triple del cuadrado de la cifra de las unidades sea lo más pequeña posible.*

29. *Halla dos números que sumados den 20 y que su producto sea máximo.*

30. *Halla dos números tales que el cuadrado de uno multiplicado por el otro sea máximo, si la suma de dichos números es 40.*

31. *Cuáles son las dimensiones de un campo rectangular de 3 600 m^2 de superficie, para poderlo cercar con una valla de longitud mínima.*

32. *Una cuerda de 120 metros de longitud se divide en dos trozos. Con el primero de ellos se forma un cuadrado de lado "x" y con el segundo trozo se forma un rectángulo de base "x" y de altura "y". Halla los valores de "x" e "y" para que la suma del área del cuadrado y el doble del área del rectángulo sea lo mayor posible y calcula este valor máximo.*