Demostraciones por inducción

Principio de inducción matemática:

*Si $P(n)$ es una propiedad matemática que se verifica para $n=1$, y suponemos que es cierta para para $n \in \mathbb{N}$ **(hipótesis de inducción)**, entonces el principio de inducción nos dice que si somos capaces de comprobar que la propiedad se verifica para $n+1$, dicha propiedad se verifica para todos los números naturales.*

Vamos a demostrar varias propiedades por inducción:

1) Potencia, de exponente natural, de un producto

$$(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \text{ y } \forall n \in \mathbb{N}$$

Lo demostramos para $n=1$:

$$(x \cdot y)^1 = x \cdot y = x^1 \cdot y^1$$

Hipótesis de inducción: lo suponemos cierto para n:

$$(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$$

Lo demostramos para $n+1$:

$$(x \cdot y)^{n+1} = (x \cdot y)^n (x \cdot y) = x^n \cdot y^n \cdot (x \cdot y) = x^n \cdot x \cdot y^n \cdot y = x^{n+1} \cdot y^{n+1}$$

C.Q.D[1].

2) Logaritmo de una potencia de exponente natural[2]:

$$\boxed{\log_a x^n = n \cdot \log_a x \quad \forall x \in (0,+\infty),\ a>0,\ a \neq 1 \text{ y } \forall n \in \mathbb{N}}$$

Lo demostramos para $n=1$:

$$\log_a x^1 = \log_a x = 1 \cdot \log_a x$$

Hipótesis de inducción: lo suponemos cierto para n:

$$\log_a x^n = n \cdot \log_a x$$

Lo demostramos para $n+1$:

$$\log_a x^{n+1} = \log_a (x^n \cdot x) = \log_a x^n + \log_a x = n \cdot \log_a x + \log_a x = (n+1)\log_a x$$

C.Q.D.

3) Suma de los ángulos interiores de un polígono convexo:

$$\boxed{\sum := 180^{\text{o}} \cdot (n-2) \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3}$$

donde n es el número de lados.

Lo demostramos para $n=3$ (triángulo):

$$180^{\text{o}} \cdot (3-2) = 180^{\text{o}}$$

que es lo que suman los ángulos interiores de un triángulo.
Hipótesis de inducción: lo suponemos cierto para n:

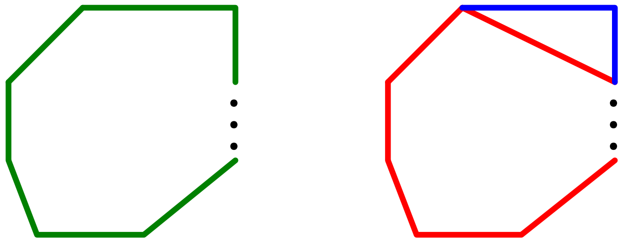
1 C.Q.D. = Como Queríamos Demostrar (Q.E.D. is an initialism of the Latin phrase Quod Erat Demonstrandum)

2 Sabemos que dicha propiedad es cierta para $n \in \mathbb{R}$.

$$180^{\circ}\cdot(n-2)$$

Lo demostramos para $n+1$*:*

polígono de $n+1$ lados   polígono de n lados + triángulo



$$180^{\circ}\cdot(n-2)+180^{\circ}=180^{\circ}\cdot(n-2+1)=180^{\circ}\cdot\left[(n+1)-2\right]$$

C.Q.D.

4) Suma de los n primeros números naturales:

$$\boxed{1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2} \qquad \forall n\in\mathbb{N}}$$

Lo demostramos para $n=1$*:*

$$1=\frac{1(1+1)}{2}=1$$

Hipótesis de inducción: lo suponemos cierto para n*:*

$$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Lo demostramos para $n+1$*:*

$$1+2+3+...+n+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}=\frac{n^2+n+2n+2}{2}=$$

$$=\frac{(n+1)(n+2)}{2}=\frac{(n+1)\left[(n+1)+1\right]}{2}$$

C.Q.D.

5) Suma de los n primeros cuadrados:

$$\boxed{1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \forall n\in\mathbb{N}}$$

Lo demostramos para $n=1$*:*

$$1=1^2=\frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}=1$$

Hipótesis de inducción: lo suponemos cierto para n*:*

$$1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Lo demostramos para $n+1$*:*

$$1^2+2^2+3^3+...+n^2+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}=$$

$$=\frac{2n^3+3n^2+n+6n^2+12n+6}{6}=\frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6}=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}=$$
$$=\frac{(n+1)\left[(n+1)+1\right]\left[2(n+1)+1\right]}{6}$$

C.Q.D.

6) Suma de los n primeros cubos:

$$\boxed{1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \qquad \forall n\in\mathbb{N}}$$

Lo demostramos para $n=1$*:*

$$1=1^3=\left[\frac{1(1+1)}{2}\right]^2=\frac{4}{4}=1$$

Hipótesis de inducción: lo suponemos cierto para n*:*

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Lo demostramos para $n+1$*:*

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3+(n+1)^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2+(n+1)^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+\frac{4(n+1)^3}{4}=$$

$$=\frac{n^4+6n^3+13n^2+12n+4}{4}=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}=\left\{\frac{(n+1)\left[(n+1)+1\right]}{2}\right\}^2$$

C.Q.D.

7) $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ x^n-y^n \text{ es divisible por } x-y}$

Para $n=1$*:* $\left(x^1-y^1\right):(x-y)=1$ *que es cierta.*

Hipótesis de inducción: x^n-y^n es divisible por $x-y$.

Lo demostramos para $n+1$*:*

$$x^{n+1}-y^{n+1}=x^nx-y^ny=x^nx-yx^n+yx^n-y^ny=x^n(x-y)+y\left(x^n-y^n\right)$$

donde el segundo sumando es divisible por $x-y$*, por hipótesis de inducción, luego se puede sacar factor común* $x-y$*, y por tanto, es divisible por* $x-y$*.*

C.Q.D.

8) $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ 6^n \text{ es un número que acaba en } 6}$

Para $n=1$: $6^1=6$

Hipótesis de inducción: 6^n es un número que acaba en 6

Lo demostramos para $n+1$*: como todo número que acaba en 6 se puede escribir en la forma* $10a+6$ con $a\in\mathbb{Z}$*, se tiene que* $6^n=10a+6$ *y, por tanto:*

$$6^{n+1}=6\cdot 6^n=6\cdot(10a+6)=60a+36=60a+30+6=10(6a+3)+6=10c+6$$

con $c = 6a + 3 \in \mathbb{Z}$.

C.Q.D.

9) $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}}$

Para $n=1: \frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}=\frac{1}{1+1}$

Hipótesis de inducción: $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

Lo demostramos para $n+1$*:*

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)} \underset{H.I.}{=} \frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}=$$

$$=\frac{n^2+2n+1}{(n+1)^2(n+2)}=\frac{(n+1)(n+1)}{(n+1)^2(n+2)}=\frac{1}{n+2}=\frac{1}{(n+1)+1}$$

C.Q.D.

10) $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \text{ impar, } n^2-1 \text{ es divisible entre } 8}$

Para $n=1: 1^2-1=0$ que es divisible entre 8

Hipótesis de inducción: lo suponemos cierto para cualquier n *impar*

Lo demostramos para $n+2$ *(que es el impar siguiente de* n*).*

Si n *es impar,* $n=2k+1$ con $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$*, luego tenemos que demostrar la afirmación para*

$$n+2=2k+1+2=2k+3$$

$$(2k+3)^2-1=\left[(2k+1)+2\right]^2-1=(2k+1)^2+4+2\cdot 2\cdot(2k+1)-1=(2k+1)^2-1+4(2k+1)+4=$$

$$=\left[(2k+1)^2-1\right]+8k+8$$

donde aplicando la hipótesis de inducción, cada una uno de los sumandos es divisible entre 8 y, por tanto, la suma también lo es (ya que se puede sacar factor común un 8).

C.Q.D.

11) $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 3 \text{ se tiene que } n! > 3^{n-2}}$

Para $n=3: 3!=6>2^{3-2}=3$

Hipótesis de inducción: lo suponemos cierto para n

Lo demostramos para $n+1$*:*

$$(n+1)!=n!\cdot(n+1)>3^{n-2}\cdot(n+1)>3^{n-2}\cdot 3=3^{n-1}=3^{(n+1)-2}$$

C.Q.D.

12) $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \text{ se tiene que } F_n < 2^n}$

Números de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, …

$F_1=1$, $F_2=1$ y $F_n=F_{n-2}+F_{n-1}\quad \forall n\geq 3$

Para $n=1: F_1 = 1 < 2^1 = 2$
Hipótesis de inducción: lo suponemos cierto para n.
Lo demostramos para $n+1$:

$$F_{n+1} = F_{n-1} + F_n < 2^{n-1} + 2^n = 2^{n-1} + 2 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1} \cdot \left(1+2\right) = 3 \cdot 2^{n-1} < 2^2 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1}$$

C.Q.D.

<u>Ampliación</u>*: *Sumatorio (notación introducida en 1722 por el matemático francés Joseph Louis Lagrange)

El signo $\sum$ (sumatorio[3]) se utiliza en matemáticas para abreviar sumas.

Por ejemplo:

$$1+2+3+\ldots+100 = \sum_{k=1}^{100} k$$

$$1+2+3+\ldots+n = \sum_{k=1}^{n} k$$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2$$

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3$$

[3] $\sum$ es la letra griega sigma.