

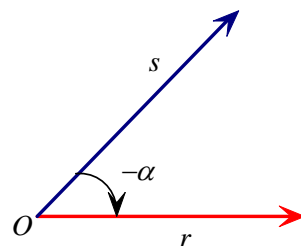
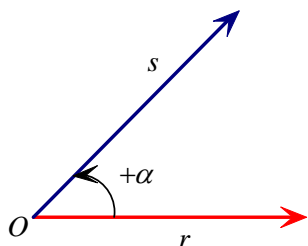
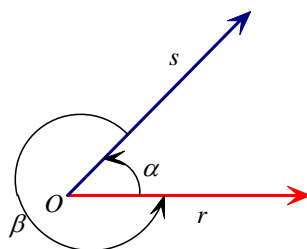
UNIDAD 4: TRIGONOMETRÍA

1. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

La palabra tri-gono-metría significa "medida de las figuras con tres esquinas", es decir, de los triángulos. La trigonometría estudia las relaciones entre las longitudes de los lados de un triángulo y las medidas de sus ángulos. Por ello, las razones trigonométricas se definieron originariamente mediante triángulos rectángulos. No obstante, interesa definir las usando la circunferencia unidad, es decir, en la llamada *circunferencia goniométrica*.

Ángulos en el plano y criterio de orientación

Dos semirrectas r y s , con origen común O , dividen el plano en dos regiones, cada una de las cuales determina un ángulo.



Unidades para medir ángulos

Las unidades más utilizadas para medir ángulos son:

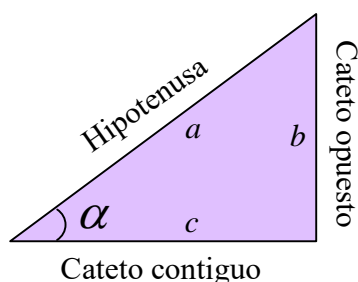
$^{\circ}$ = grado sexagesimal (un grado sexagesimal es la medida del ángulo central correspondiente a una de las 360 partes en que se divide una circunferencia)

rad = radián (un radián es la medida del ángulo central que subtiende un arco igual al radio)

Para convertir grados sexagesimales en radianes, y viceversa, basta tener en cuenta la siguiente relación:

$$180^{\circ} = \pi \text{ rad}$$

En un triángulo rectángulo, las *razones trigonométricas* de un ángulo agudo α son las distintas razones (cocientes) que hay entre los lados.



Razones trigonométricas fundamentales:

seno: $\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$
coseno: $\text{cos } \alpha = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$

Otras razones trigonométricas:

$$\text{tangente: } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{b}{c} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha}$$

$$\text{cosecante: } \operatorname{cosec} \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{a}{b} = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}$$

$$\text{secante: } \operatorname{sec} \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{a}{c} = \frac{1}{\operatorname{cos} \alpha}$$

$$\text{cotangente: } \operatorname{cotg} \alpha = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{c}{b} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

Ejercicios:

1. Expresa los siguientes ángulos en:

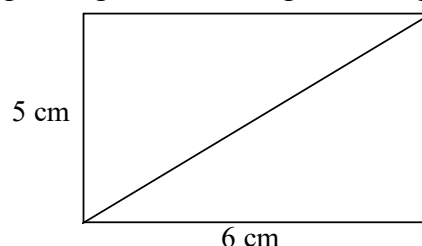
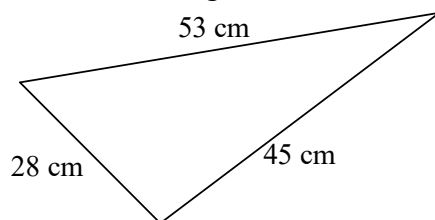
a) Radianes

315°, 300°, 135°, 2 210°

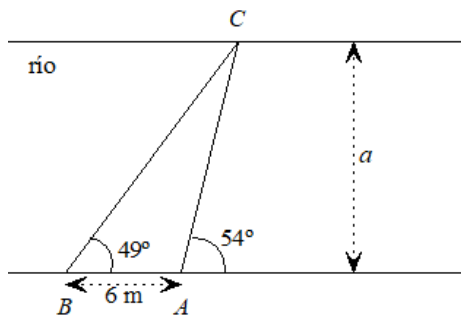
b) Grados sexagesimales

$\frac{\pi}{6}$ rad, $\frac{9\pi}{5}$ rad, 5π rad

2. Calcula las razones trigonométricas de los ángulos agudos de las siguientes figuras:

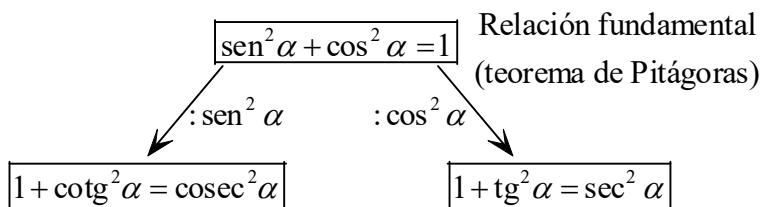


- Calcula la altura y el área de un triángulo equilátero de lado 6 cm, sin utilizar el teorema de Pitágoras.
- Si la altura de un triángulo equilátero mide 5,196 cm; calcula cuánto mide el lado del triángulo, sin utilizar el teorema de Pitágoras.
- Calcula la longitud de las diagonales de un rombo sabiendo que sus ángulos son 60° y 120°, y que sus lados miden 6 cm.
- En un terreno horizontal se divide una torre desde un punto A bajo un ángulo de 30°. Si nos aproximamos 20 m se llega a un punto B, desde el que observamos la torre bajo un ángulo de 45°. Calcula la altura de la torre.
- Para medir la distancia entre los márgenes de un río un topógrafo se coloca en un punto A de uno de ellos y, fijándose en un árbol C que está al otro lado mide el ángulo que forma su visual respecto a la dirección del río. Este ángulo es de 54°. A continuación, se aleja 6 m y se coloca en un punto B. El ángulo ahora es de 49°. ¿Cuánto mide el río de ancho?



2. RELACIONES ENTRE RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Como es habitual, usaremos la siguiente notación: $\text{sen}^2 \alpha = (\text{sen } \alpha)^2$



Ejercicio:

8. Calcula las razones trigonométricas directas (seno, coseno y tangente) del ángulo si:

- a) $\text{sen } \alpha = \frac{1}{4}$ c) $\text{cos } \alpha = \frac{2}{3}$
 b) $\text{tg } \alpha = \frac{5}{2}$ d) $\text{sen } \alpha = 0,2$

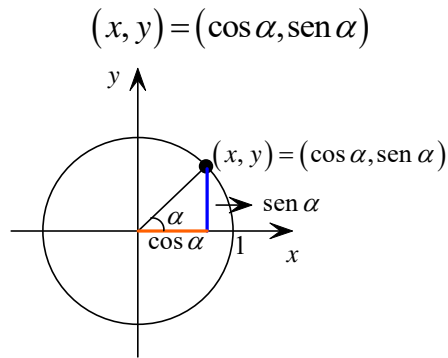
3. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ALGUNOS ÁNGULOS

	0°	30°	45°	60°	90°
sen	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$

	0°	30°	45°	60°	90°
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

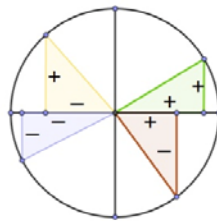
4. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO CUALQUIERA

En un sistema de ejes coordenados consideremos una circunferencia de radio unidad y un ángulo α que tenga uno de sus lados sobre el eje OX . Entonces, a dicho ángulo α se le puede asociar de manera única un punto, sobre la circunferencia, de coordenadas (x, y) de manera que

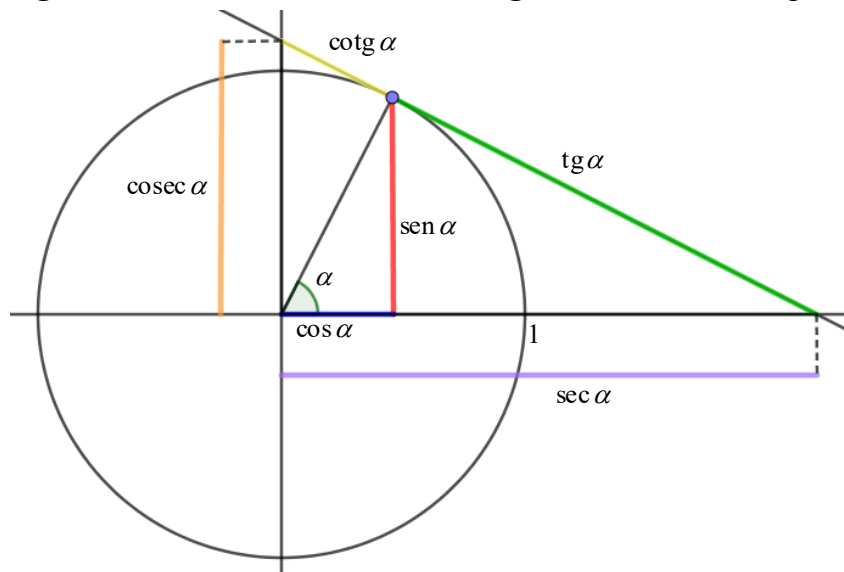


La circunferencia anterior se llama **circunferencia goniométrica**.

Dependiendo del cuadrante en el que se encuentre el ángulo, los **signos** de las razones trigonométricas fundamentales son:



La **interpretación geométrica de todas las razones trigonométricas** es la siguiente:

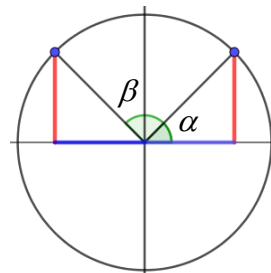


Reducción de ángulos al primer cuadrante

Sea α el ángulo del primer cuadrante relacionado, en cada caso, con el ángulo β .

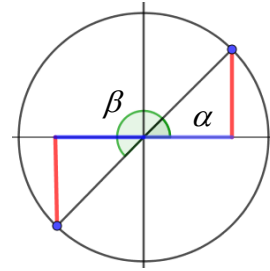
- Si β es un ángulo del segundo cuadrante, se tiene que $\alpha + \beta = 180^\circ$ y, por tanto:

$$\text{sen } \beta = \text{sen } \alpha \quad \text{cos } \beta = -\text{cos } \alpha$$



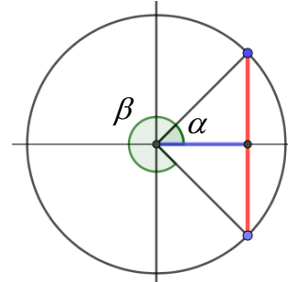
- Si β es un ángulo del tercer cuadrante, se tiene que $\beta = 180^\circ + \alpha$ y, por tanto:

$$\operatorname{sen} \beta = -\operatorname{sen} \alpha \quad \operatorname{cos} \beta = -\operatorname{cos} \alpha$$



- Si β es un ángulo del cuarto cuadrante, se tiene que $\alpha + \beta = 360^\circ$ y, por tanto:

$$\operatorname{sen} \beta = -\operatorname{sen} \alpha \quad \operatorname{cos} \beta = \operatorname{cos} \alpha$$



Ejemplos:

- (1) Si $\beta = 160^\circ$ (ángulo del segundo cuadrante), se tiene que $180^\circ - 160^\circ = 20^\circ = \alpha$ y, por tanto,

$$\begin{cases} \operatorname{sen} 160^\circ = \operatorname{sen} 20^\circ \\ \operatorname{cos} 160^\circ = -\operatorname{cos} 20^\circ \end{cases}$$
- (2) Si $\beta = 200^\circ$ (ángulo del tercer cuadrante), se tiene que $200^\circ = 180^\circ + \alpha \Rightarrow \alpha = 20^\circ$ y, por tanto,

$$\begin{cases} \operatorname{sen} 200^\circ = -\operatorname{sen} 20^\circ \\ \operatorname{cos} 200^\circ = -\operatorname{cos} 20^\circ \end{cases}$$
- (3) Si $\beta = 330^\circ$ (ángulo del cuarto cuadrante), se tiene que $360^\circ - 330^\circ = 30^\circ = \alpha$ y, por tanto,

$$\begin{cases} \operatorname{sen} 330^\circ = -\operatorname{sen} 30^\circ \\ \operatorname{cos} 330^\circ = \operatorname{cos} 30^\circ \end{cases}$$

Ángulos mayores de 360°

Si α es un ángulo mayor de 360° , entonces α y λ , donde $\lambda \in [0^\circ, 360^\circ]$ es el resto de dividir α entre 360° , tienen las mismas razones trigonométricas.

Ejemplo:

Vamos a expresar las razones trigonométricas del ángulo de 3335° en función de un ángulo del primer cuadrante:

$$3335^\circ \div 360^\circ = 9 \text{ con resto } 95^\circ \Rightarrow 3335^\circ = 360^\circ \cdot 9 + 95^\circ$$

$$\begin{cases} \operatorname{sen} 3335^\circ = \operatorname{sen} 95^\circ = \operatorname{sen} 85^\circ \\ \operatorname{cos} 3335^\circ = \operatorname{cos} 95^\circ = -\operatorname{cos} 85^\circ \end{cases}$$

Ejercicios:

9. Indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:
 - a) El seno de un ángulo puede ser mayor que uno.
 - b) El seno de un ángulo puede ser negativo.

- c) La tangente de un ángulo puede ser mayor que uno.
- d) La tangente de un ángulo puede ser cero.
- e) La secante de un ángulo puede ser negativa.
- f) La secante de un ángulo puede ser cero.

10. Expresa las razones trigonométricas de los siguientes ángulos en función de ángulos del primer cuadrante:

- a) 135° b) 245° c) 345°

11. Expresa las razones trigonométricas en función de ángulos del primer cuadrante:

- a) 405° c) $1\ 1230^\circ$ e) $1\ 247^\circ$
 b) 845° d) 785°

12. Averigua las restantes razones trigonométricas del ángulo α sabiendo:

- a) $\text{sen } \alpha = \frac{2}{9}$ y $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ b) $\text{cotg } \alpha = -5$ y $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

13. Razona si existe algún ángulo para el que se verifique:

- a) $\text{sen } \alpha = 0,3$ y $\text{cos } \alpha = 0,8$
- b) $\text{sen } \alpha = 0,72$ y $\text{tg } \alpha = 1,04$
- c) $\text{cos } \alpha = 0,1$ y $\text{sen } \alpha = 0,99$

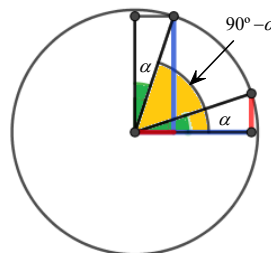
Se tienen, además las siguientes **propiedades**:

- a) $-1 \leq \text{sen } \alpha \leq 1$ o equivalentemente $|\text{sen } \alpha| \leq 1$
- b) $-1 \leq \text{cos } \alpha \leq 1$ o equivalentemente $|\text{cos } \alpha| \leq 1$
- c) $\text{tg } \alpha \in \mathbb{R} - \{\alpha : \text{cos } \alpha = 0\} = \mathbb{R} - \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2} \text{ con } k \in \mathbb{Z} \right\}$

5. RELACIÓN ENTRE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS DE DIFERENTES CUADRANTES

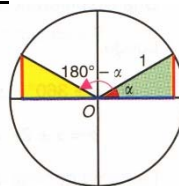
(i) Ángulos complementarios: α y $90^\circ - \alpha$

$$\begin{aligned} \text{sen } (90^\circ - \alpha) &= \text{cos } \alpha \\ \text{cos } (90^\circ - \alpha) &= \text{sen } \alpha \end{aligned}$$



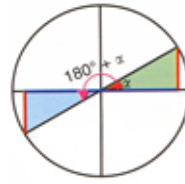
(ii) Ángulos suplementarios: α y $180^\circ - \alpha$

$$\begin{aligned} \text{sen } (180^\circ - \alpha) &= \text{sen } \alpha \\ \text{cos } (180^\circ - \alpha) &= -\text{cos } \alpha \end{aligned}$$



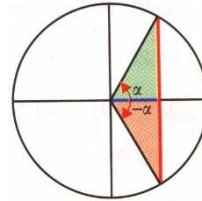
(iii) Ángulos que difieren en 180°: α y $180^\circ + \alpha$

$$\begin{aligned} \text{sen } (180^\circ + \alpha) &= -\text{sen } \alpha \\ \text{cos } (180^\circ + \alpha) &= -\text{cos } \alpha \end{aligned}$$



(iv) Ángulos opuestos α y $-\alpha$ o que suman 360°: α y $360^\circ - \alpha$

$$\begin{aligned} \text{sen } (-\alpha) &= \text{sen } (360^\circ - \alpha) = -\text{sen } \alpha \\ \text{cos } (-\alpha) &= \text{cos } (360^\circ - \alpha) = \text{cos } \alpha \end{aligned}$$



Ejercicios:

14. Calcula $\text{sen } 150^\circ$, $\text{cos } 240^\circ$, $\text{tg } 330^\circ$, $\text{sen } \frac{2\pi}{3}$ y $\text{cos } \frac{4\pi}{3}$.

15. Calcula las razones trigonométricas de los siguientes ángulos:

- a) 120° c) 210° e) 300°
- b) 135° d) 225° f) -45°

6. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE LA SUMA, LA DIFERENCIA, DEL ÁNGULO DOBLE Y DEL ÁNGULO MITAD

(i) **Razones trigonométricas de la suma y diferencia de ángulos**

$$\begin{aligned} \text{sen } (\alpha \pm \beta) &= \text{sen } \alpha \text{ cos } \beta \pm \text{cos } \alpha \text{ sen } \beta \\ \text{cos } (\alpha \pm \beta) &= \text{cos } \alpha \text{ cos } \beta \mp \text{sen } \alpha \text{ sen } \beta \\ \text{tg } (\alpha \pm \beta) &= \frac{\text{tg } \alpha \pm \text{tg } \beta}{1 \mp \text{tg } \alpha \text{ tg } \beta} \end{aligned}$$

(ii) **Razones trigonométricas del ángulo doble**

$$\begin{aligned} \text{sen } (2\alpha) &= 2 \text{ sen } \alpha \text{ cos } \alpha & \text{tg } (2\alpha) &= \frac{2 \text{ tg } \alpha}{1 - \text{tg}^2 \alpha} \\ \text{cos } (2\alpha) &= \text{cos}^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha \end{aligned}$$

(iii) **Razones trigonométricas del ángulo mitad**

$$\begin{aligned} \text{sen } \left(\frac{\alpha}{2} \right) &= \pm \sqrt{\frac{1 - \text{cos } \alpha}{2}} & \text{tg } \left(\frac{\alpha}{2} \right) &= \pm \sqrt{\frac{1 - \text{cos } \alpha}{1 + \text{cos } \alpha}} \\ \text{cos } \left(\frac{\alpha}{2} \right) &= \pm \sqrt{\frac{1 + \text{cos } \alpha}{2}} \end{aligned}$$

El signo + o - depende del cuadrante en el que se sitúe $\frac{\alpha}{2}$.

Ejercicios:

16. Demuestra:

- a) $\frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\cos x} = \operatorname{sen} x \cdot \sec x + 1$
 b) $\frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{cotg} x}{\operatorname{tg} x + \operatorname{cosec} x} = \cos x$
 c) $\cos \alpha \cos(\alpha + \beta) + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \cos \beta$
 d) $\operatorname{sen} 3x = 3 \operatorname{sen} x \cos^2 x - \operatorname{sen}^3 x$

17. Simplifica:

- a) $\frac{\operatorname{sen}(\pi + x) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}\right)}{-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)}$
 b) $\frac{(1 - \operatorname{sen}^2 x)^2}{\cos^2 x \cdot (1 - \operatorname{cosec}^2 x)}$
 c) $1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha$
 d) $\frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} + \frac{1 + \cos x}{\operatorname{sen} x}$
 e) $\sec \alpha - \sec \alpha \cdot \sec^2 \alpha$
 f) $\frac{\operatorname{cosec}^2 \alpha - \operatorname{cosec} \alpha}{\operatorname{cotg}^2 \alpha}$
 g) $\frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{1 - \cos^2 \alpha}$
 h) $\frac{\cos^4 \alpha - \operatorname{sen}^4 \alpha}{\cos(2\alpha)}$
 i) $\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{cosec}^2 \alpha}$
 j) $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \operatorname{tg}(\pi + \alpha)}{\operatorname{sen}(-\alpha)}$

18. Expresa en función de $\operatorname{tg} x$:

- a) $\operatorname{tg}(2\pi + x)$
 b) $\operatorname{tg}(3\pi + x)$
 c) $\operatorname{tg}(2\pi - x)$
 d) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$

19. ¿Cuáles de las siguientes igualdades son ciertas?

- a) $\operatorname{tg}(\pi + x) = -\operatorname{tg} x$
 b) $\cos(2\pi - x) = \cos x$
 c) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen} x$
 d) $\cos(x + 2\pi) = -\cos x$

20. En un tramo de carretera la inclinación es de 6° . Si ascendemos 45 m más de altura, ¿cuánto hemos avanzado sobre la carretera?
 (Sol.: 430,50 m)

21. Calcula los ángulos que forma una diagonal con los lados de un rectángulo de 110 m de base y 60 m de altura.
(Sol.: $28^{\circ} 36' 37,65''$ y $61^{\circ} 23' 22,35''$)
22. Calcula los ángulos de un trapecio isósceles cuyas bases miden 83 y 51 m y la altura, 60m.
(Sol.: $75^{\circ} 4' 6,9''$ y $104^{\circ} 55' 53,1''$)
23. Calcula el perímetro de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de 30 cm de diámetro.
(Sol.: 88,20 cm)
24. Si las puntas de un compás distan 8 cm y cada rama mide 15 cm, ¿qué ángulo forman éstas?
(Sol.: $30^{\circ} 55' 55,27''$)
25. Una escalera de 35 m está apoyada sobre una pared formando con la horizontal un ángulo de 50° . ¿A qué distancia de la pared está colocada la escalera? ¿A qué altura del suelo se encuentra el extremo superior de la escalera?
(Sol.: 22,50 m y 26,81 m)

7. ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Una **ecuación trigonométrica** es una ecuación en la que aparecen una o varias razones trigonométricas.

Para resolverlas hay que expresar dicha ecuación en función de un mismo ángulo y de una sola razón trigonométrica, o factorizarla. Para ello se usarán las fórmulas vistas en los apartados anteriores.

En este tipo de ecuaciones **siempre hay que comprobar** que los valores obtenidos verifican la ecuación original, es decir, son solución.

Ejercicios:

26. Halla los ángulos menores de 720° que cumplan:

- | | |
|---|--|
| a) $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 40^{\circ}$ | f) $\cos x = -\frac{1}{2}$ |
| b) $\cos x = \cos 25^{\circ}$ | g) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| c) $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(-30^{\circ})$ | h) $\operatorname{sen}(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ |
| d) $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4}$ | i) $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 0$ |
| e) $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(3\pi)$ | j) $\operatorname{cosec} x = -2$ |

27. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

- | | |
|---|--|
| a) $\operatorname{tg} \alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha$ | g) $\operatorname{sen}(2\alpha) = \operatorname{sen} \alpha$ |
| b) $\cos(2\alpha) = \cos \alpha$ | h) $\cos^2 x - 3 \cos x + 2 = 0$ |

c) $\text{sen}(3\alpha) = 2\text{sen}\alpha$

d) $\text{sen}\alpha = \cos\alpha$

e) $\cos(2\alpha) = 1 + 4\text{sen}x$

f) $\text{sen}x + \cos x = 1$

i) $4\text{sen}\alpha = \text{sen}(2\alpha)$

j) $\text{sen}\alpha = \cos 40^\circ$

k) $\text{tg}x \cdot \sec x = \sqrt{2}$

l) $\text{sen}^2 x - \cos^2 x = \frac{1}{2}$

8. TRANSFORMACIONES

$$\text{sen}\alpha + \text{sen}\beta = 2\text{sen}\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$\text{sen}\alpha - \text{sen}\beta = 2\text{sen}\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\text{sen}\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$\text{sen}\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\text{sen}(\alpha + \beta) + \text{sen}(\alpha - \beta)]$$

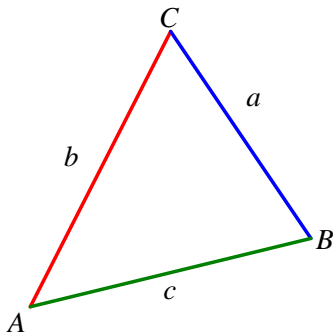
$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\text{sen}(\alpha + \beta) - \text{sen}(\alpha - \beta)]$$

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$$

9. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Resolver un triángulo es obtener sus elementos desconocidos (lados y ángulos) a partir de los elementos conocidos.



En un **triángulo cualquiera** se verifican:

1) $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$

2) Cualquier lado de un triángulo es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.

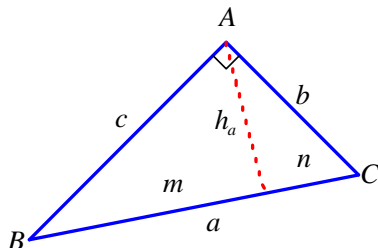
En un **triángulo rectángulo** se verifican:

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad (\text{Teorema de Pitágoras})$$

$$h_a^2 = mn \quad (\text{Teorema de la altura})$$

$$\begin{cases} b^2 = am \\ c^2 = an \end{cases} \quad (\text{Teorema del cateto})$$

$$\begin{cases} \text{sen}\widehat{B} = \cos\widehat{C} \\ \cos\widehat{B} = \text{sen}\widehat{C} \end{cases}$$



Formas de **determinar un triángulo rectángulo:**

- (1) Conocida la hipotenusa y un ángulo agudo
- (2) Conocidos un cateto y un ángulo agudo
- (3) Conocidos la hipotenusa y un cateto
- (4) Conocidos los dos catetos

10. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS NO RECTÁNGULOS

Teorema de los senos¹:

Los lados de un **triángulo no rectángulo** (acutángulo u obtusángulo) son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos:

$$\frac{a}{\widehat{\text{sen } A}} = \frac{b}{\widehat{\text{sen } B}} = \frac{c}{\widehat{\text{sen } C}}$$

Como **consecuencia:**

$$\frac{a}{\widehat{\text{sen } A}} = \frac{b}{\widehat{\text{sen } B}} = \frac{c}{\widehat{\text{sen } C}} = 2R$$

donde R es el radio de la circunferencia circunscrita² al triángulo ABC .

Teorema del coseno³:

El cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros lados menos el doble producto de estos lados por el coseno del ángulo comprendido:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \widehat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \widehat{C}$$

Si el ángulo \widehat{A} o \widehat{B} o \widehat{C} es recto, el teorema del coseno se reduce al teorema de Pitágoras.

Teorema de la tangente o de Neper⁴:

En cualquier triángulo:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\text{tg } \frac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2}}{\text{tg } \frac{\widehat{A} - \widehat{B}}{2}}$$

¹ Según Glen Van Brummelen, «La ley de los senos está basada en las soluciones de triángulos rectángulos de Regiomontanus (matemático alemán del siglo XV)». Dichas soluciones aparecen en el Libro IV de su "De Triangulis Omnimodis". A su vez, dichas soluciones fueron la base de sus soluciones de triángulos generales.

² La *circunferencia circunscrita* a un triángulo es la circunferencia que pasa por los tres vértices del triángulo.

Las tres mediatrices de los lados de un triángulo se cortan en el *circuncentro*, que equidista de los tres vértices y que es el centro de la circunferencia circunscrita del triángulo.

³ Se debe al matemático Ghiyath al-Kashi (1380-1429), de la escuela de Samarcanda. Sin embargo, esta propiedad fue popularizada en occidente por François Viète quien, al parecer, lo redescubrió independientemente.

⁴ Matemático escocés del siglo XVII.

Resolución de triángulos:

CASO I: Conocidos un lado y dos ángulos

Datos	Incógnitas	Fórmulas
a	\hat{A}	$\hat{A} = 180^\circ - \hat{B} - \hat{C}$
\hat{B}	b	$b = \frac{\text{sen } \hat{B}}{\text{sen } \hat{A}} \cdot a$
\hat{C}	c	$c = \frac{\text{sen } \hat{C}}{\text{sen } \hat{A}} \cdot a$

La solución de este problema es única y existe siempre que $\hat{B} + \hat{C} < 180^\circ$.

CASO II: Conocidos dos lados y el ángulo comprendido

Datos	Incógnitas	Fórmulas
a	c	$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}}$
b	\hat{A}	$\text{sen } \hat{A} = \frac{a}{c} \text{sen } \hat{C}$
\hat{C}	\hat{B}	$\hat{B} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{C}$

El problema siempre tiene solución y ésta es única.

Hay que tener en cuenta que la ecuación $\text{sen } \hat{A} = \frac{a}{c} \text{sen } \hat{C}$ tiene dos soluciones: una α y otra $\pi - \alpha$ (pues los senos de los ángulos suplementarios son iguales). De estas dos soluciones solamente una de ellas es solución del problema. Como a mayor lado se opone mayor ángulo y solamente puede haber, como máximo, un ángulo obtuso, por ser $a < c$ **la solución del problema será la que corresponde al ángulo agudo.**

CASO III: Conocidos dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos

Datos	Incógnitas	Fórmulas
a	\hat{A}	$\text{sen } \hat{A} = \frac{a}{b} \text{sen } \hat{B}$
b	\hat{C}	$\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B}$
\hat{B}	c	$c = \frac{\text{sen } \hat{C}}{\text{sen } \hat{A}} \cdot a$

Se pueden presentar los siguientes casos:

- a) Si $\text{sen } \hat{A} = \frac{a}{b} \text{sen } \hat{B} > 1$, **la ecuación no tiene solución** y por tanto **el problema también carece de solución.**

b) Si $\widehat{A} = \frac{a}{b} \widehat{B} = 1$, entonces $\widehat{A} = 90^\circ$. Se presentan dos subcasos:

(i) Si $\widehat{B} \geq 90^\circ$, *el problema carece de solución.*

(ii) Si $\widehat{B} < 90^\circ$, *el problema admite una única solución.*

c) Si $\widehat{A} = \frac{a}{b} \widehat{B} < 1$, entonces dicha ecuación tiene dos soluciones, una en el primer cuadrante \widehat{A}_1 y otra \widehat{A}_2 , que es el ángulo suplementario de \widehat{A}_1 . Las dos soluciones del problema dependen de que las desigualdades

$$\begin{cases} \widehat{A}_1 + \widehat{B} < 180^\circ \\ \widehat{A}_2 + \widehat{B} < 180^\circ \end{cases}$$

sean las dos, una o ninguna cierta. *En el primer caso tendremos dos soluciones, una para el segundo y ninguna para el tercero.*

CASO IV: Conocidos los tres lados

Datos	Incógnitas	Fórmulas
a	\widehat{A}	$\cos \widehat{A} = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc}$
b	\widehat{B}	$\cos \widehat{B} = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2ac}$
c	\widehat{C}	$\widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} - \widehat{B}$

La solución del problema es única y existe siempre que la suma de dos lados arbitrarios sea mayor que el tercero.

Ejemplos:

1. CASO I: conocidos dos ángulos y un lado

De un triángulo conocemos un lado $a = 6$ m y los ángulos $\widehat{B} = 45^\circ$ y $\widehat{C} = 105^\circ$. Resolver dicho triángulo.

El problema tiene solución única por que $\widehat{B} + \widehat{C} = 45^\circ + 105^\circ < 180^\circ$

El tercer ángulo mide $\widehat{A} = 180^\circ - 45^\circ - 105^\circ = 30^\circ$

Por el teorema de los senos:

$$\frac{a}{\widehat{\text{sen}} \widehat{A}} = \frac{b}{\widehat{\text{sen}} \widehat{B}} \rightarrow b = \frac{\widehat{\text{sen}} 45^\circ}{\widehat{\text{sen}} 30^\circ} \cdot 6 = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} \cdot 6 = 6\sqrt{2} \text{ m}$$

$$\frac{a}{\widehat{\text{sen}} \widehat{A}} = \frac{c}{\widehat{\text{sen}} \widehat{C}} \rightarrow c = \frac{\widehat{\text{sen}} 105^\circ}{\widehat{\text{sen}} 30^\circ} \cdot 6 = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1)}{\frac{1}{2}} \cdot 6 = 3\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1) \text{ m}$$

2. CASO II: conocidos dos lados y el ángulo comprendido

De un triángulo conocemos los lados $a = 10$ m y $b = 7$ m y el ángulo $\widehat{C} = 30^\circ$. Resolver el triángulo.

Este tipo de triángulos siempre tienen solución y ésta es única.

Por el teorema del coseno

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \widehat{C}} = \sqrt{100 + 49 - 140 \cos 30^\circ} = 5,26 \text{ m}$$

Calculamos ahora el ángulo que corresponde al menor de los dos lados:

$$\frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} \rightarrow \sin \widehat{B} = \frac{b}{c} \sin \widehat{C} = \frac{7}{5,26} \sin 30^\circ = 0,665 \rightarrow \widehat{B} = \begin{cases} 41^\circ 40'' \\ 138^\circ 20' \end{cases}$$

La solución del problema corresponde al ángulo $\widehat{B} = 41^\circ 40'$, ya que en este caso **la solución del problema se corresponde con la del ángulo agudo (pues a mayor lado se opone mayor ángulo)**.

El tercer ángulo vale $\widehat{A} = 180^\circ - 30^\circ - 41^\circ 40' = 108^\circ 20'$

3. CASO III: conocidos dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos**1.1 CASO IIIA:**

$$\sin \widehat{A} = \frac{a}{b} \sin \widehat{B} > 1 \text{ donde } \widehat{B} \text{ es el ángulo conocido}$$

De un triángulo conocemos los lados $a = 52$ m y $b = 32$ m y el ángulo $\widehat{B} = 40^\circ 30'$. Resolver el triángulo.

Aplicamos el teorema de los senos para calcular el ángulo \widehat{A} :

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} \rightarrow \sin \widehat{A} = \frac{a}{b} \sin \widehat{B} = \frac{52}{32} \sin 40^\circ 32' = 1,055$$

Por ser $\sin \widehat{A} > 1$, **el problema carece de solución.**

1.2 CASO IIIB:

$$\sin \widehat{A} = \frac{a}{b} \sin \widehat{B} = 1 \quad (\Rightarrow \widehat{A} = 90^\circ) \text{ donde } \widehat{B} \text{ es el áng. conocido}$$

3.2.1 $\widehat{B} \geq 90^\circ$ donde \widehat{B} es el ángulo conocido

En este caso el triángulo **no tiene solución**, ya que $\widehat{A} + \widehat{B} = 90^\circ + \widehat{B} \geq 180^\circ$.

3.2.2 $\widehat{B} < 90^\circ$ donde \widehat{B} es el ángulo conocido

De un triángulo conocemos los lados $a = 20$ m y $b = 10$ m, y ángulo conocido $\widehat{B} = 30^\circ$. Resolver el triángulo.

Este problema siempre tiene solución y es única.

Por el teorema del seno

$$\sin \widehat{A} = \frac{20}{10} \sin 30^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \rightarrow \widehat{A} = 90^\circ$$

Calculamos el lado que falta: c

$$c = \sqrt{20^2 - 10^2} = 10 \text{ por el teorema de Pitágoras}$$

Calculamos el ángulo \hat{C} :

$$\hat{C} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

1.3 CASO IIIc:

$$\text{sen } \hat{A} = \frac{a}{b} \text{sen } \hat{B} < 1 \text{ donde } \hat{B} \text{ es el ángulo conocido}$$

De un triángulo conocemos los lados $a = 10 \text{ m}$ y $b = 20 \text{ m}$ y ángulo conocido $\hat{B} = 30^\circ$. Resolver el triángulo.

Por el teorema del seno

$$\text{sen } \hat{A} = \frac{10}{20} \text{sen } 30^\circ = 0,25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{A}_1 = 14^\circ 28' 39,04'' \\ \hat{A}_2 = 180^\circ - 14^\circ 28' 39,04'' = 165^\circ 31' 20,9'' \end{cases}$$

El problema puede tener 2, 1 o 0 soluciones dependiendo de que las desigualdades

$$\begin{cases} \hat{A}_1 + \hat{B} < 180^\circ \\ \hat{A}_2 + \hat{B} < 180^\circ \end{cases}$$

sean ciertas las dos, una o ninguna.

En nuestro caso $\begin{cases} 14^\circ 28' 39,04'' + 30^\circ < 180^\circ \text{ que es cierta} \\ 165^\circ 31' 20,9'' + 30^\circ > 180^\circ \end{cases}$ y, por tanto, el triángulo admite una sola solución que se corresponde con el ángulo $165^\circ 31' 20,9''$.

Calculamos el ángulo \hat{C} :

$$\hat{C} = 180^\circ - 30^\circ - 14^\circ 28' 39,04'' = 135^\circ 31' 20,9''$$

Calculamos en lado que falta: c

Por el teorema del coseno:

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C} \rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}} = \\ &= \sqrt{10^2 + 20^2 - 2 \cdot 10 \cdot 20 \cdot \cos 135^\circ 31' 20,9''} = 28,03 \text{ m} \end{aligned}$$

4. CASO IV: conocidos los tres lados

De un triángulo conocemos los tres lados $a = 15 \text{ m}$, $b = 22 \text{ m}$ y $c = 17 \text{ m}$. Resolver el triángulo.

El problema tiene solución única (pues la suma de dos lados arbitrarios es mayor que el tercero y su diferencia, menor que el otro).

Aplicamos el teorema del coseno para calcular los tres ángulos:

$$\begin{aligned} \cos \hat{A} &= \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc} = \frac{-225 + 484 + 289}{748} = 0,7326 \rightarrow \hat{A} = 42^\circ 54' \\ \cos \hat{B} &= \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2ac} = \frac{225 - 484 + 289}{510} = 0,0588 \rightarrow \hat{B} = 86^\circ 38' \end{aligned}$$

$$\cos \hat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{225 + 484 - 289}{660} = 0,6363 \rightarrow \hat{C} = 50^\circ 28'$$

11. ÁREA DE UN TRIÁNGULO

Sea S el área del triángulo. Se tienen las siguientes fórmulas:

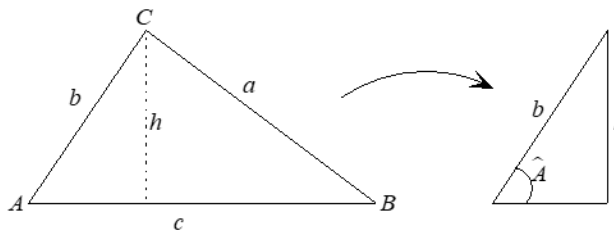
(1) Conocido un lado y la altura correspondiente

$$S = \frac{b \cdot h}{2}$$

(2) Conocidos dos lados y el ángulo comprendido

$$S = \frac{b \cdot c \cdot \text{sen } \hat{A}}{2} \quad \text{o} \quad S = \frac{a \cdot b \cdot \text{sen } \hat{C}}{2} \quad \text{o} \quad S = \frac{a \cdot c \cdot \text{sen } \hat{B}}{2}$$

Vamos a deducir la primera:



$$\left. \begin{array}{l} S = \frac{1}{2} \text{base} \cdot \text{altura} = \frac{1}{2} c \cdot h \\ \text{sen } \hat{A} = \frac{h}{b} \Rightarrow h = b \text{sen } \hat{A} \end{array} \right\} \Rightarrow S = \frac{1}{2} bc \text{sen } \hat{A}$$

(3) Conocidos dos ángulos y un lado

$$S = \frac{b^2 \cdot \text{sen } \hat{A} \cdot \text{sen } \hat{C}}{2 \text{sen } \hat{B}} \quad \text{o} \quad S = \frac{a^2 \cdot \text{sen } \hat{B} \cdot \text{sen } \hat{C}}{2 \text{sen } \hat{A}} \quad \text{o} \quad S = \frac{c^2 \cdot \text{sen } \hat{A} \cdot \text{sen } \hat{B}}{2 \text{sen } \hat{C}}$$

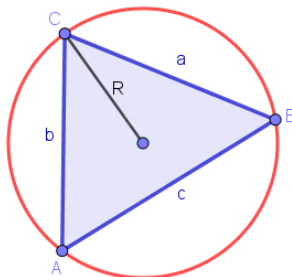
Deducimos la primera:

Usando el teorema del seno y sustituyendo en la fórmula anterior:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}} \Rightarrow c = \frac{b \text{sen } \hat{C}}{\text{sen } \hat{B}} \\ S = \frac{bc \text{sen } \hat{A}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow S = \frac{b^2 \text{sen } \hat{C} \text{sen } \hat{A}}{2 \text{sen } \hat{B}}$$

(4) Conocidos los lados y el radio de la circunferencia circunscrita

$$S = \frac{abc}{4R}$$



Por el teorema del seno

$$\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}} = 2R \Rightarrow \text{sen } \hat{A} = \frac{a}{2R}$$

y sustituyendo en

$$S = \frac{b \cdot c \cdot \text{sen } \hat{A}}{2}$$

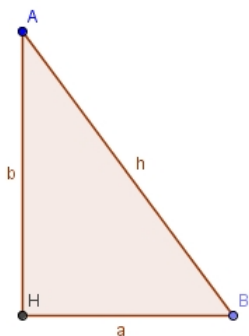
obtenemos: $S = \frac{abc}{4R}$

(5) Conocidos los lados (Fórmula de Herón)

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{donde } s = \frac{a+b+c}{2} \text{ es el semiperímetro.}$$

Ejercicios:

28. Resuelve los siguientes triángulos rectángulos:

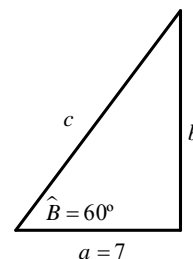
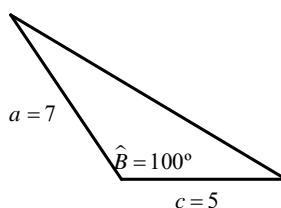
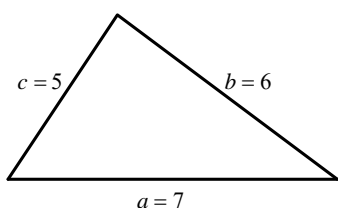


- a) $a = 2 \text{ cm}, h = 5 \text{ cm}$
- b) $a = 4 \text{ cm}, \hat{A} = 45^\circ$
- c) $h = 3 \text{ cm}, \hat{B} = 50^\circ$
- d) $a = 15 \text{ cm}, \hat{B} = 30^\circ$
- e) $\hat{B} = 30^\circ, b = 4 \text{ cm}$
- f) $h = 13 \text{ cm}, b = 5 \text{ cm}$

29. Resuelve, cuando sea posible, los siguientes triángulos:

- a) $a = 51 \text{ cm}, \hat{B} = 40^\circ, \hat{C} = 55^\circ$
- b) $a = 13 \text{ cm}, b = 12 \text{ cm}, c = 5 \text{ cm}$
- c) $a = 6 \text{ cm}, b = 7 \text{ cm}, c = 5 \text{ cm}$
- d) $b = 6 \text{ cm}, c = 8 \text{ cm}, \hat{A} = 50^\circ$
- e) $a = 5 \text{ cm}, b = 4 \text{ cm}, \hat{C} = 30^\circ$
- f) $a = 42 \text{ cm}, b = 50 \text{ cm}, \hat{B} = 85^\circ$
- g) $a = 10 \text{ cm}, c = 12 \text{ cm}, \hat{A} = 57^\circ 50'$
- h) $b = 11,5 \text{ cm}, c = 17 \text{ cm}, \hat{B} = 41^\circ 23'$

30. Resuelve los siguientes triángulos:



31. Resuelve el triángulo ABC sabiendo que $a = 3 \text{ cm}, b = 5 \text{ cm}$ y el radio de la circunferencia que circunscribe a dicho triángulo mide 3 centímetros.

32. El área de un triángulo es 210 cm^2 y dos de sus ángulos miden 105° y 30° . ¿Cuánto miden sus lados?

33. Calcula el perímetro de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de 7,5 centímetros de radio.

34. Calcula los ángulos de un rombo sabiendo que sus diagonales miden 20 cm y 40 cm.

- 35.** Dos coches salen del mismo punto en el mismo instante por dos carreteras que forman 45° . Si la velocidad de los coches es de 80 km/h, calcula qué distancia los separa al cabo de una hora y media.
- 36.** Desde dos puntos A y B separados 500 metros se dirigen dos visuales a un avión. El observador situado en A ve el avión bajo un ángulo de 47° y el observador situado en B bajo un ángulo de 50° . ¿A qué altura vuela el avión? (A , B y el avión están en el mismo plano vertical).
- 37.** Para calcular la anchura AB de un lago se dirigen sendas visuales desde el punto C a A y a B . Sabiendo que las visuales forman un ángulo de 34° y observando los datos del dibujo, calcula la anchura del lago.

