

Demostraciones por inducción

«**Definición:** Un conjunto A de números reales se llama inductivo si $1 \in A$ y $\forall x \in A$ se verifica que $x+1 \in A$.

Se tiene que el conjunto de los números naturales \mathbb{N} es un conjunto inductivo, y además, es la intersección de todos los conjuntos inductivos de números reales.

Principio de inducción matemática: Si A es un conjunto inductivo de números naturales, entonces $A = \mathbb{N}$.

El *principio de inducción matemática* es la herramienta básica para probar que una cierta propiedad $P(n)$ es verificada por todos los números naturales. Para ello se procede de la siguiente forma:

- 1) Se comprueba que el número 1 verifica la propiedad, esto es, que $P(1)$ es cierta.
- 2) Comprobamos que si un número n satisface la propiedad, entonces también el número $n+1$ la satisface. Es decir, comprobamos que si $P(n)$ es cierta, entonces también lo es $P(n+1)$.

Si definimos el conjunto $M = \{n \in \mathbb{N} : P(n) \text{ es cierta}\}$, entonces 1) nos dice que $1 \in M$, y 2) nos dice que siempre que $n \in M$ se verifica que $n+1 \in M$. Esto es, M es un conjunto inductivo y, como, $M \subseteq \mathbb{N}$, concluimos, por el principio de inducción, que $M = \mathbb{N}$, y como consecuencia, que $P(n)$ es cierta $\forall n \in \mathbb{N}$.

Por último, 2) no dice que se tenga que probar $P(n)$ es cierta, sino que hay que demostrar la implicación lógica $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Para demostrar dicha implicación lo que hacemos es suponer que $P(n)$ es cierta. Esto es por lo que suele llamarse a $P(n)$ “*hipótesis de inducción*”.

Francisco Javier Pérez González
“Conceptos básicos de Análisis Real”
Universidad de Granada
Cálculo I»

Vamos a demostrar varias propiedades por inducción:

1) Potencia, de exponente natural, de un producto

$$(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \text{ y } \forall n \in \mathbb{N}$$

Lo demostramos para $n = 1$:

$$(x \cdot y)^1 = x \cdot y = x^1 \cdot y^1$$

Hipótesis de inducción: lo suponemos cierto para n :

$$(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$$

Lo demostramos para $n + 1$:

$$(x \cdot y)^{n+1} = (x \cdot y)^n (x \cdot y) = x^n \cdot y^n \cdot (x \cdot y) = x^n \cdot x \cdot y^n \cdot y = x^{n+1} \cdot y^{n+1}$$

C.Q.D.¹.

2) Logaritmo de una potencia de exponente natural²:

$$\log_a x^n = n \cdot \log_a x \quad \forall x \in (0, +\infty), a > 0, a \neq 1 \text{ y } \forall n \in \mathbb{N}$$

Lo demostramos para $n = 1$:

$$\log_a x^1 = \log_a x = 1 \cdot \log_a x$$

Hipótesis de inducción: lo suponemos cierto para n :

$$\log_a x^n = n \cdot \log_a x$$

Lo demostramos para $n + 1$:

$$\log_a x^{n+1} = \log_a (x^n \cdot x) = \log_a x^n + \log_a x = n \cdot \log_a x + \log_a x = (n+1) \log_a x$$

C.Q.D.

3) Suma de los ángulos interiores de un polígono convexo:

$$\sum := 180^\circ \cdot (n-2) \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3$$

donde n es el número de lados.

Lo demostramos para $n = 3$ (triángulo):

$$180^\circ \cdot (3-2) = 180^\circ$$

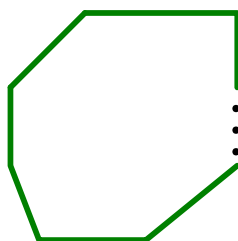
que es lo que suman los ángulos interiores de un triángulo.

Hipótesis de inducción: lo suponemos cierto para n :

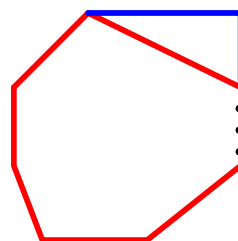
$$180^\circ \cdot (n-2)$$

Lo demostramos para $n + 1$:

polígono de $n+1$ lados



polígono de n lados + triángulo



$$180^\circ \cdot (n-2) + 180^\circ = 180^\circ \cdot (n-2+1) = 180^\circ \cdot [(n+1)-2]$$

C.Q.D.

4) Suma de los n primeros números naturales:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Lo demostramos para $n = 1$:

¹ C.Q.D. = Como Queríamos Demostrar (Q.E.D. is an initialism of the Latin phrase Quod Erat Demonstrandum)

² Sabemos que dicha propiedad es cierta para $n \in \mathbb{R}$.

$$1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$$

Hipótesis de inducción: lo suponemos cierto para n :

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Lo demostramos para $n+1$:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2} = \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2} \end{aligned}$$

C.Q.D.

5) Suma de los n primeros números naturales impares:

$$\boxed{1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}}$$

Lo demostramos para $n=1$:

$$1 = 1^2 = 1$$

Hipótesis de inducción: lo suponemos cierto para n :

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

Lo demostramos para $n+1$:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) + (2n+1) = n^2 + (2n+1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

C.Q.D.

6) Suma de los n primeros cuadrados:

$$\boxed{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall n \in \mathbb{N}}$$

Lo demostramos para $n=1$:

$$1 = 1^2 = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$$

Hipótesis de inducción: lo suponemos cierto para n :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Lo demostramos para $n+1$:

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \\ &= \frac{2n^3 + 3n^2 + n + 6n^2 + 12n + 6}{6} = \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \\ &= \frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6} \end{aligned}$$

C.Q.D.

7) Suma de los n primeros cubos:

$$\boxed{1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}}$$

Lo demostramos para $n = 1$:

$$1 = 1^3 = \left[\frac{1(1+1)}{2} \right]^2 = \frac{4}{4} = 1$$

Hipótesis de inducción: lo suponemos cierto para n :

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

Lo demostramos para $n+1$:

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 &= \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{4(n+1)^3}{4} = \\ &= \frac{n^4 + 6n^3 + 13n^2 + 12n + 4}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \left\{ \frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2} \right\}^2 \end{aligned}$$

C.Q.D.

8) $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, x^n - y^n \text{ es divisible por } x - y}$

Para $n = 1$: $(x^1 - y^1) : (x - y) = 1$ que es cierta.

Hipótesis de inducción: $x^n - y^n$ es divisible por $x - y$.

Lo demostramos para $n+1$:

$$x^{n+1} - y^{n+1} = x^n x - y^n y = x^n x - yx^n + yx^n - y^n y = x^n(x - y) + y(x^n - y^n)$$

donde el segundo sumando es divisible por $x - y$, por hipótesis de inducción, luego se puede sacar factor común $x - y$, y por tanto, es divisible por $x - y$.

C.Q.D.

9) $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, 6^n \text{ es un número que acaba en } 6}$

Para $n = 1$: $6^1 = 6$

Hipótesis de inducción: 6^n es un número que acaba en 6

Lo demostramos para $n+1$: como todo número que acaba en 6 se puede escribir en la forma $10a + 6$ con $a \in \mathbb{Z}$, se tiene que $6^n = 10a + 6$ y, por tanto:

$$6^{n+1} = 6 \cdot 6^n = 6 \cdot (10a + 6) = 60a + 36 = 60a + 30 + 6 = 10(6a + 3) + 6 = 10c + 6$$

con $c = 6a + 3 \in \mathbb{Z}$.

C.Q.D.

10) $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}}$

Para $n=1$: $\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$

Hipótesis de inducción: $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

Lo demostramos para $n+1$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} &\stackrel{H.I.}{=} \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \\ &= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)^2(n+2)} = \frac{(n+1)(n+1)}{(n+1)^2(n+2)} = \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)+1} \end{aligned}$$

C.Q.D.

11) $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \text{ impar, } n^2 - 1 \text{ es divisible entre } 8}$

Para $n=1$: $1^2 - 1 = 0$ que es divisible entre 8

Hipótesis de inducción: lo suponemos cierto para cualquier n impar

Lo demostramos para $n+2$ (que es el impar siguiente de n).

Si n es impar, $n = 2k+1$ con $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, luego tenemos que demostrar la afirmación para

$$n+2 = 2k+1+2 = 2k+3$$

$$\begin{aligned} (2k+3)^2 - 1 &= [(2k+1)+2]^2 - 1 = (2k+1)^2 + 4 + 2 \cdot 2 \cdot (2k+1) - 1 = (2k+1)^2 - 1 + 4(2k+1) + 4 = \\ &= [(2k+1)^2 - 1] + 8k + 8 \end{aligned}$$

donde aplicando la hipótesis de inducción, cada uno de los sumandos es divisible entre 8 y, por tanto, la suma también lo es (ya que se puede sacar factor común un 8).

C.Q.D.

12) $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3 \text{ se tiene que } n! > 3^{n-2}}$

Para $n=3$: $3! = 6 > 2^{3-2} = 2$

Hipótesis de inducción: lo suponemos cierto para n

Lo demostramos para $n+1$:

$$(n+1)! = n!(n+1) > 3^{n-2} \cdot (n+1) > 3^{n-2} \cdot 3 = 3^{n-1} = 3^{(n+1)-2}$$

C.Q.D.

13) $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \text{ se tiene que } F_n < 2^n}$

Números de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, ...

$$F_1 = 1, F_2 = 1 \text{ y } F_n = F_{n-2} + F_{n-1} \quad \forall n \geq 3$$

Para $n=1$: $F_1 = 1 < 2^1 = 2$

Hipótesis de inducción: lo suponemos cierto para n .

Lo demostramos para $n+1$:

$$F_{n+1} = F_{n-1} + F_n < 2^{n-1} + 2^n = 2^{n-1} + 2 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1} \cdot (1+2) = 3 \cdot 2^{n-1} < 2^2 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1}$$

C.Q.D.

$$14) \boxed{\forall n \in \mathbb{N} \text{ se tiene que } 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! + 1 = (n+1)!}$$

Para $n=1$: $1 \cdot 1! + 1 = 2 = (1+1)!$

Hipótesis de inducción: lo suponemos cierto para n .

Lo demostramos para $n+1$:

$$\begin{aligned} & 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! + (n+1) \cdot (n+1)! + 1 = \\ & = [1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! + 1] + (n+1) \cdot (n+1)! = \\ & \stackrel{H.I.}{=} (n+1)! + (n+1) \cdot (n+1)! = (n+1)! \cdot [(n+1) + 1] = \\ & = (n+2) \cdot (n+1)! = (n+2)! \end{aligned}$$

C.Q.D.

$$15) \boxed{\forall n \in \mathbb{N} \text{ se tiene que } 2^n > n}$$

Para $n=1$: $2^1 = 2 > 1$

Hipótesis de inducción: lo suponemos cierto para n .

Lo demostramos para $n+1$:

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2n$$

y como $2n = n + n \underset{n \geq 1}{\geq} 1 + n$, resulta que

$$2^{n+1} > n+1$$

C.Q.D.

$$16) \boxed{\forall n \in \mathbb{N}, n > 4 \text{ se tiene que } n^4 < 4^n}$$

Para $n=5$: $5^4 = 625 < 1024 = 4^5$

Hipótesis de inducción: lo suponemos cierto para n .

Lo demostramos para $n+1$:

$$(n+1)^4 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 < 4^n + 4^n + 4^n + 4^n = 4 \cdot 4^n = 4^{n+1}$$

ya que

$$\begin{aligned} & n^4 < 4^n \quad \text{H.I.} \\ & 4n^3 < n \cdot n^3 = n^4 < 4^n \quad \text{H.I.} \\ & 6n^2 = 2 \cdot 3 \cdot n^2 < n \cdot n \cdot n^2 = n^4 < 4^n \quad \text{H.I.} \\ & 4n + 1 < n^2 + 1 < n^4 < 4^n \quad \text{H.I.} \end{aligned}$$

C.Q.D.

$$17) \boxed{\forall n \in \mathbb{N} \text{ se tiene que } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}}$$

Para $n=1$: $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 2 - \frac{1}{2}$

Hipótesis de inducción: lo suponemos cierto para n .

Lo demostramos para $n+1$:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{1}{2^n} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 2 - \frac{1}{2^{n+1}}$$

C.Q.D.

$$\boxed{18) \forall n \in \mathbb{N} \text{ se tiene que } (x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \text{ (f\u00f3rmula del Binomio de Newton)}}$$

Para $n=1$: $(x+y)^1 = \binom{1}{0}x + \binom{1}{1}y$

Hip\u00f3tesis de inducci\u00f3n: lo suponemos cierto para n .

Lo demostramos para $n+1$:

$$\begin{aligned} (x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n = (x+y) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = \\ &= x \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k + y \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = \\ &= \binom{n}{0} x^{n+1} + \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{0} \right] x^n y + \left[\binom{n}{2} + \binom{n}{1} \right] x^{n-1} y^2 + \dots + \left[\binom{n}{n} + \binom{n}{n-1} \right] x y^n + \binom{n}{n} y^{n+1} = \\ &\stackrel{(1)}{=} \binom{n+1}{0} x^{n+1} + \binom{n+1}{1} x^n y + \dots + \binom{n+1}{n} x y^n + \binom{n+1}{n+1} y^{n+1} = \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k \end{aligned}$$

donde en (1) hemos tenido en cuenta que

$$\begin{aligned} \binom{n}{0} &= \binom{n+1}{0} = 1 = \binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1} \\ \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \binom{n+1}{k} \end{aligned}$$

C.Q.D.

$$\boxed{19) \forall n \in \mathbb{N} \text{ se tiene que } (1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall x \in (-1, +\infty) \text{ (desigualdad de Bernouilli)}}$$

Para $n=1$: $(1+x)^1 = 1+x = 1+1 \cdot x$

Hip\u00f3tesis de inducci\u00f3n: lo suponemos cierto para n .

Lo demostramos para $n+1$:

$$(1+x)^n \geq 1+nx \stackrel{(1+x)}{\Rightarrow} (1+x)^n (1+x) \geq (1+nx)(1+x)$$

y se mantiene el sentido de la desigualdad porque $x > -1$, o lo que es lo mismo $x+1 > 0$. Por tanto:

$$(1+x)^{n+1} \geq 1+x+nx+nx^2 = 1+nx^2+(n+1)x \quad [1]$$

donde $nx^2 \geq 0$ y, como consecuencia, $1+nx^2 > 0$.

Ahora, a la desigualdad $1 + nx^2 > 0$ le sumamos $(n+1)x$ a ambos miembros:

$$1 + nx^2 + (n+1)x > (n+1)x \quad [2]$$

Combinando [1] y [2]:

$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + nx^2 + (n+1)x \geq (n+1)x$$

y, como consecuencia

$$(1+x)^{n+1} \geq (n+1)x$$

Ampliación:

(1) **Sumatorio** (notación introducida en 1722 por el matemático francés Joseph Louis Lagrange)

El signo \sum (sumatorio³) se utiliza en matemáticas para abreviar sumas.

Por ejemplo:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 100 = \sum_{k=1}^{100} k$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \sum_{k=1}^n k^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \sum_{k=1}^n k^3$$

(2) **Factorial** de un número natural o cero

$$n! = \begin{cases} n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 & \text{si } n \in \mathbb{N} \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

Ejemplos:

$$1! = 1$$

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

$$8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40\,320$$

Fórmula recurrente para definir el factorial:

$$n! = \begin{cases} n \cdot (n-1)! & \text{si } n \in \mathbb{N} \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

(3) **Números combinatorios**

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ para } n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ y } 0 \leq k \leq n$$

Se lee «número combinatorio de n sobre k », ya que coincide con el número de combinaciones de n elementos tomados de k en k .

³ \sum es la letra griega sigma.