Demostraciones por reducción al absurdo

1) Irracionalidad de raíz de 2

Supongamos, por reducción al absurdo, que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Entonces,

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \text{ con } p, q \in \mathbb{Z} \text{ primos entre sí y } q \neq 0$$

y elevando al cuadrado:

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2$$

La última igualdad nos dice que p^2 es múltiplo de 2 y, por tanto, $p = 2k$ con $k \in \mathbb{Z}$. Sustituyendo, resulta:

$$2q^2 = (2k)^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2$$

Es decir, q^2 es múltiplo de 2, y como consecuencia, q también es múltiplo de 2, lo que contradice el hecho de que p y q sean primos entre sí.

2) Infinitud de los números primos

Euclides, proposición 20 del libro IX de los Elementos[1].
Supongamos, por reducción al absurdo, que solo hay un número finito de primos $p_1, p_2, ..., p_n$ y los ordenamos $p_1 < p_2 < ... < p_n$. Consideramos el número natural $N = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n + 1$, que puede ser primo o no.
Si es primo, tendríamos un número primo que no está en la lista, lo que constituye una contradicción.
Si N no es primo, entonces tiene que ser divisible por algún número primo. Entonces, para cada primo p_k que divida a N, se tiene que $N = c_k p_k + 1$ con $c_k \geq 1$ y , como consecuencia, el resto de dividir N entre p_k es siempre 1. Por tanto, este primo p_k que divide a N, no puede ser ninguno de la lista de los primos iniciales, lo que también es una contradicción.

3) Si m y n son números enteros tales que $n + n^2 + n^3 = m + m^2$, entonces n es par

Supongamos, por reducción al absurdo, que n es impar. Entonces, n^2 y n^3 son ambos impares, de donde se deduce que $n + n^2 + n^3$ es impar, ya que es la suma de tres números impares, y como consecuencia $m + m^2$ es impar (ya que $n + n^2 + n^3 = m + m^2$).
Sin embargo, $m + m^2$ es siempre par, ya que $m + m^2 = m(m+1)$ y necesariamente alguno de los números m o $m+1$ es par, y por tanto, hemos llegado a una contradicción.

[1] Enunciado original: *Hay más números primos que cualquier cantidad propuesta de números primos.*