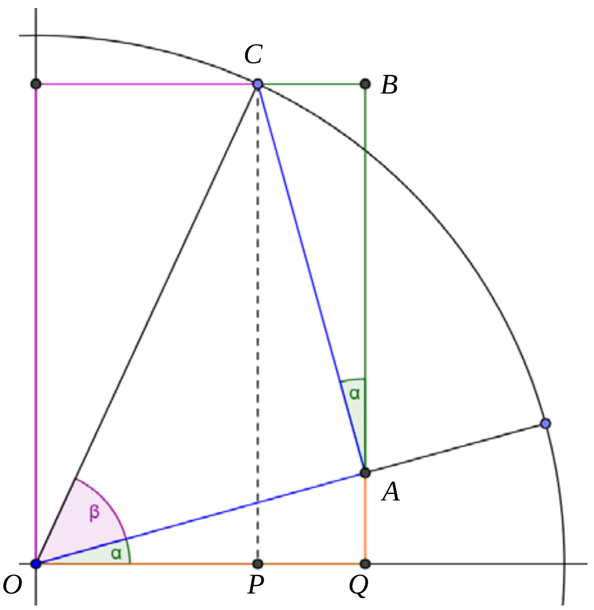
Razones trigonométricas del ángulo suma

Seno



Construcción del dibujo:

1. Consideramos una circunferencia de radio 1, el ángulo α como se ve en el dibujo (por comodidad), y el ángulo β a continuación (por simplicidad).
2. El punto en el que el segundo lado del ángulo β corta a la circunferencia, lo llamamos C, y trazamos una paralela al eje y que pase por C. El punto en el que dicha paralela corta al eje x, lo llamamos P.
3. Después, dibujamos el triángulo azul, de forma que sea rectángulo en A.
4. Construimos Q y B y los triángulos correspondientes, trazando una paralela al eje y, que pase por A
5. El ángulo de vértice A, es α, ya que los triángulos OQA y ABC tienen sus lados perpendiculares.

En el triángulo OAC, se tiene que:

$$\operatorname{sen}\beta = \overline{AC}$$
$$\cos\beta = \overline{OC}$$

En el triángulo OPC, se tiene que:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \frac{\overline{PC}}{\overline{OC}} = \overline{PC} \qquad [1]$$

Además, $\overline{PC} = \overline{QA} + \overline{AB}$

En el triángulo OQA, se tiene que:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{QA}}{\overline{OA}} \Rightarrow \overline{QA} = \overline{OA}\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta\operatorname{sen}\alpha$$
$$\cos\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \Rightarrow \overline{AB} = \overline{AC}\cos\alpha = \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$$

Como consecuencia,

$$\overline{PC} = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta \qquad [2]$$

Igualando [1] y [2]:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

C.Q.D.

Coseno

$$\cos(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\left[90^{\text{o}}+(\alpha+\beta)\right]=\operatorname{sen}\left[(90^{\text{o}}+\alpha)+\beta\right]=\operatorname{sen}(90^{\text{o}}+\alpha)\cos\beta+\cos(90^{\text{o}}+\alpha)\operatorname{sen}\beta=$$
$$=\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

C.Q.D.

Tangente

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}=\frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=$$
$$=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

C.Q.D.