Notas ampliadas sobre la Conferencia

"Números grandes, enormes, descomunales y desorbitados"

impartida por el Doctor en Matemáticas, Eduardo Sáenz de Cabezón Irigaray (Profesor Titular del Departamento de Matemáticas y Computación de la Universidad de La Rioja)

1. Números grandes

Un número grande, para empezar:

$$9^{9^9} = 9^{\left(9^9\right)} \text{ tiene 369 693 100 dígitos}$$

Número de estrellas: se estima que hay del orden de 10^{23}.

Arquímedes de Siracusa (ca. 287 a. C. - ibídem, ca. 212 a. C.), en su libro "El contador de arena" reflexiona sobre el número de granos de arena que hay en el Universo, si éste estuviera formado por granos de arena. Para responder a esa pregunta inventó los exponenciales y sus reglas de uso (la notación, la forma de escribir, es muy importante en Matemáticas). Arquímedes estimó que había 10^{63} granos de arena.

2. Números grandes y enormes

Otros números más grandes son:

- Número de átomos en el Universo observable: se estima que hay del orden de 10^{85}.
- El árbol de jugadas del ajedrez es del orden de 10^{150} y el del go, del orden de 10^{365}.
- El número de multiversos (Teoría de Inflación Caótica), se estima del orden de
$$10^{10^{10\,000\,000}}.$$
- ¿De cuántas formas es posible ordenar los libros de la Biblioteca de Babel (libro de Jorge Luis Borges)? De $10^{10^{33\,013\,710}}$ formas distintas.

El término gúgol (en inglés: googol) es el nombre de un número acuñado en 1938 por Milton Sirotta, un niño de 9 años, sobrino del matemático estadounidense Edward Kasner. Kasner anunció el concepto en su libro "*Las matemáticas y la imaginación*". Isaac Asimov dijo en una ocasión al respecto: «Tendremos que padecer eternamente un número inventado por un bebé». Un gúgol es un uno seguido de cien ceros, o lo que es lo mismo, en notación científica, uno por diez a la cien:

$$10^{100}$$

Un gúgolplex (googolplex en inglés) es un uno seguido de un gúgol de ceros, esto es, 10 elevado a la gúgol-ésima potencia:

$$1 \text{ gúgolplex} = 10^{\text{gúgol}} = 10^{10^{100}} =$$
$$= 10^{1\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000}$$

El término fue acuñado por Kasner y originalmente significaba «un uno, seguido de ceros hasta que te canses de escribir». Después, Kasner decidió estandarizar el término, «porque las personas se cansan en diferentes momentos.

Una hoja de papel lo suficientemente grande para poder escribir en ella explícitamente todos los ceros de un gúgolplex (colocándolos en línea, no formando una superficie) no se podría meter dentro del universo conocido (por suerte, la notación científica simplifica esto). Aun así, un gúgolplex no deja de ser finito.

3. Números descomunales, pero computables

Vamos a ver otros números descomunales, y la notación empleada para definirlos:

Factorial de un número:

$5! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$ (5 factorial)

$= 5\cdot 4!$

En general: $n! = n\cdot(n-1)!$

El factorial, está definido de forma recursiva, esto es, se define en términos de sí mismo[1].

Hay un teorema de 1928, que dice que la recursividad y la computabilidad son equivalentes.

Veamos un ejemplo de recursividad no primitiva, pero antes, introducimos la notación que usaremos:

Producto: $n\cdot m = \underbrace{n+\ldots+n}_{m \text{ veces}}$

Potencia: $n^m = \underbrace{n\cdot\ldots\cdot n}_{m \text{ veces}}$

Notación de Knuth (1976):

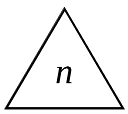
$n\uparrow m = n^m$

$n\uparrow\uparrow m = \underbrace{n^{n^{\cdot^{\cdot^{n}}}}}_{m \text{ veces}}$

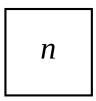
La **sucesión (simplificada) de Ackermann**: ejemplo de sucesión recursiva no primitiva

$A(1) = 1+1, A(2) = 2\cdot 2, A(3) = 3^3 = 3\uparrow 3, A(4) = 4\uparrow\uparrow 4 = 4^{4^{4^4}}, A(5) = 5\uparrow\uparrow\uparrow 5, \ldots$

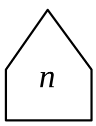
Notación de Steinhaus-Moser: números computables con suficiente tiempo y memoria



$= n^n$



$= n$ metido en n triángulos

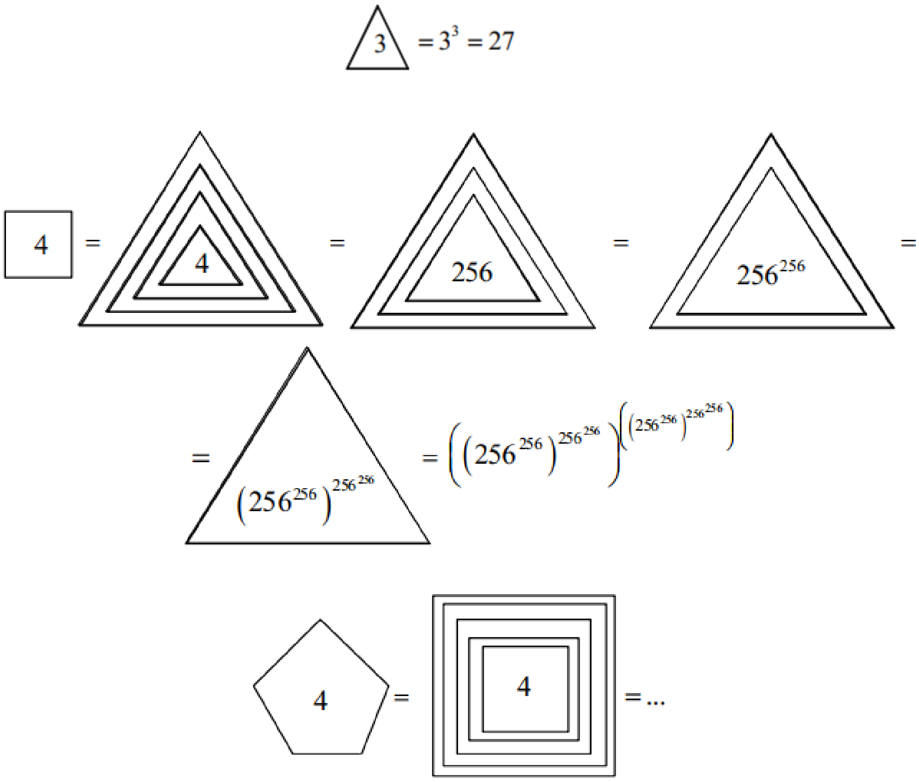


$= n$ metido en n cuadrados

$\vdots$

[1] En matemáticas se da el nombre de recursión a la técnica consistente en definir una función en términos de sí misma.

Ejemplos:



Steinhaus definió:

n en un círculo = n en un cuadrado
Mega: es el equivalente a 2 en un círculo
Megistón: es el equivalente a 10 en un círculo

El **número de Moser** es el número representado por "2 en un megagón", donde un megagón es un polígono con "mega" lados.

El **número de Graham**, *G*, tal y como lo define Martin Gadner en *Scientific American* equivale a:

$$G = 3\underbrace{\uparrow\uparrow \cdots\cdots\cdots \uparrow}_{3\underbrace{\uparrow\uparrow\cdots\cdots\uparrow}_{\underset{\displaystyle 3\underbrace{\uparrow\uparrow\cdots\cdots\uparrow}_{3\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3}3}{\underbrace{\qquad\vdots\qquad}}}3}3 \qquad \text{64 filas}$$

donde el número de flechas de cada fila empezando por la superior, viene especificado por el valor de la fila inmediatamente inferior, es decir,

$$G = g_{64},\ \text{donde}\ g_1 = 3\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3\ \text{y}\ g_n = 3\uparrow^{n-1} 3.$$

Esto es, *G* se calcula a través de 64 pasos: el primer paso consiste en calcular g_1 con cuatro flechas entre los treses; el segundo paso consiste en calcular g_2 con g_1 flechas entre los treses, el tercer paso consiste en calcular g_3 con g_2 flechas entre los treses, y así sucesivamente hasta calcular finalmente $G = g_{64}$.

Este número es el más grande que se ha utilizado hasta ahora en la demostración de un teorema matemático, relacionado con la Teoría de Ramsey.

4. Números desorbitados y no computables

Teorema de Turing: Hay cosas que una máquina de Turing no puede hacer.

Este teorema equivale a decir que las Matemáticas tienen límites, esto es, las Matemáticas pueden proponerse problemas, a sí mismas, que nunca podrán resolverse. Este es el conocido teorema de Gödel de Incompletitud.

Otro **Teorema de Turing**: Saber si un programa puede parar o no.

Turing demostró que es un problema irresoluble.

Sucesión de números no computables: números de F. Rado (castores atareados)
Él visualizó cada máquina de Turing como un castor bullendo ocupadamente a lo largo de la cinta, escribiendo y borrando símbolos. El desafío, entonces, es encontrar el castor más ocupado con exactamente *n* reglas, aunque no uno infinitamente ocupado. Podemos interpretar este desafío como la búsqueda del "más complicado" programa de ordenador de *n* bits de tamaño: el que hace la mayor cantidad de material, pero no una infinita cantidad. Ahora, supón que conocemos el *n* - ésimo número del castor ocupado, que llamaremos $BB(n)$. Entonces podríamos decidir si cualquier máquina de Turing con *n* reglas se para partiendo de una cinta en blanco. Sólo tenemos que ejecutar la máquina: si se para, bien; pero si no se para en $BB(n)$ pasos, entonces sabemos que nunca se parará, puesto que $BB(n)$ es el máximo número de pasos que podría hacer antes de parar.

Se tiene que:

$BB(1)=1$

$BB(2)=6$

$BB(3)=21$

$BB(4)=107$

$BB(5)>2\ 133\ 492$ pero no se conoce su valor exacto

$\mathrm{BB}(6)>10^{36\ 534}$ pero no se conoce su valor exacto

Se piensa (conjetura) que la humanidad no conocerá nunca el valor exacto de $BB(7)$.

5. Concreción y ampliación de algunos de los ítems

(1) Multiverso

Multiverso es un término usado para definir los múltiples universos existentes (conjunto de universos en un solo universo), según las hipótesis que afirman que existen universos diferentes del nuestro propio. La estructura del multiverso, la naturaleza de cada universo dentro de él, así como la relación entre los diversos universos constituyentes, dependen de la hipótesis de multiverso considerada. Según cualquiera de esas hipótesis, el multiverso comprende todo lo que existe físicamente: la totalidad del espacio y del tiempo, todas las formas de materia, energía y cantidad de movimiento, y las leyes físicas y constantes que las gobiernan.

El término de "multiverso" fue acuñado en 1895 por el psicólogo William James. El concepto de multiverso se ha usado en cosmología, física, astronomía, filosofía, psicología transpersonal y ficción, en particular dentro de la ciencia ficción y de la fantasía. Los diferentes universos dentro del multiverso son a veces llamados universos paralelos. En otros contextos, también son llamados «universos alternativos», «universos cuánticos», «dimensiones interpenetrantes», «mundos paralelos», «realidades alternativas» o «líneas de tiempo alternativas».

En 2013 los científicos Laura Mersini-Houghton y Richard Holman afirmaron haber descubierto, a través del telescopio Planck, posible evidencia de que haya otros universos por fuera del nuestro. Esta teoría ha creado controversia en la comunidad científica. Por ejemplo, un artículo firmado por 175 científicos afirma que no se ha detectado "bulk flow", una de las bases de la teoría de Mersini-Houghton y Holman.

(2) Recurrencia, recursión o recursividad es la forma en la cual se especifica un proceso basado en su propia definición. Siendo un poco más precisos, y para evitar el aparente círculo sin fin en esta definición:

Un problema que pueda ser definido en función de su tamaño, sea este N, pueda ser dividido en instancias más pequeñas ($< N$) del mismo problema y se conozca la solución explícita a las instancias más simples, lo que se conoce como casos base, se puede aplicar inducción sobre las llamadas más pequeñas y suponer que estas quedan resueltas.

En Teoría de la Computabilidad, la recursión primitiva permite definir una clase de funciones que forman un importante paso en la formalización de la noción de computabilidad. Se definen usando como principales operaciones la recursión y la composición de funciones, y forman un subconjunto estricto de las funciones recursivas.

(3) ¿Qué es computabilidad? Consiste en ser capaz de encontrar la representación adecuada para la descripción de un problema o fenómeno.

Para tal representación es necesario:

- Un conjunto finito de símbolos.
- Hacer asociaciones entre conceptos y elementos del lenguaje (de símbolos).
- Encontrar las combinaciones adecuadas de símbolos para evitar ambigüedad.
- Definir una manera de confirmar tal descripción para que terceros puedan reproducirla y llegar a los mismos resultados.
-

(4) Notación de Knuth: introducida en 1976 para representar números enormes

- Potencia (flecha simple): $\boxed{n^m = \underbrace{n \cdot \ldots \cdot n}_{m \text{ veces}} = n \uparrow m}$

$$3^4 = 3 \uparrow 4 = 3^4 = 81$$

- Doble flecha: $\boxed{n\uparrow\uparrow m = \underbrace{n^{n^{\cdot^{\cdot^{n}}}}}_{m \text{ veces } n}}$

$$2\uparrow\uparrow 3 = 2^{2^{2}} = 2^4 = 16$$
$$2\uparrow\uparrow 4 = 2^{2^{2^{2}}} = 2^{2^{4}} = 2^{16} = 65\ 536$$
$$3\uparrow\uparrow 3 = 3^{3^{3}} = 3^{27} = 7\ 625\ 597\ 484\ 987$$

- Triple flecha: $\boxed{n\uparrow\uparrow\uparrow m = \underbrace{n\uparrow\uparrow\left(n\uparrow\uparrow\left(...\uparrow\uparrow n\right)\right)}_{m \text{ veces } n}}$

$$3\uparrow\uparrow\uparrow 2 = 3\uparrow\uparrow 3 = 3\uparrow 3\uparrow 3 = 3^{3^{3}} = 3^{27} = 7\ 625\ 597\ 484\ 987$$

- k - flecha: $\boxed{n\uparrow^k m = n\underbrace{\uparrow...\uparrow}_{k \text{ flechas}} m = \underbrace{n\underbrace{\uparrow...\uparrow}_{k-1} n\underbrace{\uparrow...\uparrow}_{k-1} n...n\underbrace{\uparrow...\uparrow}_{k-1} n}_{m \text{ veces } n}}$

(5) Una **máquina de Turing** (concepto introducido por Turing en el trabajo "On *computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem*", publicado por la Sociedad Matemática de Londres en 1936) es un dispositivo que manipula símbolos sobre una tira de cinta de acuerdo a una tabla de reglas.
La máquina de Turing modela matemáticamente a una máquina que opera mecánicamente sobre una cinta. En esta cinta hay símbolos que la máquina puede leer y escribir, uno a la vez, usando un cabezal lector/escritor de cinta. La operación está completamente determinada por un conjunto finito de instrucciones elementales como "en el estado 42, si el símbolo visto es 0, escribe un 1; Si el símbolo visto es 1, cambia al estado 17; en el estado 17, si el símbolo visto es 0, escribe un 1 y cambia al estado 6; etc".

(6) Problema de la parada (halting problem)
El problema de la parada o problema de la detención (halting problem en inglés) para máquinas de Turing consiste en: dada una MT (Máquina de Turing) M y una palabra w, determinar si M terminará en un número finito de pasos cuando se ejecuta usando w como entrada.
Alan Turing, en su famoso artículo "On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem" (1936), demostró que el problema de la parada de la máquina de Turing es indecidible, en el sentido de que ninguna máquina de Turing lo puede resolver.

(7) Los **teoremas de incompletitud de Gödel** son dos célebres teoremas de lógica matemática demostrados por Kurt Gödel en 1931. Ambos están relacionados con la existencia de proposiciones indecidibles en ciertas teorías aritméticas.
El primer teorema de incompletitud afirma que, bajo ciertas condiciones, ninguna teoría matemática formal capaz de describir los números naturales y la aritmética con suficiente expresividad, es a la vez consistente y completa. Es decir, si los axiomas de dicha teoría no se contradicen entre sí, entonces existen enunciados que no pueden probarse ni refutarse a partir de ellos. En particular, la conclusión del teorema se aplica siempre que la teoría aritmética en cuestión sea recursiva, esto es, una teoría en la que el proceso de deducción pueda llevarse a cabo mediante un algoritmo.
El segundo teorema de incompletitud es un caso particular del primero: afirma que una de las sentencias indecidibles de dicha teoría es aquella que «afirma» la consistencia de la misma. Es decir, que, si el sistema de axiomas en cuestión es consistente, no es posible demostrarlo mediante dichos axiomas.

(8) Afirmaciones indecidibles

La existencia de una afirmación indecidible dentro de un sistema formal no es en sí misma un fenómeno sorprendente. El subsiguiente trabajo combinado de Gödel y Paul Cohen ha dado ejemplos concretos de afirmaciones indecidibles: tanto el axioma de elección[2] como la hipótesis del continuo[3] son indecidibles en la axiomatización estándar de teoría de conjuntos. Esos resultados no requieren del teorema de incompletitud.

En 1936, Alan Turing demostró que el problema de la parada es indecidible. Más tarde este resultado se generalizó en el campo de las funciones recursivas en el Teorema de Rice que demuestra que todos los problemas de decisión que no son triviales son indecidibles en un sistema que sea Turing-completo.

Gregory Chaitin produjo afirmaciones indecidibles en teoría algorítmica de la información y de hecho demostró su propio teorema de la incompletitud en ese contexto.

(9) Números de Rado

Él visualizó cada máquina de Turing como un castor bullendo ocupadamente a lo largo de la cinta, escribiendo y borrando símbolos. El desafío, entonces, es encontrar el castor más ocupado con exactamente n reglas, aunque no uno infinitamente ocupado. Podemos interpretar este desafío como la búsqueda del "más complicado" programa de ordenador de n bits de tamaño: el que hace la mayor cantidad de material, pero no una infinita cantidad. Ahora, supón que conocemos el n — ésimo número del castor ocupado (Busy Beaver), que llamaremos $BB(n)$. Entonces podríamos decidir si cualquier máquina de Turing con n reglas se para partiendo una cinta en blanco. Sólo tenemos que ejecutar la máquina: si se para, bien; pero si no se para en $BB(n)$ pasos, entonces sabemos que nunca se parará, puesto que $BB(n)$ es el máximo número de pasos que podría hacer antes de parar.

Antonio Cipriano Santiago Zaragoza
Profesor de Matemáticas
I.E.S. "Ramón Giraldo"

6. Webgrafía

Números grandes, enormes, descomunales y desorbitados
https://www.youtube.com/watch?v=8to6j4LpYAo
El número que los ordenadores nunca podrán calcular
https://www.youtube.com/watch?v=EtSN8GGBwsM

---

2 ***Axioma de elección***: Para cada conjunto A existe, al menos, una aplicación $\varphi : \wp(A)-\{\varnothing\} \to A$ tal que, para cada $B \in \wp(A)-\{\varnothing\}$ se verifica que $\varphi(B) \in B$.

3 ***Hipótesis del continuo (Cantor, 1878)***: Para cada $A \subset \mathbb{R}$, o bien $\operatorname{card}(A) = \chi_0$ o bien $\operatorname{card}(A) = c$

Cantor probó en 1873 que $\chi_0 < c$.

Finalmente, se probó que la hipótesis del continuo ni es falsa (Gödel, 1938), ni es verdadera (Cohen, 1964).