Las identidades notables para números complejos

1. Cuadrado de una suma

$$\boxed{(z+w)^2 = z^2 + w^2 + 2zw \quad \forall z, w \in \mathbb{C}}$$

Demostración:

Sean $\left.\begin{array}{l} z = a+bi \\ w = c+di \end{array}\right\} \Rightarrow z+w = (a+c)+(b+d)i$

Se tiene que:

$$(z+w)^2 = (z+w)(z+w) = \left(a^2+2ac-b^2-2bd+c^2-d^2\right)+\left[2(a+c)(b+d)\right]i$$

Por otra parte,

$$z^2 = \left(a^2-b^2\right)+(2ab)i$$

$$w^2 = \left(c^2-d^2\right)+(2cd)i$$

$$2zw = (2ac-2bd)+2(ad+bc)i$$

y, por tanto,

$$z^2+w^2+2zw = \left(a^2+2ac-b^2-2bd+c^2-d^2\right)+\left[2a(b+d)+2c(b+d)\right]i =$$
$$= \left(a^2+2ac-b^2-2bd+c^2-d^2\right)+\left[2(b+d)(a+c)\right]i$$

Como consecuencia,

$$(z+w)^2 = z^2 + w^2 + 2zw \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$$

2. Cuadrado de una diferencia

$$\boxed{(z-w)^2 = z^2 + w^2 - 2zw \quad \forall z, w \in \mathbb{C}}$$

Demostración:

Sean $\left.\begin{array}{l} z = a+bi \\ w = c+di \end{array}\right\} \Rightarrow z-w = (a+c)-(b+d)i$

Se tiene que:

$$(z-w)^2 = (z-w)(z-w) = \left(a^2-2ac-b^2+2bd+c^2-d^2\right)+\left[2(a-c)(b-d)\right]i$$

Por otra parte,

$$z^2 = \left(a^2-b^2\right)+(2ab)i$$

$$w^2 = \left(c^2-d^2\right)+(2cd)i$$

$$2zw = (2ac-2bd)+2(ad+bc)i$$

y, por tanto,

$$z^2+w^2-2zw = \left(a^2+2ac-b^2-2bd+c^2-d^2\right)+\left[2a(b-d)-2c(b-d)\right]i =$$
$$= \left(a^2+2ac-b^2-2bd+c^2-d^2\right)+\left[2(b-d)(a-c)\right]i$$

Como consecuencia,

$$(z-w)^2 = z^2 + w^2 - 2zw \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$$

3. Suma por diferencia

$$\boxed{(z+w)(z-w)=z^2-w^2 \quad \forall z,w\in\mathbb{C}}$$

Demostración:

Sean $\left.\begin{array}{l} z=a+bi \\ w=c+di \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} z+w=(a+c)+(b+d)i \\ z-w=(a+c)-(b+d)i \end{array}\right.$

Se tiene que:

$$(z+w)(z-w)=a^2-b^2-c^2+d^2+2(ab-cd)i$$

y que:

$$z^2-w^2=a^2-b^2-c^2+d^2+2(ab-cd)i$$

Como consecuencia:

$$(z+w)(z-w)=z^2-w^2 \quad \forall z,w\in\mathbb{C}$$