Paso a paso

61. Representa y analiza la función:

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

Solución:

9. Análisis de funciones y representación de curvas
Alba Maza Sánchez
Óscar Arias López
Paso a paso

Ejercicio 61

$f(x) = \frac{x^3}{x^2-1} \rightarrow x \mapsto \frac{x^3}{x^2-1}$

dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_línea = 2}) → tablero1

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: por ser una función racional hay que excluir las raíces del denominador.
   $Dom(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$
3. Continuidad: es discontinua en $x = -1$, $x = 1$ donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: por ser una función racional no es periódica.
5. Simetrías:

$f(-x) \rightarrow \frac{-x^3}{x^2-1}$

$f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ es impar, simétrica respecto del origen $O(0, 0)$

6. Asíntotas:

resolver$(x^2 - 1 = 0) \rightarrow \{\{x=-1\},\{x=1\}\}$

· Verticales: $x = -1$, $x = 1$

dibujar(x = −1, {color=verde, anchura_línea=2})
dibujar(x = 1, {color=verde, anchura_línea=2})

· Horizontales: no tiene.
· Oblicuas:

$x^3 \;\; \underline{|x^2 - 1} \rightarrow x^3 \;\; \underline{|x^2-1}$ ... x ... x

$y = x$

dibujar(y = x, {color=verde, anchura_línea=2})

7. Corte con los ejes:

resolver$(f(x) = 0) \rightarrow \{\{x=0\}\}$

· Eje X: $O(0, 0)$
· Eje Y: $O(0, 0)$

Signo:
· Positiva (+): $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
· Negativa (−): $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

8. Máximos y mínimos relativos:

$f'(x) \rightarrow \frac{x^4-3\cdot x^2}{x^4-2\cdot x^2+1}$

resolver$(f'(x) = 0) \rightarrow \{\{x=0\},\{x=-\sqrt{3}\},\{x=\sqrt{3}\}\}$

$f(0) \rightarrow 0$

$O = $ punto$(0, 0) \rightarrow (0,0)$

$f''(0) \rightarrow 0$

$f'''(0) \rightarrow -6$

· Punto de inflexión: $O(0, 0)$

$f(-\sqrt{3}) \rightarrow -\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}$

$A = $ punto$\left(-\sqrt{3}, -\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}\right) \rightarrow \left(-\sqrt{3}, -\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}\right)$

$f''(-\sqrt{3}) \rightarrow -\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}$

· Máximo relativo: $A\left(-\sqrt{3}, -\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}\right)$

dibujar(A, {color = azul, tamaño_punto = 8})

$f(\sqrt{3}) \rightarrow \frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}$

$B = $ punto$\left(\sqrt{3}, \frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}\right) \rightarrow \left(\sqrt{3}, \frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}\right)$

$f''(\sqrt{3}) \rightarrow \frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}$

· Mínimo relativo: $B\left(\sqrt{3}, \frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}\right)$

dibujar(B, {color = cian, tamaño_punto = 8})

Monotonía:
· Creciente: $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$
· Decreciente: $(-\sqrt{3}, 0) \cup (0, \sqrt{3})$

9. Puntos de inflexión:

$f''(x) \rightarrow \frac{2\cdot x^3+6\cdot x}{x^6-3\cdot x^4+3\cdot x^2-1}$

resolver$(f''(x) = 0) \rightarrow \{\{x=0\}\}$

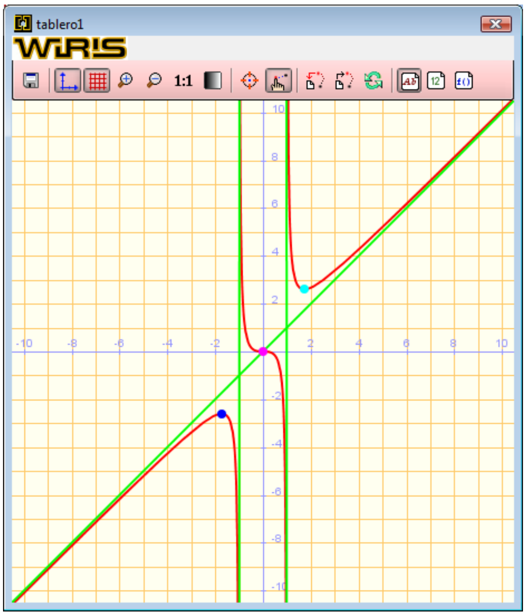
$O = $ punto$(0, 0) \rightarrow (0,0)$

Puntos de inflexión $O(0, 0)$

dibujar(O, {color = magenta, tamaño_punto = 8})

Curvatura:
· Convexa (∪): $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
· Cóncava (∩): $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

10. Recorrido o imagen:
$Img(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$



62. Internet. Abre la web: **www.editorial-bruno.es** y elige **Matemáticas, curso** y **tema.**

Así funciona

Curvas 63 y 64

Se selecciona la curva **61** completa, se pega en un nuevo bloque y se hacen las modificaciones oportunas para la curva **63,** de igual forma se hacen los siguientes.

Descomposición en fracciones simples

En Operaciones se elige **División euclideana** y se escribe el dividendo y el divisor. Tiene aplicación al cálculo de asíntotas oblicuas en las funciones racionales.

Función tablero

a) Se dibuja la función, se hace **Zoom fuera** varias veces hasta ver la parte más importante de la función.

b) Se escribe la función **tablero,** se pone en anchura y altura los valores correspondientes para ver la parte más importante de la función de forma que se vean los ejes coordenados. Ejemplo del problema 65

tablero({centro = punto(7, 30), anchura = 15, altura = 65})

Practica

Representa las siguientes funciones completando para cada una de ellas el formulario de los 10 apartados:

63. Representa y analiza la función:

$$y = 2x^2 - \frac{x^4}{4}$$

64. Representa y analiza la función:

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$$

65. Una cadena local de TV ha determinado, por medio de encuestas, que el porcentaje de ciudadanos que la ven entre las 6 de la tarde y las 12 de la noche viene dado por la función:

$$S(t) = 660 - 231t + 27t^2 - t^3$$

donde **t** indica las horas transcurridas desde las 12 en punto de la mañana

a) ¿A qué hora tiene máxima y mínima audiencia la cadena entre las 6 de la tarde y las 12 de la noche? ¿Qué porcentaje de ciudadanos ven la cadena de TV a esas horas de máxima y mínima audiencia?

b) Dibuja la gráfica de la función S(t) para **t** comprendido entre las 6 de la tarde y las 12 de la noche.

66. En una región, un río tiene la forma de la curva

$$y = \frac{1}{4}x^3 - x^2 + x$$

y es cortada por un camino según el eje X. Hacer un esquema de la posición del río y del camino, calculando para la curva el corte con los ejes de coordenados, extremos relativos e intervalos de crecimiento.

67. Dada la función: $f(x) = \dfrac{8x}{x^2 + 4}$

Se pide:

a) Asíntotas.

b) Máximos y mínimos relativos, intervalos de crecimiento y decrecimiento.

c) Esboza su gráfica.

68. Dada la función

$$f(x) = 7x - x^2 + \frac{9}{x}$$

razone a qué es igual el dominio de la función f(x) y diga los puntos en los que alcanza máximo o mínimo relativo.

69. Dada la función

$$f(x) = \frac{x^2}{4 - x^2}$$

determina:

a) Dominio y puntos de corte con los ejes de coordenados.

b) Ecuación de sus asíntotas.

c) Máximos y mínimos relaticos.

d) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

e) Utiliza la información anterior para representarla gráficamente.

70. Dada la función:

$$f(x) = 2x + |x^2 - 1|$$

Esboza la gráfica de f(x)

71. Dibuja la gráfica de la función:

$$f(x) = \frac{|x|}{2 - x}$$

e indicando su dominio, asíntotas e intervalos de crecimiento y decrecimiento.

