1. Introducción y funciones elementales

Al inicio de una sesión en Mathematica, en la pantalla nos aparece un documento en blanco. En él escribiremos los mandatos que queramos que Mathematica realice y para que esto ocurra, al acabar de escribir el mandato, pulsaremos la tecla intro para transmitir la información al programa. Éste nos dará la respuesta en la línea siguiente.

Si queremos que el programa ignore alguna línea que hemos escrito, o sea, que no evalúe dicha línea (por ejemplo, si es un comentario o un título, etc...), simplemente escribirmos dicha linea entre parentesis y asteriscos:

(*Esto es un comentario*)

Si a y b son números reales, las operaciones aritméticas elementales entre a y b son introducidas como sigue:

$a+b$	suma de a y b
$a-b$	a menos b
$a*b$ ó $a\ b$	producto de a y b
a/b	cociente entre a y b
$a\,\hat{}\,b$	a^b

Realizamos la primera operación en Mathematica, $2+3$:

In[1]:= $2+3$

Out[1]=5

Efectuamos también la operación 5^4:

In[2]:= $5\,\hat{}\,4$

Out[2]=625

Supongamos que ahora nos vamos a la primera de las operaciones y la cambiamos por la operación $4/2$. Entonces al pulsar la tecla intro nuestro documento se ha transformado en:

In[3]:= $4/2$

Out[3]=2

In[2]:= 5^4

Out[2]=625

Notemos que en la primera operación aparece un [3] en lugar del [1]. Esto ocurre porque aunque en el documento aparecen sólo las dos últimas operaciones, para Mathematica ha ocurrido:

In[1]:= $2+3$

Out[1]=5

In[2]:= 5^4

Out[2]=625

In[3]:= $4/2$

Out[3]=2

O sea, lo importante no es las operaciones o el orden en que estas aparecen en el documento sino las operaciones que le hemos transmitido y en el orden en el que se las hemos transmitido. Esto es muy importante como veremos a continuación.

Supongamos que ahora vamos a realizar una operación en la cual usamos un resultado que hemos obtenido anteriormente. Usando el orden en que hemos hecho cada una de las operaciones, Mathematica entiende por % el resultado de la operación anterior, por %% el resultado obtenido dos pasos antes, etc...

Tenemos también otra posibilidad, $\%n$ es el resultado que hemos obtenido en la operación $[n]$.

Así, si sumamos 3 al paso anterior se obtiene:

In[4]:= $3+\%$

Out[4]=5

Si multiplicamos 4 por el resultado obtenido tres pasos antes se obtiene:

In[5]:= 4 %%%

Out[5]=2500

y ahora sumamos 5 al resultado obtenido en el paso [1]:

In[6]:= $5 + \%1$

Out[6]= 10

En Mathematica, en expresiones con parentesis, corchetes o llaves sólo utilizaremos los parentesis.

Así para calcular $[2 + 3 \cdot (3 + 2)] \cdot 5$ escribiremos:

In[7]:= $(2 + 3 * (3 + 2)) * 5$

Out[7]= 85

Para introducir $\pi, e, \infty, i = \sqrt{-1}$ escribimos $Pi, E, Infinity, I$ respectivamente.

Para el cálculo con números decimales tenemos las sentencias $x//\mathbf{N}$ ó $\mathbf{N}[x]$ con las que obtenemos el número x con 6 cifras significativas y $\mathbf{N}[x, n]$ con la que obtenemos el número x con n cifras significativas.

Así:

In[8]:= $\mathbf{N}[Pi]$

Out[8]= 3.14159

In[9]:= $Pi//\mathbf{N}$

Out[9]= 3.14159

In[10]:= $\mathbf{N}[Pi, 10]$

Out[10]= 3.141592654

Las funciones elementales más importantes son introducidas de la siguiente forma:

$$\mathbf{Sqrt}[x] = \sqrt{x}$$

$$\mathbf{Exp}[x] = e^x$$

$$\mathbf{Log}[x] = \mathbf{log}(x)$$

$$\mathbf{Log}[b,x] = \mathbf{log}_b(x)$$

$$\mathbf{Sin}[x] = \mathbf{sin}(x)$$

$$\mathbf{Cos}[x] = \mathbf{cos}(x)$$

$$\mathbf{Tan}[x] = \mathbf{tan}(x)$$

$$\mathbf{ArcSin}[x] = \mathbf{arcsin}(x)$$

$$\mathbf{ArcCos}[x] = \mathbf{arccos}(x)$$

$$\mathbf{ArcTan}[x] = \mathbf{arctan}(x)$$

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

$$\mathbf{Abs}[x] = |x|$$

$$\mathbf{IntegerPart}[x] = \mathbf{E}[x]$$

Así

In[11]:= **N**[**Cos**[$Pi/4$], 7]

Out[11]= 0.7071068

In[12]:= **N**[**Sqrt**[2]]

Out[12]= 1.41421

In[13]:= **ArcTan**[5]

Out[13]= **ArcTan**[5]

Para definir constantes en Mathematica, por ejemplo que $a = 5$ tenemos tres opciones:

In[14]:= $a = 5$

Out[14]= 5

In[15]:= $a := 5$

In[16]:= $a = 5$;

De la segunda y tercera forma Mathematica no nos devuelve el valor introducido.

Entonces:

$In[17]{:=}\ a+3$

$Out[17]{=}\ 8$

Para quitarle el valor 5 a la constante a escribimos:

$In[18]{:=}$ **Clear**$[a]$

y entonces

$In[19]{:=}\ a$

$Out[19]{=}\ a$

Finalmente para introducir una función, por ejemplo $f(x) = \mathbf{sin}(x)$ escribimos:

$In[20]{:=}\ f[x\_] := \mathbf{Sin}[x]$

$In[21]{:=}\ f[Pi]$

$Out[21]{=}\ 0$

Para una función de varias variables, por ejemplo $g(x, y, z) = (x + y + z, 2x - y)$ escribimos:

$In[22]{:=}\ g[x\_, y\_, z\_] := \{x + y + z, 2x - y\}$

$In[23]{:=}\ g[1, 2, 1]$

$Out[23]{=}\ \{4, 0\}$

Para quitarle a $g(x, y, z)$ este valor escribimos:

$In[23]{:=}$ **Clear**$[g, x, y, z]$

Finalmente, puede ser de gran utilidad en algún momento unos archivos de ayuda que Mathematica contiene. Para utilizarlos, basta pinchar en Help e introducir la palabra de la cual queremos encontrar una ayuda.

2. Vectores y matrices

1. Construcción de vectores y matrices en Mathematica

Para introducir el vector $v = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ en Mathematica introducimos la lista $v = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Para introducir una matriz en Mathematica si ésta es una matriz fila la introducimos como si fuera un vector y en otro caso se introduce como una lista formada por listas que corresponden a los vectores fila de la matriz.

Así para definir el vector $v = (1, 2, 3)$ escribimos:

In[1]:= $v = \{1, 2, 3\}$

Out[1]=

$\{1, 2, 3\}$

Para introducir la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ escribimos:

In[2]:= $m = \{\{1, 2, 3\}, \{-1, 0, 1\}\}$

Out[2]=

$\{\{1, 2, 3\}, \{-1, 0, 1\}\}$

Analizamos los siguientes comandos:

DiagonalMatrix[$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$]: Se obtiene la matriz $n \times n$ diagonal cuyos elementos de la diagonal son $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

IdentityMatrix[n]: Se obtiene la matriz identidad $n \times n$.

Array[w, n]: Se obtiene un vector genérico w de n componentes.

Array[$M, \{n1, n2\}$]: Se obtiene una matriz genérica M de $n1$ filas y n_2 columnas.

Ejemplo:

In[3]:= DiagonalMatrix[$\{1, 1, E\}$]

Out[3]=

$\{\{1, 0, 0\}, \{0, 1, 0\}, \{0, 0, E\}\}$

$In[4]{:=}$ IdentityMatrix[3]

$Out[4]{=}$

$\{\{1,0,0\},\{0,1,0\},\{0,0,1\}\}$

$In[5]{:=}$ Array[w, 5]

$Out[5]{=}$

$\{w[1], w[2], w[3], w[4], w[5]\}$

$In[6]{:=}$ Array[$m1, \{2,5\}$]

$Out[6]{=}$

$\{\{m1[1,1], m1[1,2], m1[1,3], m1[1,4], m1[1,5]\},$

$\{m1[2,1], m1[2,2], m1[2,3], m1[2,4], m1[2,5]\}\}$

2. Operaciones con vectores.

Sean v y w dos vectores de n componentes y a un número:

$v+w$ denota la suma de v y w.

$v-w$ denota la resta de v y w.

$a\ \ v$ denota el producto del escalar a por el vector v (entre a y v un espacio en blanco).

$v.w$ denota el producto escalar de v por w.

Ejemplo:

$In[1]{:=}\ v1 = \{1,0,-1\}$

$Out[1]{=}$

$\{1,0,-1\}$

$In[2]{:=}\ 4.v1$

$Out[2]{=}$

$\{4,0,-4\}$

$In[3]{:=}\ v2 = \{1, 2, -1\}$

$Out[3]=$

$\{1, 2, -1\}$

$In[4]{:=}v1 + v2$

$Out[4]=$

$\{2, 2, -2\}$

$In[5]{:=}\ 5\ \ v1 + 6\ \ v2$

$Out[5]=$

$\{11, 12, -11\}$

$In[6]{:=}\ v1.v2$

$Out[6]=$

2

3. Cálculo de bases de subespacios.

Si tenemos que $L = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ es un sistema generador de $S \leq \mathbb{R}^n$ y queremos calcular una base de S, si escribimos:

RowReduce$[\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}]$

entonces se obtiene otro sistema generador de S de forma que si eliminamos los vectores nulos que aparecen al final, los vectores restantes constituyen una base de S.

Así, si $S = \langle(1, 2, 3), (-5, 4, 2), (-4, 6, 5)\rangle$ y efectuamos lo anterior:

$In[1]{:=}$ **RowReduce**$[\{\{1, 2, 3\}, \{-5, 4, 2\}, \{-4, 6, 5\}\}]$

$Out[1]{=}\{\{1, 0, \frac{4}{7}\}, \{0, 1, \frac{17}{14}\}, \{0, 0, 0\}\}$

de donde $\{(1, 0, \frac{4}{7}), (0, 1, \frac{17}{14})\}$ es una base de S.

4. Operaciones con matrices.

La suma, resta y producto por un escalar se introduce igual que en el caso de los vectores. Si M y N son matrices de forma que se puede multiplicar M por N, para realizar el producto escribimos $M.N$.

Además si m es una matriz se pueden utilizar los siguientes comandos:

Det$[m]$: Calcula el determinante de m en el caso en que m es una matriz cuadrada.

Inverse$[m]$: Calcula la matriz inversa de m cuando m es una matriz cuadrada invertible.

MatrixPower$[m, n]$: Calcula la potencia n-ésima de m cuando m es una matriz cuadrada y n es un número natural.

Transpose$[m]$: Calcula la matriz transpuesta de m.

Minors$[m, n]$: Se obtiene una matriz que consta de todos los menores de orden n de m.

Eigenvalues$[m]$: Se obtiene una lista formada por todos los valores propios de m.

Eigenvectors$[m]$: Se obtiene una lista de vectores linealmente independientes formada por los vectores propios asociados a los valores propios de m.

Ejemplo:

In[1]:= $m1 = \{\{1, 0, 1\}, \{0, 1, 2\}, \{-1, 0, 3\}\}$

Out[1]=

$\{\{1, 0, 1\}, \{0, 1, 2\}, \{-1, 0, 3\}\}$

In[2]:= **Det**$[m1]$

Out[2]=

4

In[3]:= **Inverse**$[m1]$

Out[3]=

$\{\{0.75, 0, -0.25\}, \{-0.5, 1, -0.5\}, \{0.25, 0, 0.25\}\}$

$In[4]{:=}$ **MatrixPower**$[m1, 4]$

$Out[4]{=}$

$\{\{-16, 0, 32\}, \{-34, 1, 64\}, \{-32, 0, 48\}\}$

$In[5]{:=}\ m2 = \{\{3, 1, 0, 4, 2\}, \{2, -1, -1, -1, 0\}, \{0, -1, -1, 5, 4\}\}$

$Out[5]{=}$

$\{\{3, 1, 0, 4, 2\}, \{2, -1, -1, -1, 0\}, \{0, -1, -1, 5, 4\}\}$

$In[6]{:=}\ m1.m2$

$Out[6]{=}$

$\{\{3, 0, -1, 9, 6\}, \{2, -3, -3, 9, 8\}, \{-3, -4, -3, 11, 10\}\}$

$In[7]{:=}\ m3 = \{\{2, -1, 0, 1, 3\}, \{3, -1, 0, 1, 2\}, \{0, 0, -1, 2, 3\}\}$

$Out[7]{=}$

$\{\{2, -1, 0, 1, 3\}, \{3, -1, 0, 1, 2\}, \{0, 0, -1, 2, 3\}\}$

$In[8]{:=}\ m2 + m3$

$Out[8]{=}$

$\{\{5, 0, 0, 5, 5\}, \{5, -2, -1, 0, 2\}, \{0, -1, -2, 7, 7\}\}$

$In[9]{:=}\ 2\ \ m2 - 3\ \ m3$

$Out[9]{=}$

$\{\{0, 5, 0, 5, -5\}, \{-5, 1, -2, -5, -6\},$

$\{0, -2, 1, 4, -1\}\}$

$In[10]{:=}$ **Transpose**$[m1]$

$Out[10]{=}$

$\{\{1, 0, -1\}, \{0, 1, 0\}, \{1, 2, 3\}\}$

$In[11]{:=}$ **Transpose**$[m3]$

$Out[11]{=}$

$\{\{2, 3, 0\}, \{-1, -1, 0\}, \{0, 0, -1\}, \{1, 1, 2\}, \{3, 2, 3\}\}$

In[12]:= **Minors**[$m1, 2$]

Out[12]=

$\{\{1, 2, -1\}, \{0, 4, 0\}, \{1, 2, 3\}\}$

In[13]:= **Minors**[$m2, 3$]

Out[13]=

$\{\{2, -36, -24, -26, -16, -24, -6, -4, 0, 4\}\}$

In[14]:= **Eigenvalues**[m1]

Out[14]=

$\{1, 2, 2\}$

In[15]:= **Eigenvectors**[$m1$]

Out[15]=

$\{\{0, 1, 0\}, \{1, 2, 1\}, \{0, 0, 0\}\}$

Por último, para calcular el rango de una matriz m, con el comando **RowReduce** aplicado a m calcularemos una matriz equivalente triangular superior y el rango de m será el número de filas no nulas de ésta.

Así, si $m = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ -1 & 4 & 1 & 8 \\ 0 & 6 & 4 & 14 \end{pmatrix}$

In[16]:= $m := \{\{1, 2, 3, 6\}, \{-1, 4, 1, 8\}, \{0, 6, 4, 14\}\}$

In[17]:= **RowReduce**[m]

Out[17]=$\{\{1, 0, \frac{5}{3}, \frac{4}{3}\}, \{0, 1, \frac{2}{3}, \frac{7}{3}\}, \{0, 0, 0, 0\}\}$

y dado que esta nueva matriz tiene dos filas no nulas, el rango de m es 2.

5. Sistemas de ecuaciones lineales.

Para resolver un sistema en forma matricial $Ax = b$ procedemos como sigue:

1. Obtenemos una solución particular del sistema haciendo:

LinearSolve[$A, b^{\mathbf{T}}$]

2. Obtenemos una base del conjunto de las soluciones del sistema homogéneo $Ax = 0$ haciendo:

NullSpace[A]

A partir de esto se obtiene la solución general del sistema.

Por ejemplo, para resolver

$$\begin{cases} 2x - 3y + 2z = 1 \\ 4x - 6y + 4z = 2 \end{cases}$$

procedemos de la siguiente forma:

In[16]:= $a := \{\{2, -3, 2\}, \{4, -6, 4\}\}$

In[17]:= **LinearSolve**[$a, \{1, 2\}$]

Out[17]:=$\{\frac{1}{2}, 0, 0\}$

In[18]:= **NullSpace**[a]

Out[18]:=$\{\{-1, 0, 1\}, \{-3, 2, 0\}\}$

Así, la solución general del sistema es $(x, y, z) = (\frac{1}{2}, 0, 0) + \alpha \cdot (-1, 0, 1) + \beta \cdot (-3, 2, 0)$.

5. Ortogonalidad.

Si tenemos un base de un subespacio de $\mathbb{R}^n$ con el producto escalar canónico, Mathematica obtiene una base ortonormal de dicho subespacio.

Para ello, si la base es $\{(3, 4, 2), (2, 5, 2)\}$ entonces escribimos:

In[16]:= <<LinearAlgebra` Orthogonalization`

In[17]:= **GramSchmidt**[$\{\{3, 4, 2\}, \{2, 5, 2\}\}$]

Out[17]:=$\{\{\frac{3}{\sqrt{29}}, \frac{4}{\sqrt{29}}, \frac{2}{\sqrt{29}}\}, \{\frac{-32}{\sqrt{1653}}, \frac{25}{\sqrt{1653}}, \frac{-2}{\sqrt{1653}}\}\}$