

UNIDAD 2: NÚMEROS COMPLEJOS

El camino más corto entre dos verdades del Análisis Real pasa por el Análisis Complejo.

Jacques Hadamard

1. CONSTRUCCIÓN¹

Sea $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ el conjunto de los pares ordenados de números reales. La representación gráfica de \mathbb{R}^2 es el plano cartesiano considerado como conjunto de puntos.

A los pares de números reales $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ los llamaremos números complejos, cuando en \mathbb{R}^2 estemos considerando las siguientes operaciones:

- suma: $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$
- producto: $(x, y)(x', y') = (xx' - yy', xy' + yx')$

(proceso de construcción de Hamilton).

Suele decirse que el número complejo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ está escrito en forma cartesiana.

Los números reales x e y , como partes del número complejo $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, reciben los siguientes nombres:

- x se denomina parte real, y se representa por $\text{Re } z$
- y se denomina parte imaginaria, y se representa por $\text{Im } z$

El conjunto de los números complejos se representa por \mathbb{C} :

$$\mathbb{C} = \{(x, y) \in (\mathbb{R}^2, +, \cdot)\}$$

y tiene estructura de cuerpo conmutativo (igual que el conjunto de los números reales).

Propiedad: Todo número real es un número complejo (de parte imaginaria cero), es decir, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
 Por tanto, haremos la siguiente identificación: $(x, 0) = x$ (es decir, los números reales son los complejos de parte imaginaria cero).

Como *consecuencia*, tenemos la siguiente cadena conjuntista de inclusiones:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

$$\cup$$

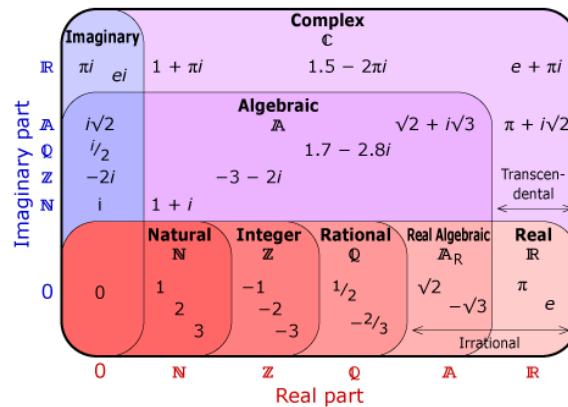
$$\mathbb{I}$$

que podemos visualizar gráficamente con el siguiente diagrama de Venn-Euler:

¹ Generalmente se comienza definiendo $i = \sqrt{-1}$, y después los números complejos. Esto tiene un "pequeño" problema conocido como *paradoja de Bernouilli*:

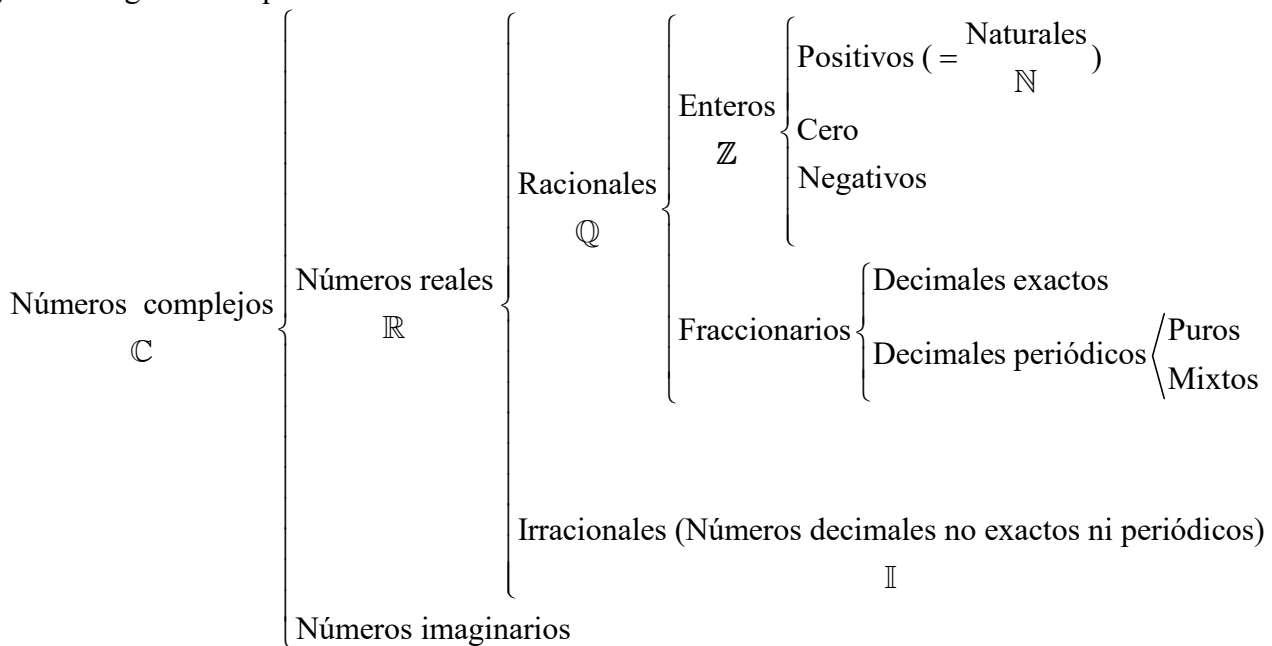
$$-1 = i^2 = i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{1} = 1$$

¿Dónde está el error?



Fuente: <https://thekid.tumblr.com/post/27730022891>

y con el siguiente esquema:



Existe un número complejo especialmente importante que representaremos por i , que se denomina unidad imaginaria²:

$$i = (0, 1)$$

y que verifica:

$$i^2 = (-1, 0) = -1$$

Como consecuencia de lo anterior, todo número complejo se puede escribir en la forma

$$(x, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0) = x + iy$$

y que se denomina forma binómica del número complejo (x, y) .

² En el año 1777, Leonhard Euler designó por i a $\sqrt{-1}$, por imaginario, de manera despectiva dando a entender que no tenía una existencia real.

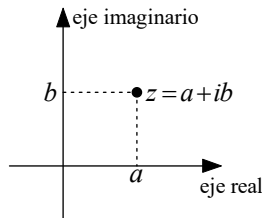
Gottfried Wilhelm Leibniz, en el siglo XVII, expresó "El Espíritu divino se manifestó sublimemente en esta maravilla del análisis, en este portento del mundo de las ideas, este anfibio entre el ser y el no ser, que llamamos raíz imaginaria de la unidad negativa".

Fuente: https://www.ecured.cu/N%C3%BAmeros_imaginarios

Igualdad en forma binómica:
$$\left. \begin{matrix} z_1 = x_1 + iy_1 \\ z_2 = x_2 + iy_2 \end{matrix} \right\} z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$$

Representación cartesiana o gráfica³ (diagrama de Argand-Gauss⁴):

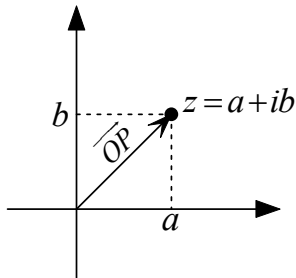
A cada número complejo $z = a + ib$ le asociamos un (único) punto del plano cartesiano, que se denomina afijo de z . Como consecuencia se habla del plano complejo.



$$z = a + ib \leftrightarrow P(a, b)$$

Representación vectorial:

Uniendo el origen de coordenadas O con el punto P , afijo del número complejo $z = a + ib$, obtenemos el vector \overline{OP} asociado al número complejo z .

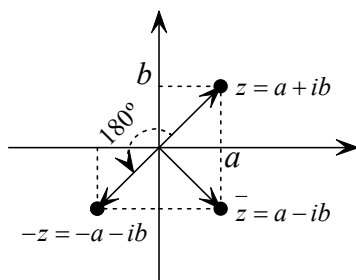


$$z = a + ib \leftrightarrow \overline{OP}$$

Conjugado: $z = x + iy \Rightarrow \bar{z} = x - iy$

Opuesto: $z = x + iy \Rightarrow -z = -(x + iy) = -x - iy$

Interpretaciones geométricas



z y \bar{z} son simétricos respecto del eje real

z y $-z$ están relacionados por un giro de 180°

³ "La visualización de los números reales mediante los puntos de una recta o de los números complejos mediante los puntos del plano no solamente penetró sin gran resistencia en el Análisis, sino que se puede decir con razón que, en el caso de los números complejos, esta visualización (Argand, Gauss) fue lo que hizo posible vencer la fuerte oposición de la comunidad matemática al dar carta de ciudadanía a los números complejos".

El rincón de la pizarra: ensayos de visualización en análisis matemático.
Miguel de Guzmán

⁴ Parece ser que, en realidad, fue Hamilton el primero que representó los números complejos como puntos del plano.

2. OPERACIONES EN FORMA BINÓMICA

$$\text{Suma: } \left. \begin{array}{l} z_1 = x_1 + iy_1 \\ z_2 = x_2 + iy_2 \end{array} \right\} \Rightarrow z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

Propiedades de la suma:

(1) Asociativa: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$

(2) Conmutativa: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

(3) Existencia de elemento neutro ($0 = 0 + i \cdot 0$): $z + 0 = 0 + z = z$

(4) Existencia de elemento opuesto ($z = x + iy \Rightarrow -z = -x - iy$): $z + (-z) = 0$

$$\text{Resta: } \left. \begin{array}{l} z_1 = x_1 + iy_1 \\ z_2 = x_2 + iy_2 \end{array} \right\} \Rightarrow z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

$$\text{Multiplicación: } \left. \begin{array}{l} z_1 = x_1 + iy_1 \\ z_2 = x_2 + iy_2 \end{array} \right\} \Rightarrow z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

Propiedades de la multiplicación:

(5) Asociativa: $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$

(6) Conmutativa: $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$

(7) Existencia de elemento neutro: $1 = 1 + i \cdot 0 \Rightarrow z \cdot 1 = z$

(8) Existencia de elemento inverso:

$$z = x + iy \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$$

(9) Distributiva de la multiplicación respecto de la suma:

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$$

Por cumplir las nueve propiedades anteriores se dice que \mathbb{C} es un cuerpo conmutativo:

$$\boxed{(\mathbb{C}, +, \cdot) = \text{cuerpo conmutativo de los números complejos}}$$

División: $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$

$$\frac{z_1}{z_2} \stackrel{[1]}{=} \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 - (iy_2)^2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

donde en [1] hemos multiplicado y dividido por el conjugado del denominador.

$$\text{Potenciación: } \left\{ \begin{array}{l} z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_{n\text{-veces}} \text{ con } n \in \mathbb{N} \\ z^0 = 1 \text{ siempre que } z \neq 0 \\ z^{-n} = \frac{1}{z^n} \text{ siempre que } z \neq 0 \end{array} \right.$$

Se usa la fórmula del binomio de Newton:

$$(x + iy)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x^{m-k} (iy)^k$$

donde $\binom{m}{k} := \frac{m!}{k!(m-k)!}$, $m! = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ y $0! := 1$.

Potencias de i :

Se tiene que:

$$\begin{array}{lll} i^0 = 1 & i^4 = 1 & i^8 = 1 \\ i^1 = i & i^5 = i & i^9 = i \\ i^2 = -1 & i^6 = -1 & i^{10} = -1 \quad \dots \\ i^3 = -i & i^7 = -i & i^{11} = -i \end{array}$$

esto es, las potencias de i se repiten cada cuatro. Así, calcular i^k con $k \in \mathbb{N}$ equivale a calcular i^R , donde R es el resto de dividir k entre 4:

$$i^k = i^R$$

con $\begin{array}{l} k \\ R \end{array} \mid 4$ (matemáticamente esto se escribe $k \equiv R \pmod{4}$ y se lee " k es congruente con R módulo 4").

Ejercicios:

1. *Dados los siguientes números complejos:*

$$\begin{array}{llll} z_1 = 4 - 5i & z_2 = 2 + 3i & z_3 = -3 + 5i & z_4 = 6 + 2i \\ z_5 = (7, 8) & z_6 = (-4, -9) & z_7 = (-12, 2) & z_8 = (4, 5) \end{array}$$

efectúa las siguientes operaciones algebraicas:

$$\begin{array}{llll} 1) z_1 + z_2 & 3) z_8 + z_7 & 5) z_1 : z_2 & 7) \frac{z_2 \cdot z_3}{z_4} \\ 2) z_4 - z_3 & 4) z_1 \cdot z_3 & 6) z_3 : z_4 & 8) \frac{z_1}{z_2 \cdot z_1} \end{array}$$

2. *Calcula las partes reales e imaginarias de cada uno de los siguientes números:*

$$\begin{array}{lll} 1) \frac{3-2i}{2+i} & 7) \frac{1}{(1-i)^5} & 12) \frac{4+i}{1-3i} \\ 2) \frac{3-2i}{2-3i} & 8) \frac{5-5i}{3+4i} & 13) \frac{1+3i}{2+i} \\ 3) (1-i)(1+i)i & 9) (5-i)(1+5i) & 14) \frac{(2-i)(1-2i)^2}{3+i} \\ 4) (1+i)^4 & 10) (2+5i)^3 & 15) (3-2i)^3 \\ 5) \frac{(1-i)^5}{(1+i)^5} & 11) \frac{1}{(1-i)^6} & 16) \frac{(1+i)(1-i)^4}{(1+2i)^3} \end{array}$$

6) $(1-i)(2+3i)(3+i)(2-2i)$

17) i^{3459}

3. Sean z y w dos números complejos cualesquiera. Comprueba la igualdad $\bar{z} \cdot \bar{w} = \overline{z \cdot w}$.

4. Dados los números complejos $z_1 = 2i$, $z_2 = -i$ y $z_3 = 4i$, calcula:

a) $z_3 \cdot z_2$ b) $\frac{z_1}{(z_2)^2}$ c) $\frac{z_1 \cdot z_2^3}{z_3}$

d) $z_1 \cdot z_2$ e) $\frac{(z_1)^3}{z_2 \cdot (z_3)^2}$ f) $z_3 \frac{z_1}{z_2}$

5. Sea $z = \frac{k+i}{2+i}$. Calcula el valor de k para que $z = 2-i$.

6. Sea $z = (3-6i)(4-ki)$. Calcula el valor de k para que z sea un número imaginario puro.

7. Sea $z = (3-6i)(4-ki)$. Calcula el valor de k para que z sea un número real.

8. Determina m y n para que se cumpla la igualdad: $\frac{4m-2i}{3+ni} = 6-2i$.

9. La suma de dos números complejos es $3+i$ y la parte real de uno de ellos es 2. Determina dichos números sabiendo que su cociente es imaginario puro.

Se define el módulo de un número complejo $z = x+iy$ por:

$$|z| = +\sqrt{x^2 + y^2}$$

Ejercicios:

10. Sea $z = \frac{k+i}{2+i}$. Calcula el valor de k para que $|z| = \sqrt{2}$.

11. La suma de las partes reales de dos complejos conjugados es 6 y el módulo de uno de ellos es 5. Calcula ambos números.

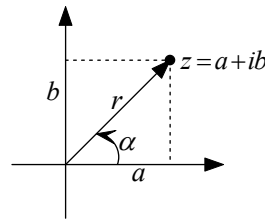
3. FORMA POLAR DE UN NÚMERO COMPLEJO

A cada número complejo $z = a+bi$ se le asigna un punto, $P(a,b)$, en el plano, y uniendo el origen de coordenadas, O , con dicho punto, hemos visto que se obtiene el vector \overrightarrow{OP} , que caracteriza al número complejo z .

El punto P se puede determinar mediante sus coordenadas, (a,b) , o mediante el módulo del vector \overrightarrow{OP} y el ángulo, α , que este forma con el semieje positivo de abscisas, que se denomina argumento.

Dicha forma de expresar el número complejo $z = a + bi$ se denomina **forma polar o forma módulo-argumento**.

$$\left. \begin{aligned} r &= |\overline{OP}| \\ \alpha &= \angle \{ \overline{OX^+}, \overline{OP} \} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a} \end{aligned} \right\} \Rightarrow z = r_\alpha$$



Sin embargo, la determinación del argumento de un número complejo mediante la expresión anterior no es única, ya que existen infinitos ángulos con una misma tangente. Nosotros trabajaremos con el argumento entre 0 y 2π , que se denomina argumento principal del número complejo z y que depende de los signos de a y b , es decir, del cuadrante en el que está situado el afijo de dicho número.

Igualdad en forma polar: $r_\alpha = s_\beta \Leftrightarrow \begin{cases} r = s \\ \beta = \alpha + 2k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

4. FORMAS DE ESCRIBIR UN NÚMERO COMPLEJO

Forma cartesiana
 $z = (a, b)$

Forma binómica
 $z = a + ib$

Forma polar
 $z = r_\alpha$

Forma trigonométrica
 $z = r(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$

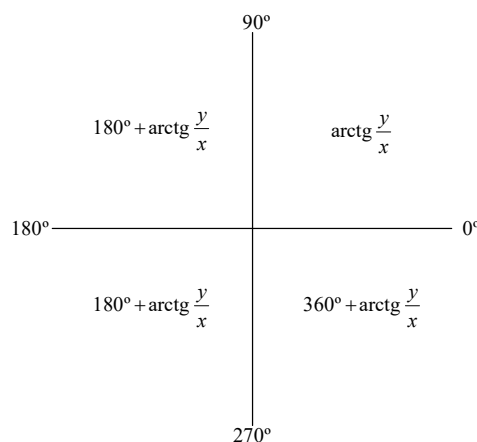
5. CONVERSIÓN ENTRE LAS DISTINTAS FORMAS

- De cartesiana a binómica

$$z = (x, y) \Rightarrow z = x + iy$$

- De binómica a polar

$$z = x + iy \Rightarrow z = r_\alpha \text{ donde } \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \alpha = \beta + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \text{ (ver gráfico adjunto para el valor de } \beta) \end{cases}$$



- De polar a trigonométrica

$$z = r_\alpha \Rightarrow z = r(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$$

19. Dado el número complejo 1_{80° , calcula sus cinco primeras potencias y haz un esbozo de su representación gráfica.

20. Haz un esbozo de la representación gráfica de las seis primeras potencias del número complejo $z = 2 - 2i$.

Radicación: Se llama raíz n -ésima, $n \geq 2$, del número complejo z , y la representamos por $\sqrt[n]{z}$, a cualquier número complejo w tal que $w^n = z$:

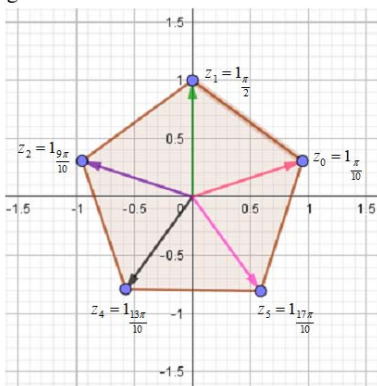
$$\sqrt[n]{z} = w \Leftrightarrow w^n = z$$

En forma polar tenemos:

$$\sqrt[n]{r_\alpha} = \left(\sqrt[n]{r}\right)_\beta \text{ donde } \beta = \frac{\alpha + 2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

Interpretación geométrica de las raíces n -ésimas

Todos los números complejos tienen exactamente n raíces distintas, cuyos afijos forman un n -ágono regular.



Raíces quintas de $z = i = 1_{90^\circ}$

Una propiedad⁵ sobre los radicales complejos:

$$\sqrt[n]{r_\alpha} \cdot \sqrt[n]{s_\beta} = \sqrt[n]{r_\alpha \cdot s_\beta} \Leftrightarrow 0 < \alpha + \beta < 360^\circ$$

Raíces cuadradas de -1 :

$$\sqrt{-1} = \sqrt{1_{180^\circ}} = \begin{cases} 1_{\frac{180^\circ + 0.360^\circ}{2}} = 1_{90^\circ} = i \\ 1_{\frac{180^\circ + 1.360^\circ}{2}} = 1_{270^\circ} = -i \end{cases}$$

Como consecuencia, **ya podemos trabajar de forma rigurosa** con expresiones de la forma $\sqrt{-x}$ con $x \in \mathbb{R}$:

$$\sqrt{-x} = \sqrt{x \cdot (-1)} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{x} \cdot i$$

Ejercicios:

21. Escribe en forma binómica y en forma cartesiana el cociente de los números 6_{120° y $3_{\pi/3}$.

22. Realiza las operaciones en forma polar y después pasa a forma binómica:

⁵ Con la que ya puedes ver dónde está el error del principio de la unidad (Paradoja de Bernouilli).

- a) $3_{45^\circ} \cdot 2_{15^\circ}$ e) $1_{33^\circ} \cdot 2_{16^\circ} \cdot 3_{41^\circ}$ i) $5_{23^\circ} \cdot 3_{97^\circ}$
 b) $9_{37^\circ} : 3_{97^\circ}$ f) $(2_{51^\circ})^4 : (4_{72^\circ})^2$ j) $2_{106^\circ} : 1_{61^\circ}$
 c) $6_{-21^\circ} : 2_{24^\circ}$ g) $(2_{25^\circ})^3 \cdot 3_{15^\circ}$ k) $(1_{45^\circ})^{18} : (2_{90^\circ})^3$
 d) $(\sqrt{2} - i)^6$ h) $(3 - 3i)^8$ l) $(-2 + 2i)^{10}$

23. *Calcula el resultado de las siguientes operaciones, y escríbelos en todas las formas que conoces:*

a) $\frac{(1+i)(1-i)^5}{2-2\sqrt{3}i}$ b) $\frac{2}{1-\sqrt{3}i} + \frac{2}{1+\sqrt{3}i} + \frac{2}{1+i}$

24. *Halla las siguientes raíces:*

a) $\sqrt[3]{1+i}$ c) $\sqrt[3]{-i}$ e) $\sqrt[6]{-64}$ d) $\sqrt[3]{-27}$

25. *Calcula las raíces cuartas de -1 y de i .*

26. *Calcula y representa: $\sqrt[3]{\frac{1+i}{1-i}}$*

27. *Una raíz cuarta de un número complejo es $-1+i$. Calcula dicho número y sus restantes raíces cuartas.*

28. *Calcula las raíces cúbicas de:*

a) $\frac{(1+i) \cdot (1-i)^4}{(1+2i)^3}$ b) $\frac{i^5 - i^{-8}}{\sqrt{2}i}$ c) $\frac{-2+2i}{1+\sqrt{3}i}$ d) $\frac{1+i}{2-i}$
 e) $\frac{i^{-3} - i^4}{\sqrt{2}i}$ f) $\frac{\sqrt{3}+i}{-1+i}$ g) $\frac{1-i}{\sqrt{3}-i}$

29. *Calcula las raíces cuartas de $2-i$ y represéntalas gráficamente.*

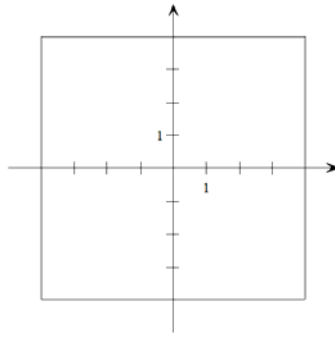
30. *Calcula las raíces quintas de $\frac{1+2i}{2-i}$.*

31. *Una raíz cúbica de un número complejo es $1+i$. Halla dicho número complejo y sus otras dos raíces cúbicas.*

32. *Calcula:*

a) $\sqrt[5]{\frac{32}{-i}}$ d) $\left(\frac{i^5 - i^{-8}}{\sqrt{2}i}\right)^5$ g) $\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^5$
 b) $\sqrt[3]{2-2i}$ e) $\sqrt[4]{-8+8\sqrt{3}i}$ h) $\left(\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}\right)^4$
 c) $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{-1+i}\right)^4$ f) $\sqrt[3]{(1-\sqrt{3}i) \cdot (-\sqrt{3}-i)}$

33. Los vértices del polígono de la figura son las raíces cuartas de un número complejo.



Determina dicho número complejo y sus raíces.

34. Escribe en todas las formas que conoces las soluciones de las ecuaciones:

a) $z^2 + iz + 2 = 0$ d) $z^3 + 2iz^2 + 2z = 0$

b) $z^2 + 2 = 0$ e) $\frac{z-3}{2z-i} = 1-i$

c) $\frac{z}{2i} + \frac{z+1}{4-2i} = 3$ f) $z^2 + 3z + 7 = 0$

7. OPERACIONES EN FORMA TRIGONOMÉTRICA

Multiplicación:

$$\left. \begin{array}{l} z = r(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha) \\ w = s(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta) \end{array} \right\} \Rightarrow z \cdot w = (r \cdot s) [\cos(\alpha + \beta) + i \operatorname{sen}(\alpha + \beta)]$$

División:

$$\left. \begin{array}{l} z = r(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha) \\ w = s(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta) \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{z}{w} = \frac{r}{s} [\cos(\alpha - \beta) + i \operatorname{sen}(\alpha - \beta)]$$

Potenciación:

Fórmula de De Moivre: $[r(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)]^n = r^n [\cos(n\alpha) + i \operatorname{sen}(n\alpha)]$

Ejercicios:

35. Calcula las siguientes potencias:

a) $\left[(\sqrt{3})^{\frac{\pi}{3}} \right]^4$

b) $\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \right)^3$

c) $\left(1_{\frac{3\pi}{2}} \right)^{50}$

8*. NO HAY ORDEN EN \mathbb{C} COMPATIBLE CON SU ESTRUCTURA ALGEBRAICA

“Al ampliar \mathbb{R} a \mathbb{C} ganamos mucho pero también perdemos algo. En \mathbb{R} tenemos dos estructuras: la algebraica (las nueve propiedades que le dotan de estructura algebraica de cuerpo conmutativo y la de orden, que hacen que ese cuerpo esté totalmente ordenado). Ambas estructuras están armoniosamente relacionadas. Pues bien, en \mathbb{C} no hay nada parecido. **Podemos definir relaciones de orden en \mathbb{C} , pero no hay ninguna de ellas que sea compatible con la estructura algebraica.** En efecto, si suponemos que \leq es una relación de orden en \mathbb{C} compatible con su estructura algebraica, como $i \neq 0$ habría de ser $0 < i^2 = -1$ (esto todavía no es contradictorio porque pudiera ocurrir que la relación \leq no respetara el orden de \mathbb{R}). Pero también $0 < 1^2 = 1$, luego $0 < 1 + (-1) = 0$ y eso sí que es contradictorio. Por tanto, es imposible definir un concepto de número complejo positivo de forma que la suma y el producto de complejos positivos sea positivo. Por ello no se define en \mathbb{C} ningún orden. Así que ya sabes: ¡mucho cuidado con no escribir desigualdades entre números complejos! Naturalmente, puedes escribir desigualdades entre las partes reales o imaginarias de números complejos, porque tanto la parte real como la parte imaginaria de un número complejo son números reales”. [Francisco Javier Pérez González, Curso de Análisis Complejo, Universidad de Granada]

9*. TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA

Propiedad de conjugación: Sea $p(x)$ un polinomio con coeficientes reales. Si $z \in \mathbb{C}$ es una raíz de $p(x)$, entonces $\bar{z} \in \mathbb{C}$ también es raíz.

Teorema Fundamental del Álgebra: Todo polinomio de grado $n \in \mathbb{N}$, con coeficientes reales o complejos, tiene n raíces.

Feynman y el Teorema Fundamental del Álgebra

«Reflexionando sobre lo que hemos hecho hasta ahora, parece que nuestros logros son más bien modestos. Hemos añadido a \mathbb{R} básicamente un número, i , que nos genera “linealmente” \mathbb{C} , y que es una raíz del polinomio concreto $x^2 + 1$. ¿Qué sucederá con los demás polinomios? Esto lo expone estupendamente el premio Nobel de Física, **Richard Feynman**, en un capítulo llamado *Álgebra* de su libro [Feynman, R. & al.: *Física. Volumen I: Mecánica, radiación y calor*. Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington, Delaware, 1987.], p. 22-10:

“Ahora ustedes dirán: ¡Esto puede seguir indefinidamente! Hemos definido las potencias de los imaginarios y todo lo demás y cuando estamos listos, viene alguien con otra ecuación que no puede ser resuelta como $x^6 + 3x^2 = -2$. ¡Entonces tenemos que generalizar todo de nuevo!” Pero resulta que *con esta invención adicional* que es simplemente un número cuyo cuadrado vale -1 , *¡toda ecuación algebraica puede ser resuelta!* Este es un hecho fantástico que debemos dejar que lo demuestre el Departamento de Matemáticas. Las demostraciones son hermosas y muy interesantes, pero ciertamente no son evidentes por sí mismas. De hecho, la suposición más evidente es que vamos a tener que inventar de nuevo, de nuevo y de nuevo. Pero el milagro más grande es que no tenemos que hacerlo. Esta es la última invención. Después de esta invención de los números complejos, encontramos que las reglas siguen funcionando con los números complejos y hemos terminado de inventar cosas nuevas. Podemos encontrar la potencia compleja de cualquier número complejo, podemos resolver cualquier ecuación escrita algebraicamente en términos de un número finito de esos símbolos. No encontramos más números nuevos”.»

10. LAS IDENTIDADES NOTABLES EN \mathbb{C}

1. Cuadrado de una suma

$$(z+w)^2 = z^2 + w^2 + 2zw \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$$

Demostración:

$$\text{Sean } \left. \begin{array}{l} z = a + bi \\ w = c + di \end{array} \right\} \Rightarrow z + w = (a + c) + (b + d)i$$

Se tiene que:

$$(z+w)^2 = (z+w)(z+w) = (a^2 + 2ac - b^2 - 2bd + c^2 - d^2) + [2(a+c)(b+d)]i$$

Por otra parte,

$$z^2 = (a^2 - b^2) + (2ab)i$$

$$w^2 = (c^2 - d^2) + (2cd)i$$

$$2zw = (2ac - 2bd) + 2(ad + bc)i$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned} z^2 + w^2 + 2zw &= (a^2 + 2ac - b^2 - 2bd + c^2 - d^2) + [2a(b+d) + 2c(b+d)]i = \\ &= (a^2 + 2ac - b^2 - 2bd + c^2 - d^2) + [2(b+d)(a+c)]i \end{aligned}$$

Como consecuencia,

$$(z+w)^2 = z^2 + w^2 + 2zw \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$$

2. Cuadrado de una diferencia

$$(z-w)^2 = z^2 + w^2 - 2zw \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$$

Demostración:

$$\text{Sean } \left. \begin{array}{l} z = a + bi \\ w = c + di \end{array} \right\} \Rightarrow z - w = (a + c) - (b + d)i$$

Se tiene que:

$$(z-w)^2 = (z-w)(z-w) = (a^2 - 2ac - b^2 + 2bd + c^2 - d^2) + [2(a-c)(b-d)]i$$

Por otra parte,

$$z^2 = (a^2 - b^2) + (2ab)i$$

$$w^2 = (c^2 - d^2) + (2cd)i$$

$$2zw = (2ac - 2bd) + 2(ad + bc)i$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned} z^2 + w^2 - 2zw &= (a^2 + 2ac - b^2 - 2bd + c^2 - d^2) + [2a(b-d) - 2c(b-d)]i = \\ &= (a^2 + 2ac - b^2 - 2bd + c^2 - d^2) + [2(b-d)(a-c)]i \end{aligned}$$

Como consecuencia,

$$(z-w)^2 = z^2 + w^2 - 2zw \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$$

3. Suma por diferencia

$$\boxed{(z+w)(z-w) = z^2 - w^2 \quad \forall z, w \in \mathbb{C}}$$

Demostración:

$$\text{Sean } \begin{cases} z = a + bi \\ w = c + di \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z + w = (a + c) + (b + d)i \\ z - w = (a + c) - (b + d)i \end{cases}$$

Se tiene que:

$$(z+w)(z-w) = a^2 - b^2 - c^2 + d^2 + 2(ab - cd)i$$

y que:

$$z^2 - w^2 = a^2 - b^2 - c^2 + d^2 + 2(ab - cd)i$$

Como consecuencia:

$$(z+w)(z-w) = z^2 - w^2 \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$$

Vídeos:

¿Qué son los números complejos?



<https://www.youtube.com/watch?v=LqyBrrgmIro>

La identidad de Euler | La ecuación más bella del mundo



<https://www.youtube.com/watch?v=2RC1NMF4uE0>

Los números trascendentes y un sorprendente misterio sobre pi y e



<https://www.youtube.com/watch?v=S8qHVMuoCZk&t=44s>

¿Existe el factorial de cero?



<https://www.youtube.com/watch?v=Q0S8pl4y4B8>