Transformaciones de sumas o diferencias en productos

Vamos a demostrar las siguientes cuatro identidades:

$$1)\ \operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta=2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$2)\ \operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\beta=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$3)\ \cos\alpha+\cos\beta=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$4)\ \cos\alpha-\cos\beta=-2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

<u>Demostración de la relación 1):</u>

Sumando las relaciones [1] y [2]:

$$\operatorname{sen}(a+b)=\operatorname{sen}a\cdot\cos b+\cos a\cdot\operatorname{sen}b \qquad [1]$$

$$\operatorname{sen}(a-b)=\operatorname{sen}a\cdot\cos b-\cos a\cdot\operatorname{sen}b \qquad [2]$$

se obtiene:

$$\operatorname{sen}(a+b)+\operatorname{sen}(a-b)=2\operatorname{sen}a\cdot\cos b \qquad [3]$$

Se hacen los cambios de variable:

$$\left.\begin{aligned}a+b&=\alpha\\a-b&=\beta\end{aligned}\right\}$$

Resolviendo el sistema, se obtiene:

$$a=\frac{\alpha+\beta}{2} \quad ; \quad b=\frac{\alpha-\beta}{2}$$

y, sustituyendo en la relación [3], se obtiene:

$$\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta=2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

<u>Demostración de la relación 2):</u>

Restando las relaciones [1] y [2] anteriores, se obtiene:

$$\operatorname{sen}(a+b)-\operatorname{sen}(a-b)=2\cos a\cdot\operatorname{sen}b \qquad [4]$$

Realizando los mismos cambios de variable que antes, y sustituyendo en la relación [4] se llega a que:

$$\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\beta=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

<u>Demostración de las relaciones 3) y 4):</u>

A partir de las relaciones:

$$\cos(a+b)=\cos a\cdot\cos b-\operatorname{sen}a\cdot\operatorname{sen}b$$

$$\cos(a-b)=\cos a\cdot\cos b+\operatorname{sen}a\cdot\operatorname{sen}b$$

y siguiendo el mismo proceso que hemos seguido anteriormente, se llega a que:

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\mathrm{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

C.Q.D.

Transformaciones de productos en sumas o diferencias

Vamos a demostrar las siguientes cuatro identidades:

$$5)\ \mathrm{sen}\,\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\mathrm{sen}\left(\alpha+\beta\right)+\mathrm{sen}\left(\alpha-\beta\right)\right]$$

$$6)\ \cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\mathrm{sen}\left(\alpha+\beta\right)-\mathrm{sen}\left(\alpha-\beta\right)\right]$$

$$7)\ \cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos\left(\alpha+\beta\right)+\cos\left(\alpha-\beta\right)\right]$$

$$8)\ \mathrm{sen}\,\alpha\cdot\mathrm{sen}\,\beta=-\frac{1}{2}\left[\cos\left(\alpha+\beta\right)-\cos\left(\alpha-\beta\right)\right]$$

<u>Demostración de la relación 5):</u>

Sabemos que

$$\mathrm{sen}\left(\alpha+\beta\right)+\mathrm{sen}\left(\alpha-\beta\right)=\mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta+\cancel{\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta}+\mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta-\cancel{\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta}=2\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta$$

de donde se deduce que:

$$\mathrm{sen}\,\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\mathrm{sen}\left(\alpha+\beta\right)+\mathrm{sen}\left(\alpha-\beta\right)\right]$$

<u>Demostración de la relación 6):</u>

Sabemos que

$$\mathrm{sen}\left(\alpha+\beta\right)\mathrm{sen}\left(\alpha-\beta\right)=\cancel{\mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta}+\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta-\left[\cancel{\mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta}-\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta\right]=2\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta$$

de donde se deduce que:

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\mathrm{sen}\left(\alpha+\beta\right)-\mathrm{sen}\left(\alpha-\beta\right)\right]$$

<u>Demostración de la relación 7):</u>

Sabemos que

$$\cos\left(\alpha+\beta\right)+\cos\left(\alpha-\beta\right)=\cos\alpha\cos\beta-\cancel{\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta}+\cos\alpha\cos\beta+\cancel{\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta}=2\cos\alpha\cos\beta$$

de donde se deduce que:

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos\left(\alpha+\beta\right)+\cos\left(\alpha-\beta\right)\right]$$

Demostración de la relación 8):

Sabemos que

$$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=\cancel{\cos\alpha\cos\beta}-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta-\left[\cancel{\cos\alpha\cos\beta}+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\right]=-2\operatorname{sen}\alpha\cos\beta$$

de donde se deduce que:

$$\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta=-\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\right]$$