

# UNIDAD 8: LÍMITES Y CONTINUIDAD

## LÍMITES

### 1. LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Una **sucesión** de números reales es un conjunto ordenado de infinitos números reales. Los números reales  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  se llaman términos, de la sucesión y  $a_n$  término general. Se representa por  $\{a_n\}$ .

Más formalmente, una sucesión es una función

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \rightarrow f(n) := a_n$$

y así,  $f(1) = a_1, f(2) = a_2, \dots$

*Intuitivamente*, decimos que el límite de una sucesión  $\{x_n\}$  es el número  $L$  si los términos de dicha sucesión se van aproximando a  $L$ , y escribiremos  $\{x_n\} \rightarrow L$  o  $\lim x_n = L$  o  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = L$

Recuerda que el límite de una sucesión, si existe, es único.

Diremos que  $a \in \mathbb{R}$  es un punto de acumulación de  $D$ , y escribiremos  $a \in D'$ , cuando exista una sucesión  $\{x_n\}$  de puntos de  $D$  tal que  $\{x_n\} \rightarrow a$ .

**Criterio para los puntos de acumulación:** siempre que exista un intervalo abierto de centro  $a$  contenido en  $D$  se tendrá que  $a \in D'$ .

**Definición:** Sea  $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función,  $a \in D'$  y  $L \in \mathbb{R}$ . Diremos que el límite de  $f(x)$  cuando  $x \rightarrow a$  es  $L$ , y escribiremos  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , sii para valores de  $x$  cada vez más próximos a  $a$  (distintos de  $a$ ), los valores de las imágenes  $f(x)$  están cada vez más próximos a  $L$ .

#### Límites laterales:

El límite por la izquierda es el valor al que tiende la función  $f(x)$  cuando la variable  $x$  se aproxima a  $a$  siendo menor que  $a$ . Se denota por:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \quad \text{ó} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x)$$

El límite por la derecha es el valor al que tiende la función  $f(x)$  cuando la variable  $x$  se aproxima a  $a$  siendo mayor que  $a$ . Se denota por:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \quad \text{ó} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x)$$

Esto da lugar a la siguiente **caracterización**:

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lim_{x \rightarrow a^-} f(x), \exists \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \\ \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \end{cases}$$

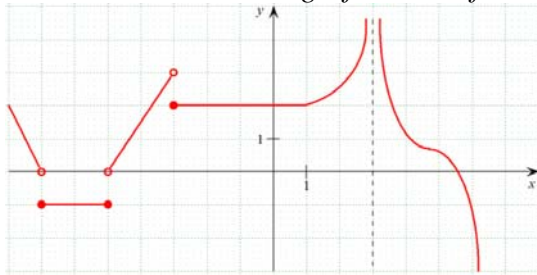
En cuyo caso  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$

**Ejercicios:**

1. Mediante tablas calcula:

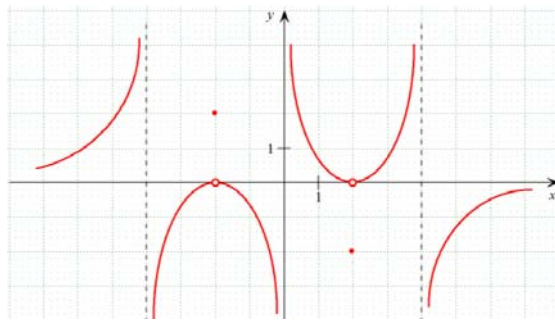
a)  $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 2)$       b)  $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 2)$       c)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} (3x - 1)$       d)  $\lim_{x \rightarrow -3^-} (9 + x^2)$

2. Teniendo en cuenta la gráfica de la función, calcula los siguientes límites:

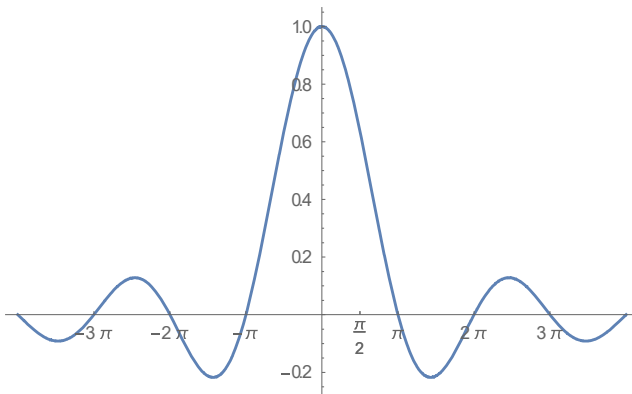


a)  $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$   
 b)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$   
 c)  $\lim_{x \rightarrow 7} f(x)$

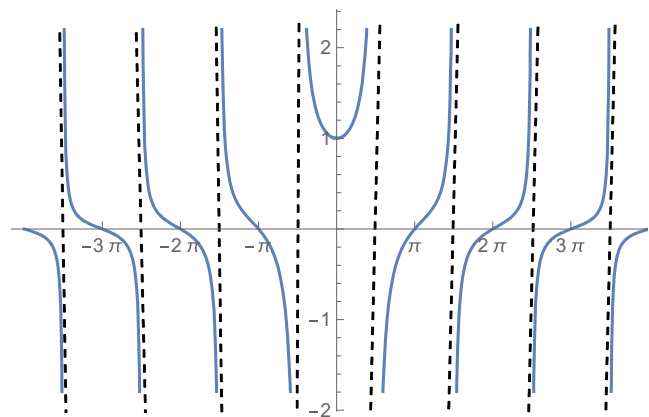
3. A partir de la gráfica de la función, justifica que  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2)$  :



4. Calcula  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x}$  y  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg } x}{x}$ , teniendo en cuenta su gráfica<sup>1</sup>:



$$f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$$



$$g(x) = \frac{\text{tg } x}{x}$$

<sup>1</sup> Estos dos límites son importantes y debes recordarlos.

## 2. LÍMITES INFINITOS: ASÍNTOTAS VERTICALES

Decir que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  significa que cuando  $x$  tiende a  $a$ , con  $x < a$ ,  $f(x)$  toma valores mayores que cualquier número real  $k$ .

Análogamente, decir que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$  significa que cuando  $x$  tiende a  $a$ , con  $x < a$ ,  $f(x)$  toma valores cada vez más pequeños.

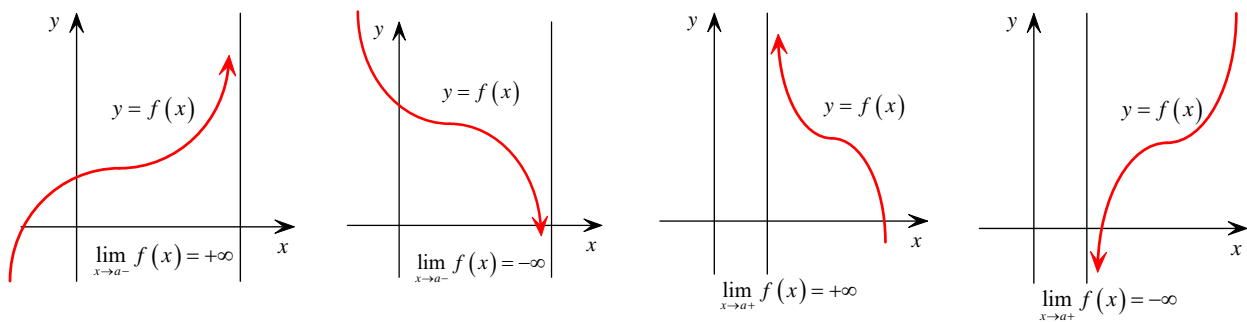
Llamamos asíntotas de una función a las rectas que se aproxima la función en el infinito.

La recta  $x = a$  es una asíntota vertical de  $f(x)$  sii existe alguno de los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

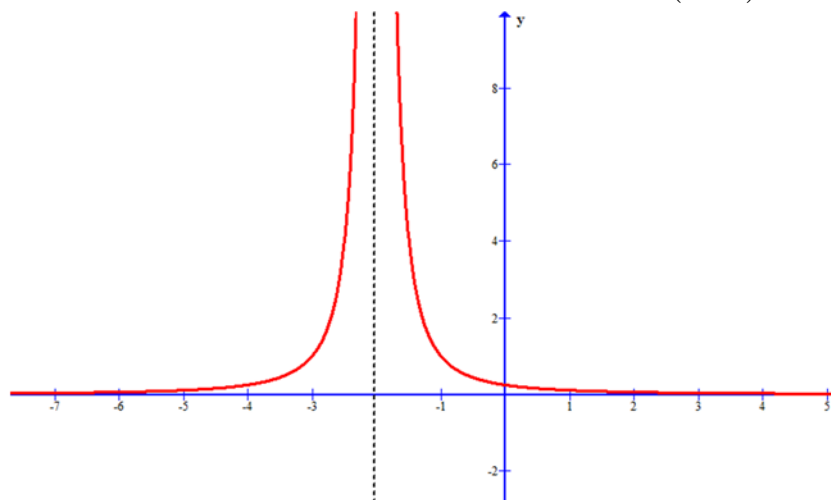


### Observaciones:

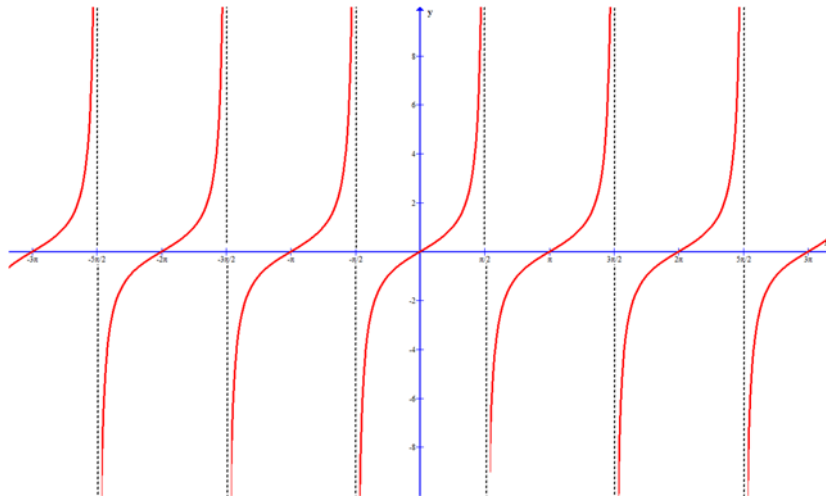
- (1) Una función  *puede tener infinitas asíntotas verticales.*
- (2) En las funciones racionales las asíntotas verticales se hallan en los valores  $x$  que anulan al denominador.
- (3) La gráfica de  *la función no puede cortar a las asíntotas verticales.*

### Ejemplos:

- 1) La recta  $x = -2$  es una asíntota vertical de la función  $f(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$ .



2) La función  $f(x) = \operatorname{tg} x$  tiene infinitas asíntotas verticales:  $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$  con  $n \in \mathbb{Z}$



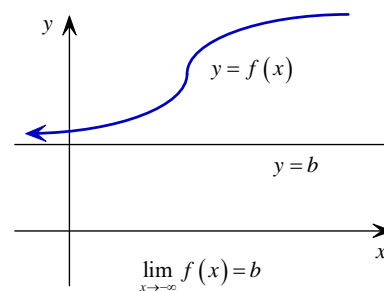
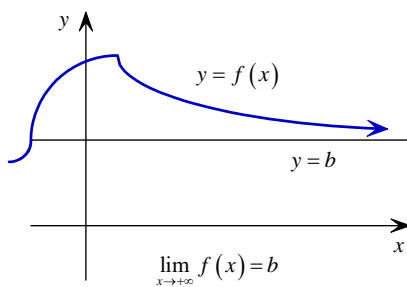
### 3. LÍMITES EN EL INFINITO: ASÍNTOTAS HORIZONTALES

Decir que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$  significa que cuando  $x$  se hace tan grande como queramos, la función toma valores muy próximos un número fijo  $b$ .

De igual modo,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$  significa que  $f(x)$  se aproxima a  $b$  cuando  $x$  se hace cada vez más pequeño.

La recta  $y = k$  es una asíntota horizontal de  $f(x)$  sii existe alguno de los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = k \quad \text{o} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = k$$



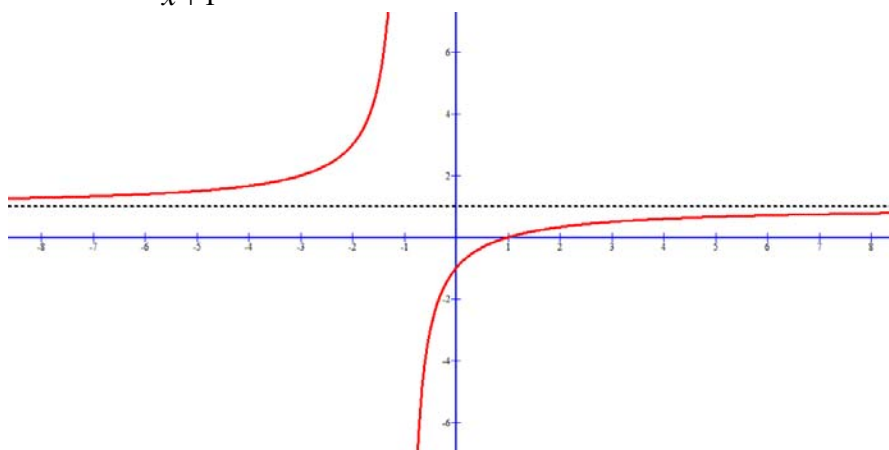
**Observaciones:**

- (1) Una función tiene como máximo dos asíntotas horizontales.
- (2) La gráfica de la función puede cortar a las asíntotas horizontales.
- (3) Para funciones racionales:
  - Si en una función racional el grado del numerador es menor que el grado del denominador la recta  $y = 0$  (el eje  $OX$ ) es una asíntota horizontal.

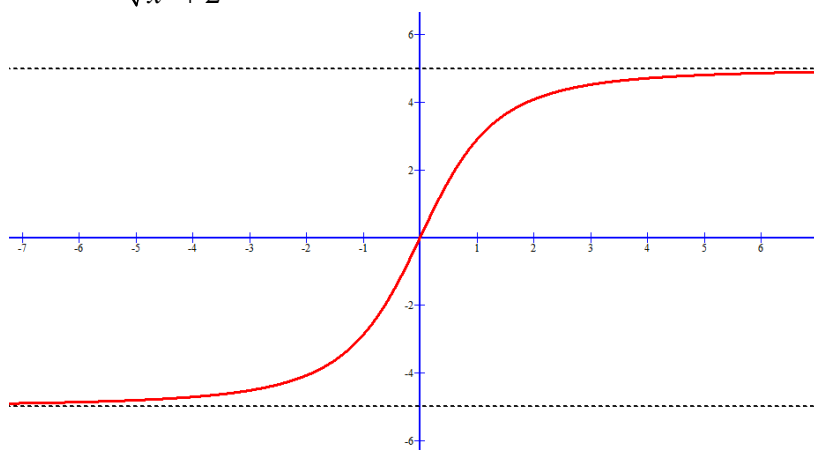
- Si en una función racional el grado del numerador y el del denominador son iguales la recta  $y = b$  será una asíntota horizontal ( $b$  indica el cociente entre los coeficientes líderes del numerador y del denominador).
- Si en una función racional el grado del numerador es una unidad mayor que el grado del denominador la función presenta una asíntota oblicua y no hay asíntotas horizontales.
- Si en una función racional el grado del numerador es dos o más unidades mayor que el grado del denominador hay asíntota horizontal.

**Ejemplos:**

1) La función  $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$  tiene una asíntota horizontal, que es la recta  $y = 1$ .



2) La función  $f(x) = \frac{5x}{\sqrt{x^2 + 2}}$  tiene dos asíntotas horizontales; las rectas  $y = 5$  e  $y = -5$ .



## **4. LÍMITES INFINITOS EN EL INFINITO: ASÍNTOTAS OBLICUAS**

También puede suceder que  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ , lo que significa que  $x$  y  $f(x)$  se hacen infinitamente grandes a la vez. Por tanto:  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow f(x) > k$  para todo  $x > p$ , siendo  $k$  y  $p$  números arbitrariamente grandes.

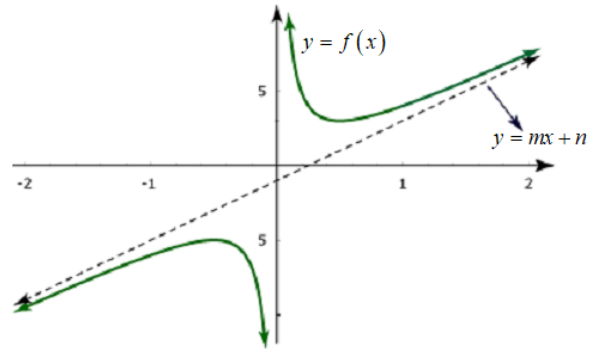
La recta  $y = mx + n$ , con  $m \neq 0$ , es una asíntota oblicua de  $f(x)$  si existe alguno de los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx - n) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx - n) = 0$$

en cuyo caso

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{y} \quad n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx)$$

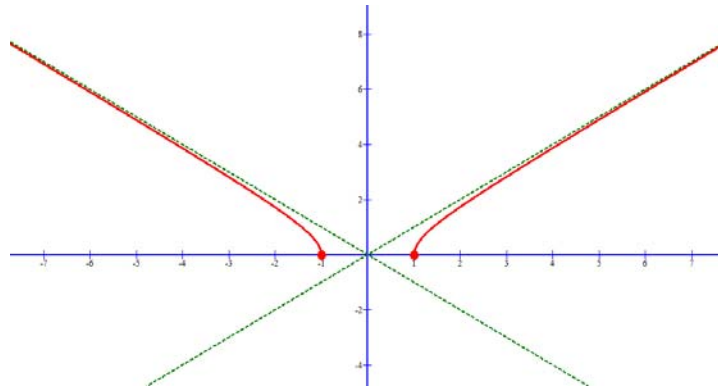


**Observaciones:**

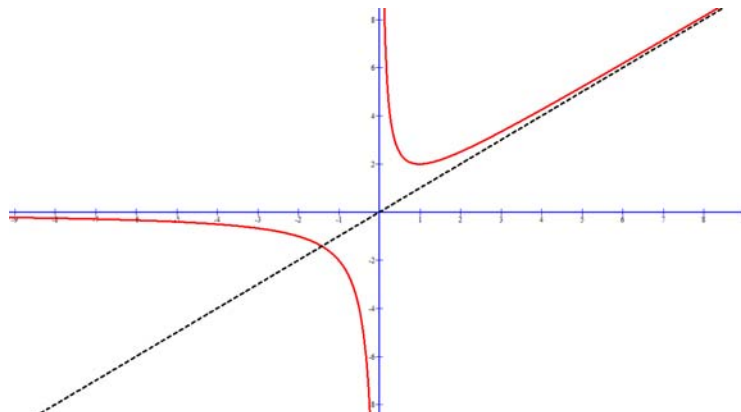
- (1) Una función puede tener como máximo dos asíntotas oblicuas.
- (2) Si una función tiene asíntota oblicua no tiene asíntota horizontal y recíprocamente.
- (3) La gráfica de la función puede cortar a las asíntotas oblicuas en uno o varios puntos.
- (4) Si en una función racional el grado del numerador es dos o más unidades mayor que el del denominador, no hay asíntota oblicua.

**Ejemplos:**

- 1) La función  $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$  tiene dos asíntotas oblicuas, que son las rectas  $y = x$  e  $y = -x$ .



- 2) La función  $f(x) = x^{|x|} + \frac{1}{x}$  tiene una asíntota oblicua solo, por un lado, que es la recta  $y = x$ .



## 5. OPERACIONES CON LÍMITES DE FUNCIONES

1)  $\lim_{x \rightarrow a} k = k$  donde  $k \in \mathbb{R}$

El límite de un número es el propio número.

2)  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

El límite de una suma (resta) es igual a la suma (resta) de los límites.

3)  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

El límite de un producto es igual al producto de los límites.

4)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$  siempre que  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$

El límite de un cociente es igual al cociente de los límites

4)  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)^{g(x)}] = \left[ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$  siempre que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) > 0$

El límite de una potencia es igual a la potencia de los límites.

5)  $\lim_{x \rightarrow a} [\log_A f(x)] = \log_A \left[ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]$  siempre que  $f(x) > 0$  y  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) > 0$

El límite de un logaritmo es igual al logaritmo del límite.

## 6. REGLAS PARA EL CÁLCULO DE LÍMITES

**Regla I:** Para calcular el límite de una función, cuando  $x \rightarrow a \in \mathbb{R}$ , basta con sustituir  $a$  en la función y si nos da un número real, ya está resuelto.

*¡¡Inconveniente!!* Que no siempre vamos a obtener un número real.

**Regla II:** Las funciones polinómicas, cuando  $x \rightarrow \pm\infty$ , se comportan del mismo modo que su término de mayor grado.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n$$

**Regla III:** Límite de una potencia y de una exponencial:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^n = \begin{cases} \pm\infty & \text{si } n > 0 \\ 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n < 0 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} n^x = \begin{cases} \pm\infty & \text{si } n > 1 \\ 0 & \text{si } 0 < n < 1 \\ \not\exists & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

**Regla IV:**

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n + \dots + a_0}{b_m x^m + \dots + b_0} = \begin{cases} \pm\infty & \text{si } n > m \\ \frac{a_n}{b_m} & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n < m \end{cases}$$

**Regla V:** Cuando al aplicar la regla I en el cálculo de límites el resultado obtenido no tiene sentido, aparecen las indeterminaciones, que son expresiones como las siguientes:

<b>Indeterminaciones</b>	$\frac{+\infty}{+\infty}$	$\frac{+\infty}{-\infty}$	$\frac{-\infty}{+\infty}$	$\frac{-\infty}{-\infty}$
<b>Tipo</b>	$\frac{\infty}{\infty}$			
<b>Indeterminaciones</b>	$(+\infty) - (+\infty)$ $(-\infty) - (-\infty)$		$(+\infty) + (-\infty)$ $(-\infty) + (+\infty)$	
<b>Tipo</b>	$\infty - \infty$			

<b>Indeterminaciones</b>	$(\pm\infty) \cdot 0$	$0 \cdot (\pm\infty)$	$\frac{L}{0}$	$\frac{\pm\infty}{0}$	$\frac{0}{0}$
<b>Tipo</b>	$0 \cdot \infty$		$\frac{K}{0}$		$\frac{0}{0}$

<b>Indeterminaciones</b>	$0^0$	$(\pm\infty)^0$	$1^{+\infty}$	$1^{-\infty}$
<b>Tipo</b>	$0^0$	$\infty^0$	$1^\infty$	

## 7. OPERACIONES CON EXPRESIONES INFINITAS

### 7.1. SUMAS

$$\left. \begin{aligned} +\infty + n &= +\infty \\ -\infty + n &= -\infty \end{aligned} \right\} \text{ donde } n \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} +\infty + (+\infty) &= +\infty \\ -\infty + (-\infty) &= -\infty \\ -(-\infty) &= +\infty \end{aligned}$$

### 7.2. PRODUCTOS

$$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$$

$$\text{Si } n > 0 \Rightarrow \begin{cases} (+\infty) \cdot n = +\infty \\ (-\infty) \cdot n = -\infty \end{cases}$$

$$\text{Si } n < 0 \Rightarrow \begin{cases} (+\infty) \cdot n = -\infty \\ (-\infty) \cdot n = +\infty \end{cases}$$

### 7.3. COCIENTES

$$\left. \begin{aligned} \frac{n}{+\infty} &= 0 \\ \frac{n}{0} &= \pm\infty \text{ si } n \neq 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \frac{+\infty}{0} &= \pm\infty \\ \frac{0}{+\infty} &= 0 \end{aligned}$$

### 7.4. POTENCIAS

$$\begin{aligned} (+\infty)^{+\infty} &= +\infty \\ (+\infty)^{-\infty} &= 0 \\ \text{Si } n > 0 \Rightarrow (+\infty)^n &= +\infty \\ \text{Si } n < 0 \Rightarrow (+\infty)^n &= 0 \end{aligned}$$



$$\text{Si } n \neq 0 \Rightarrow n^0 = 1$$

$$\text{Si } n > 1 \Rightarrow \begin{cases} n^{+\infty} = +\infty \\ n^{-\infty} = 0 \end{cases}$$

$$\text{Si } 0 < n < 1 \Rightarrow \begin{cases} n^{+\infty} = 0 \\ n^{-\infty} = +\infty \end{cases}$$

El conjunto  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  se denomina recta real ampliada o completa, y verifica:

- $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$
- $\overline{\mathbb{R}}$  es un conjunto totalmente ordenado, ya que  $-\infty < a$  y  $+\infty > a \quad \forall a \in \mathbb{R}$ .
- $\overline{\mathbb{R}}$  está acotado, ya que lo está superiormente por  $+\infty$  e inferiormente por  $-\infty$ .

## 8. RESOLUCIÓN DE INDETERMINACIONES

Cuando al calcular el límite de una suma, un producto, un cociente o una potencia de funciones no se pueden aplicar las propiedades de los límites, es decir, hay que hacer un estudio particular de cada caso, suele decirse que estos límites presentan una **indeterminación**.

### 8.1. INDETERMINACIÓN DEL TIPO $\left[ \frac{k}{0} \right]$ **CON** $k \in (\mathbb{R} - \{0\}) \cup \{\pm\infty\}$

Se calculan los límites laterales:  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$

Si existen ambos límites y coincide su valor, entonces:

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

Si no existe alguno de los límites laterales o no coincide su valor, entonces, no existe  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ .

### 8.2. INDETERMINACIÓN DEL TIPO $\left[ \frac{0}{0} \right]$

#### a) Para funciones racionales

Se descomponen numerador y denominador en factores y se simplifica.

#### b) Para funciones irracionales

Si se trata de una función con raíces cuadradas en el numerador (o en el denominador), multiplicamos numerador y denominador por la expresión conjugada del numerador (o del denominador).

### 8.3. INDETERMINACIÓN DEL TIPO $\left[ \frac{\infty}{\infty} \right]$

Se divide numerador y denominador por la mayor potencia de  $x$  que aparezca en la función (basta con dividir por la mayor potencia de  $x$  del denominador).

### 8.4. INDETERMINACIÓN DEL TIPO $[\infty - \infty]$

#### a) La función es diferencia de dos funciones racionales

Se efectúa dicha operación.

**b) La función es diferencia de funciones irracionales**

Multiplicamos y dividimos por la expresión conjugada de la función.

**8.5. INDETERMINACIÓN DEL TIPO  $[0 \cdot \infty]$**

Transformar esta indeterminación en una de las anteriores, generalmente efectuando las operaciones.

**8.6. INDETERMINACIÓN DEL TIPO  $[1^\infty]$**

Se resuelve empleando la siguiente igualdad:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x)[f(x)-1]}$$

donde  $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} := \overline{\mathbb{R}}$  y sabemos que

$$e = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 2,718281... \in \mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$$

**Ejercicios:**

**5.** Estudia qué tipo de indeterminación<sup>2</sup> presentan los siguientes límites:

a)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x + 2}$

d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^6 + x}{x^4 - 3}$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 - 3x}{x^2 + x^3}\right)^{3x}$

e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x^2 - 1}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \sqrt{x^3 + x}\right)$

f)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{x+3} - (x^2 + 1)\right]$

**6.** (Indeterminación del tipo  $\frac{k}{0}$  con  $k \neq 0$ ). Calcula los siguientes límites:

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3}{(x-1)^2}$

e)  $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{2x}{x^2 - 16}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$

f)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{5x}{9 - x^2}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + 6}{5x^2}$

g)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + 8}{x^4 + 2x^2}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 5}{x^2}$

h)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 1}{x^3 + 1}$

<sup>2</sup> Recuerda que los tipos de indeterminaciones que se pueden presentar son:  $\frac{k}{0}$  con  $k \in (\mathbb{R} - \{0\}) \cup \{\pm\infty\}$ ,  $\frac{0}{0}$ ,

$\frac{\infty}{\infty}$ ,  $\infty - \infty$ ,  $1^\infty$ ,  $\infty^0$ ,  $0^0$ ,  $\infty \cdot 0$

7. (Indeterminación del tipo  $\frac{0}{0}$ ). Calcula los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^4 - 1}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+5} - 3}{x - 4}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^2 - 1}{x}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x-6}{(x-2)^2}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{x+4} - 2}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{-1-x}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x+4}{x^2-4}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{9-x^2}{2-\sqrt{x^2-5}}$$

8. (Indeterminación del tipo  $\frac{\infty}{\infty}$ ). Calcula el valor de los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 24}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^3 - 1}}{3x^4}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1+x)^2 - 1}{x}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 6x + 8}{2x^2 - 5}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2 - 1}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 7}{\sqrt[3]{x^6 + x}}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - x^6}{x^3 + 1}$$

9. (Indeterminación del tipo  $\infty - \infty$ ). Calcula los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+5} - \sqrt{x-5})$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^4 + x} - 4x^2)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 - x + 1}{x + 1} - x \right)$$

$$f) \lim_{x \rightarrow +\infty} (8x - \sqrt{16x^2 - 3x})$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^4 + 1} - x^2)$$

$$g) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x+5}{2} - \frac{x^2-1}{x} \right)$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2x}{x^2-1} - \frac{1}{x-1} \right)$$

$$h) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2 + 3x - 2} - 4x)$$

10. (Indeterminación del tipo  $0 \cdot \infty$ ). Calcula los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{3}{x^3} \cdot \frac{x^2 + 5x}{4} \right)$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{x-2}{5} \cdot \sqrt{\frac{1}{x-2}} \right)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2}{x} \cdot \sqrt{x^2 + 8} \right)$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 4} \left( \sqrt{x^2 - 16} \cdot \sqrt{\frac{x}{x-4}} \right)$$

$$\begin{array}{ll} c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \left( \sqrt{x^4 + x} - x \right) \frac{1}{x} \right] & g) \lim_{x \rightarrow 2} \left( \sqrt{x^2 - 4} \cdot \frac{8}{3x - 6} \right) \\ d) \lim_{x \rightarrow 3} \left[ (x^2 - 9) \cdot \frac{1}{x - 3} \right] & h) \lim_{x \rightarrow -1} \left( \frac{5}{4x + x} \cdot \frac{x + 1}{7x} \right) \end{array}$$

**11.** (Indeterminación del tipo  $1^\infty$ ). Calcula el valor de los siguientes límites<sup>3</sup>:

$$\begin{array}{ll} a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2}{x^2 + 2} \right)^{5x} & d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{4x + 3}{4x - 5} \right)^{2x} \\ b) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 7x)^{\frac{4}{x}} & e) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{6}{x}} \\ c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{5x^3}{5x^3 - 7} \right)^{2x} & f) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 1 - \frac{2x}{x^2 - 1} \right)^{-4x} \end{array}$$

**12.** Calcula los siguientes límites:

$$\begin{array}{lll} a) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3}{x^2 - 2ax + a^2} & b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x} & c) \lim_{x \rightarrow 4} (5-x)^{\frac{2x+8}{x-4}} \\ d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x - 3} - x & e) \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{3x+1}{2x+2} \right)^{\frac{6x}{x^2-3x+2}} & f) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 81}{x^2 - 9x + 18} \\ g) \lim_{x \rightarrow 0} x \sqrt{x^2 + x + 1} & h) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x} - 2}{\sqrt{8+x} - 3} & i) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 5x + 2}{2x^2 + x - 3} \\ j) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 4x - 1}{5x^3 + 2x - 3} & k) \lim_{x \rightarrow \sqrt{5}} (x^2 - 4)^{\frac{x}{x^2-5}} & l) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x-a}{x^3 - a^3} \\ m) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 27}}{\sqrt[3]{x^2 + 6x - 27}} & n) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^5 - a^5}{x^2 - 3ax + 2a^2} & o) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{x} \\ p) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x - 10} & q) \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1} \right)^{\frac{3}{x-1}} & r) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 5x^2 + 5x - 2}{2x^2 + 5x + 2} \\ s) \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} & t) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{2}{3x} \right)^{\frac{x-1}{x+2}} & u) \lim_{x \rightarrow \frac{5}{2}} \frac{3x+1}{2x-5} \end{array}$$

**13.** Estudia las asíntotas de las siguientes funciones.

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = \frac{x+2}{x-1} & e) f(x) = \frac{x^2}{x-1} \\ b) f(x) = \frac{x-x^2}{x+1} & f) f(x) = \frac{x^2+3x}{2x-1} \\ c) f(x) = \frac{9-x^2}{x-3} & g) f(x) = \frac{x^2-3x-4}{x^2-5x+4} \end{array}$$

<sup>3</sup> Recuerda que  $e = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = 2,718281... \in \mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

$$d) f(x) = \frac{x^2 - x}{2x}$$

$$h) f(x) = \frac{x(x^2 - x)}{x^2}$$

**14.** Dadas las siguientes funciones calcula sus asíntotas verticales, horizontales y/o oblicuas, si existen:

$$a) f(x) = x^2 - 4x + 3$$

$$c) h(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

$$b) g(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

$$d) j(x) = \frac{2x+3}{x-2}$$

# CONTINUIDAD DE FUNCIONES

## 9. CONCEPTO DE FUNCIÓN CONTINUA

### 9.1. Definición. Caracterización

Sea  $I$  un intervalo. La función  $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es continua en el punto  $\boxed{x = a \in I}$  cuando

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad (1)$$

Aclaraciones:

- Para que una función sea continua en un punto, dicho punto ha de pertenecer a su dominio de definición. En otro caso, no tiene sentido hablar de continuidad.

No tiene sentido decir que la función  $y = \frac{1}{x}$  no es continua en  $x = 0$ , por que dicho punto no pertenece a su dominio.

- La condición (1) de continuidad implica:
  - $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$
  - $\exists f(a)$
  - Dichos valores coincidan:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

### Ejemplos:

- 1) La función  $f(x) = x^2 \cos x$  es continua en  $x = 0$ , ya que

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos x = 0 \\ f(0) = 0^2 \cos 0 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \Rightarrow f \text{ es continua en } x = 0$$

- 2) La función  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$  no es continua en  $x = 0$ , ya que

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \\ f(0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0) \Rightarrow f \text{ NO es continua en } x = 0$$

Una función es continua cuando lo es en todos los puntos de su dominio de definición.

Una función es continua por la derecha en un punto si existe límite por la derecha en él y coincide con el valor que toma la función en ese punto:

$$f \text{ continua en } x = a \text{ por la derecha} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

Una función es continua por la izquierda en un punto si existe límite por la izquierda en él y coincide con el valor que toma la función en ese punto:

$$f \text{ continua en } x = a \text{ por la izquierda} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

**Caracterización:**

Una función es continua en un punto cuando es continua por la izquierda y por la derecha en ese punto:

$$f \text{ continua en } x = a \Leftrightarrow f \text{ continua por la derecha y por la izquierda en } x = a$$

Como **consecuencia**, la continuidad de una función en un punto solo depende de su comportamiento en puntos "suficientemente próximos" a él, es decir, la continuidad de una función en un punto es una propiedad local (en el siguiente apartado incidiremos en este punto).

**Ejercicios:**

15. La función  $f(x) = \frac{x-3}{x^2-9}$ , ¿es continua en  $x = -3$  ?

16. Representa la función  $f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{si } x \geq 3 \\ 4-x & \text{si } 1 \leq x < 3, \\ 2 & \text{si } x < 1 \end{cases}$  y estudia su continuidad en los puntos

$x = 1$  y  $x = 3$ .

Una función es continua en  $[a, b]$  cuando:

- (1) Sea continua en el intervalo abierto  $(a, b)$
- (2) Sea continua por la derecha en  $a$
- (3) Sea continua por la izquierda en  $b$

**Ejercicios:**

17. Estudiar la continuidad de la función  $f(x) = |x|$  en  $x = 0$ .

18. Calcula  $k$  para que la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2-1} & \text{si } x \neq 1 \\ k & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

sea continua en  $x = 1$ .

19. ¿Cuál debe ser el valor de  $k$  para que la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4-(x+2)^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

sea continua en  $x = 0$  ?

20. Estudia la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

en  $x = 0$ .

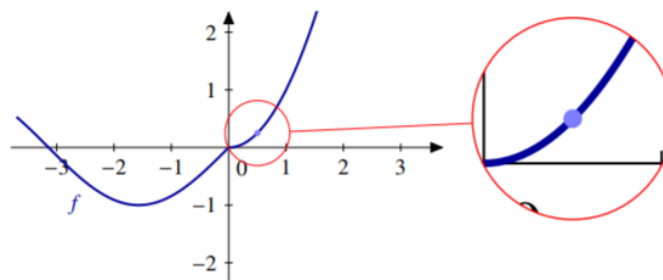
### 9.2. Carácter local de la continuidad

La continuidad de una función en un punto solo depende del comportamiento de dicha función "cerca" de dicho punto. Este hecho lo aplicamos, sin darnos cuenta, cada vez que estudiamos la continuidad de una función definida a trozos, como hemos visto en los ejercicios anteriores y como podemos ver en el siguiente **ejemplo**:

Cuando decimos que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ \text{sen } x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

es continua en  $(0, +\infty)$  solo nos estamos fijando en  $x^2$  que, evidentemente, es una función continua. En otras palabras, la continuidad de  $f$  en el punto  $x = 0,5$  no depende del comportamiento de dicha función en  $(-\infty, 0)$ .



### 9.3. Operaciones con funciones continuas

#### a) Continuidad de la suma/resta de funciones

Si  $f$  y  $g$  son funciones continuas en  $x = a$ , entonces la función  $f + g$  es continua en  $x = a$ .

En efecto:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f \pm g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = f(a) \pm g(a) = (f \pm g)(a)$$

#### b) Continuidad de la función opuesta

Si  $f$  es una función continua en  $x = a$ , entonces la función  $-f$  es continua en  $x = a$ .

En efecto:

$$\lim_{x \rightarrow a} (-f)(x) = -\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -f(a)$$

#### c) Continuidad del producto de un número real por una función

Si  $f$  es una función continua en  $x = a$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$ , entonces la función  $\alpha f$  es continua en  $x = a$ .

En efecto:

$$\lim_{x \rightarrow a} (\alpha f)(x) = \lim_{x \rightarrow a} \alpha f(x) = \alpha \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha f(a)$$

#### d) Continuidad del producto de funciones

Si  $f$  y  $g$  son funciones continuas en  $x = a$ , entonces la función  $fg$  es continua en  $x = a$ .

En efecto:

$$\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) = \lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \lim_{x \rightarrow a} g(x) = f(a)g(a) = (fg)(a)$$

#### e) Continuidad del cociente de funciones



Si  $f$  y  $g$  son funciones continuas en  $x = a$ , entonces la función  $\frac{f}{g}$  es continua en  $x = a$ .

En efecto:

$$\lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f}{g} \right)(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)} = \left( \frac{f}{g} \right)(a)$$

**f) Continuidad de la función compuesta**

Si  $f$  es una función continua en  $x = a$  y  $g$  es una función continua en  $f(a)$ , entonces la función  $g \circ f$  es continua en  $x = a$ .

**Ejemplo:**

La función  $h: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $h(x) = \left( \frac{x^2 + x + 1}{x - 1} \right)^2$  es continua en  $\mathbb{R} - \{1\}$ , ya que  $h$  puede

verse como función compuesta de las funciones:

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x - 1} \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$$

$$g(x) = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

de la siguiente forma:  $h(x) = (g \circ f)(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$ .

Puesto que  $f$  y  $g$  son continuas en  $\mathbb{R} - \{1\}$ , lo mismo sucede con  $h$ .

**9.4. Continuidad de las funciones elementales**

- Las **funciones polinómicas**,  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ , son continuas en todos los puntos de su dominio, que es  $\mathbb{R}$ .
- Las **funciones racionales**,  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ , son continuas (en su dominio).
- La **función exponencial**,  $y = e^{f(x)}$ , es continua siempre que lo sea  $f(x)$ .
- La **función logarítmica**,  $y = \log f(x)$ , es continua en todo punto  $x$ , tal que  $f(x) > 0$  y  $f(x)$  sea continua.
- Las **funciones trigonométricas**,  $y = \text{sen } x$ ,  $y = \text{cos } x$ , son siempre continuas. La función  $y = \text{tg } x$  es continua en su dominio:  $\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \right\}$
- Las **funciones definidas a trozos** serán continuas si lo son en sus intervalos respectivos y en los puntos de unión. En estos puntos habrá que ver que la función esté definida y que los límites laterales existan, sean iguales y que dichos valores coincidan con el valor de la función en dicho punto.

**Ejercicios:**

21. Se considera la función  $f(x)$  definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ 3x + b & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ ax^2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Calcula los valores de  $a$  y  $b$  para que  $f(x)$  sea continua en todos los puntos.

**22.** Halla  $k$  para que las siguientes funciones sean continuas:

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^3 - 8x^2 + 20x - 16} & x \neq 2 \\ k + 1 & x = 2 \end{cases} \quad b) g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1} & x < 1 \\ k & x = 1 \\ \frac{\sqrt{x+3} - 2}{\sqrt{5-x} - 2} & x > 1 \end{cases}$$

**23.** Estudia la continuidad de las funciones:

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & -2 < x \leq 1 \\ x^2 + 4 & 1 < x < 2 \\ 7 & x = 2 \\ 2x + 4 & 2 < x < 5 \\ 3x - 1 & 5 \leq x \leq 7 \\ \frac{-3x + 1}{x - 7} & x > 7 \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} 4x + 5 & x < 0 \\ x + 5 & 0 \leq x < 1 \\ 6x & 1 < x < 2 \\ -4x & 2 < x < 3 \\ \frac{x^2 - 9}{-x + 3} & 3 < x \leq 10 \\ \frac{1}{x - 10} & x > 10 \end{cases}$$

**24.** ¿Cómo deberá definirse  $f(x)$  para que la función  $f(x) = \frac{5 - \sqrt{24 + x}}{x - 1}$   $x \neq 1$ , sea continua en  $x = 1$ ?

**25.** Estudiar la continuidad de la siguiente función:  $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 2 \\ \frac{|x-2|}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \end{cases}$

**26.** Calcula los valores de  $M$  y  $N$  para que la función  $f$  sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^4 - 3x^3 - 11x^2 + 23x + 6}{x^2 + x - 6} & \text{si } x \neq -3 \text{ y } x \neq 2 \\ N & \text{si } x = -3 \\ M & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

**27.** Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

$$a) f(x) = \frac{4 - x^2}{3 - \sqrt{x^2 + 5}} \quad b) f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{(x - 1)^2}$$

28. Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-3} & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2 + 14 & \text{si } 0 < x \leq 3 \\ \sqrt{x^2 + 16} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

### 9.5. Clasificación de las discontinuidades

Si una función no es continua **en un punto de su dominio**, se dice que es discontinua en dicho punto.

- 1) Si  $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  y  $L \neq f(a)$  entonces se dice que  $f$  tiene una **discontinuidad evitable en el punto**  $x = a$ .

El valor que deberíamos darle a la función en dicho punto para que fuera continua en él se llama valor verdadero de la función en  $a$ , y es:

$$f(a) := \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

#### Ejemplos:

- (1) La función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$  tiene una discontinuidad evitable en

$x = 0$ , ya que  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 1) = 2 \neq -1 = f(-1)$ .

El valor verdadero de  $f$  en  $x = 0$  es  $f(0) = 0$ .

- (2) La función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \neq -1 \\ -1 & \text{si } x = -1 \end{cases}$  tiene una discontinuidad evitable

en  $x = -1$ , ya que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \neq 1 = f(1)$ .

El valor verdadero de  $f$  en  $x = -1$  es  $f(-1) = 2$ .

- 2) Si  $\exists \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$ ,  $\exists \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L'$  y  $L \neq L'$  se dice que  $f$  presenta una **discontinuidad de salto o de primera especie en**  $a$

En este caso, el valor

$$\left| \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) - \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right|$$

se llama salto de la función en  $a$ , y puede ser finito o infinito.

#### Ejemplos:

- (1) La función "signo de  $x$ ",  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$  tiene una

discontinuidad de salto finito en  $x = 0$ , ya que  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 \neq 1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ .

(2) La función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$  tiene una discontinuidad de salto

finito en  $x = 0$ , ya que  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 \neq 1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ .

3) Las discontinuidades que no sean ni evitables ni de primera especie se denominan **discontinuidades de segunda especie o esenciales**, es decir, cuando al menos uno de los límites laterales no exista.

**Ejemplos:**

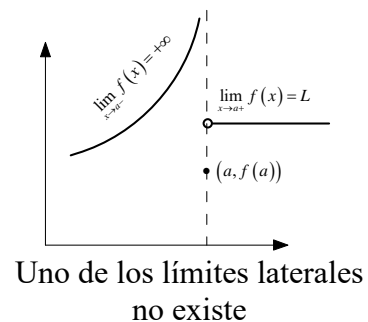
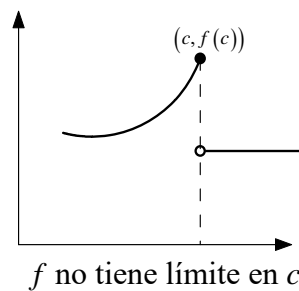
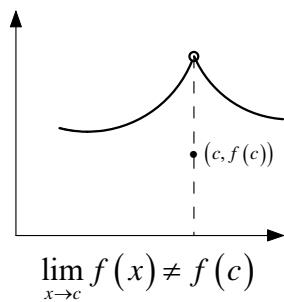
(1) La función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$  tiene una discontinuidad de segunda

especie (o esencial) en  $x = 0$ , ya que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$ .

(2) La función  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \in \mathbb{Q} \text{ y } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \in \mathbb{I} \text{ y } x < 0 \end{cases}$  tiene una discontinuidad de segunda especie (o

esencial) en  $x = 0$ , ya que la función no está acotada y carece de límites laterales en el origen.

Veamos gráficamente las situaciones en las que una función no es continua en un punto:



Aunque la definición de función discontinua en un punto es clara, parece que no todos los autores usan la misma definición de discontinuidad [Consultar, por ejemplo, Gilbert Strang "Calculus", Wellesley-Cambridge Press, que remite a un artículo de la revista Mathematics Teacher (may, 1989)].

El **criterio adoptado por la UCLM en la EvAU** es el siguiente:

Una **función** es **discontinua en un punto** cuando falla alguna de las tres condiciones de la definición de función continua en un punto, esto es:

Una función es discontinua en  $a$  cuando:

i)  $\nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  ( $\exists \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$ ,  $\exists \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L'$  y  $L \neq L'$ ), en cuyo caso diremos que  $f$  presenta una **discontinuidad de salto** (finito o infinito).

ii)  $\begin{cases} \nexists f(a) \\ \text{o} \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a) \end{cases}$ , en cuyo, caso diremos que  $f$  presenta una **discontinuidad evitable**.

iii) al menos uno de los límites laterales no exista, diremos que  $f$  presenta una **discontinuidad de segunda especie o esencial**.

Un par de **resultados** que es importante conocer y memorizar:

- Toda función continua en un intervalo de la forma  $[a, b]$  tiene máximo y mínimo absolutos.
- Bajo la hipótesis adicional de que la función sea inyectiva, el máximo y el mínimo (absolutos) se alcanzan en los extremos del intervalo.

### Ejercicios:

**29.** Clasifica las discontinuidades de las siguientes funciones:

a)  $f(x) = \frac{x^3 - x}{x - 1}$

b)  $g(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

c)  $h(x) = \text{sen} \frac{1}{x}$  (dicha función no tiene límite, porque oscila entre  $-1$  y  $1$  en un entorno de cero)

(En el caso de que la función tenga una discontinuidad evitable, dar el valor verdadero de la función en dicho punto).

**30.** Clasifica las discontinuidades de las funciones de los ejercicios 27 y 28, caso de existir.