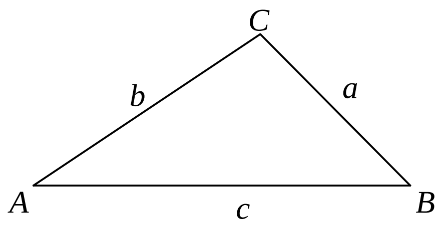
Teoremas

Del seno

<table>
<tr>
<td></td>
<td><u>Teorema del seno</u>:

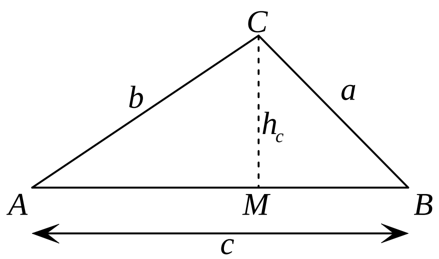
Los lados de un triángulo son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}}=\frac{b}{\operatorname{sen}\widehat{B}}=\frac{c}{\operatorname{sen}\widehat{C}}$$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Como <u>consecuencia</u>:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}}=\frac{b}{\operatorname{sen}\widehat{B}}=\frac{c}{\operatorname{sen}\widehat{C}}=2R$$

donde R es el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC .</td>
</tr>
</table>

Trazamos una de las alturas, por ejemplo, la correspondiente al vértice *C*, h_C , en el triángulo ABC , obteniendo los triángulos rectángulos AMC y MBC , donde *M* es el punto es el punto en el que dicha altura corta al lado *AB*.



En el triángulo *AMC*:

$$\operatorname{sen}\widehat{A}=\frac{h_C}{b}\rightarrow h_C=b\cdot\operatorname{sen}\widehat{A}$$

En el triángulo *MBC*:

$$\operatorname{sen}\widehat{B}=\frac{h_C}{a}\rightarrow h_C=a\cdot\operatorname{sen}\widehat{B}$$

Igualamos los resultados obtenidos para h_c :

$$b\cdot\operatorname{sen}\widehat{A}=a\cdot\operatorname{sen}\widehat{B}$$

lo que podemos expresar como

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}}=\frac{b}{\operatorname{sen}\widehat{B}}$$

Si repetimos el proceso con la altura h_A , obtendríamos:

$$\frac{b}{\operatorname{sen}\widehat{B}}=\frac{c}{\operatorname{sen}\widehat{C}}$$

C.Q.D.

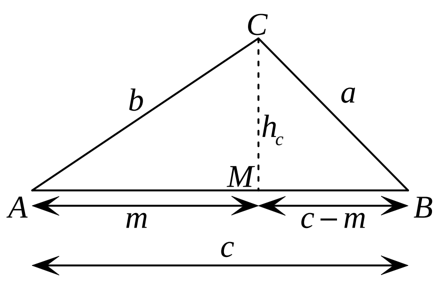
Del coseno

Teorema del coseno:

El cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros lados menos el doble producto de estos lados por el coseno del ángulo comprendido:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}$$

Trazamos una de las alturas, por ejemplo, la correspondiente al vértice *C*, h_C, en el triángulo ABC, obteniendo los triángulos rectángulos AMC y MBC, donde *M* es el punto en el que dicha altura corta al lado *AB*.



En el triángulo *AMC*:

$$\operatorname{sen}\widehat{A} = \frac{h_C}{b} \rightarrow h_C = b \cdot \operatorname{sen}\widehat{A}$$

En el triángulo *MBC*:

$$\operatorname{sen}\widehat{B} = \frac{h_C}{a} \rightarrow h_C = a \cdot \operatorname{sen}\widehat{B}$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo *MBC*:

$$a^2 = (c-m)^2 + {h_C}^2$$

Ahora bien, como $h_C = b \cdot sen\widehat{A}$ y $m = b \cdot cos\widehat{A}$, se tiene que

$$a^2 = (c-m)^2 + {h_C}^2 = \left(c - b\cdot\cos\widehat{A}\right)^2 + \left(b\cdot\operatorname{sen}\widehat{A}\right)^2 =$$

$$= c^2 - 2cb\cdot\cos\widehat{A} + b^2\cdot\cos^2\widehat{A} + b^2\cdot\operatorname{sen}^2\widehat{A} = c^2 - 2cb\cdot\cos\widehat{A} + b^2\left(\cos^2\widehat{A} + \operatorname{sen}^2\widehat{A}\right) =$$

$$= c^2 + b^2 - 2cb\cdot\cos\widehat{A}$$

De forma análoga se obtendrían las otras dos igualdades.

C.Q.D.

De la tangente

Teorema de la tangente o de Neper:
En cualquier triángulo:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2}}\ ,\quad \frac{a+c}{a-c}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\widehat{A}+\widehat{C}}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\widehat{A}-\widehat{C}}{2}}\quad \text{y}\quad \frac{b+c}{b-c}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\widehat{B}+\widehat{C}}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\widehat{B}-\widehat{C}}{2}}$$

Por el teorema del seno

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}}=\frac{b}{\operatorname{sen}\widehat{B}}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{\operatorname{sen}\widehat{A}}{\operatorname{sen}\widehat{B}}$$

y aplicando la siguiente propiedad de las proporciones:

$$\text{Si }\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\text{ entonces }\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$$

se obtiene:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{sen}\widehat{A}+\operatorname{sen}\widehat{B}}{\operatorname{sen}\widehat{A}-\operatorname{sen}\widehat{B}}=\frac{2\operatorname{sen}\frac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2}\cos\frac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2}}{2\cos\frac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2}\operatorname{sen}\frac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2}}$$

y teniendo en cuenta que $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$ resulta:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2}\operatorname{cotg}\frac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2}}{2}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2}}$$

De manera análoga se demuestran las otras dos identidades.

Como queríamos demostrar.

C.Q.D.