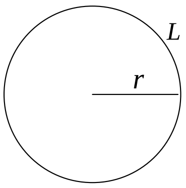
UNIDAD 1:
NÚMEROS REALES

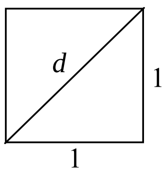
1. ALGUNOS NÚMEROS IRRACIONALES

El número pi: π (J.H. Lambert demostró en 1770 que es irracional)



$$L_{circunferencia} = 2 \cdot \pi \cdot r = \pi \cdot d \Rightarrow \pi = \frac{L}{d}$$

El número raíz de dos: $\sqrt{2}$ (ya se sabía en tiempos de Pitágoras que es irracional)



¿Cuál es la longitud de la diagonal? Aplicando el teorema de Pitágoras[1]:

$$d^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow d = \sqrt{2}$$

Demostración de la irracionalidad de $\sqrt{2}$:

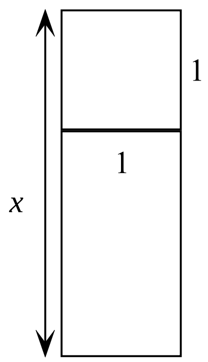
Supongamos que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ con a y b primos entre sí (es decir, la fracción es irreducible). Entonces:

$$2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} \text{ es reducible !! (!! Significa contradicción)}$$

ya que si $\frac{a}{b}$ es irreducible, entonces $\frac{a^2}{b^2}$ tiene que ser también irreducible.

El número de oro: Φ (Phi, en honor al escultor griego Fideas)

¿Cuál es la longitud de x para que los rectángulos sean semejantes?



Para que los rectángulos sean semejantes se tiene que verificar:

$$\frac{1}{x} = \frac{x-1}{1} \Rightarrow x^2 - x = 1$$

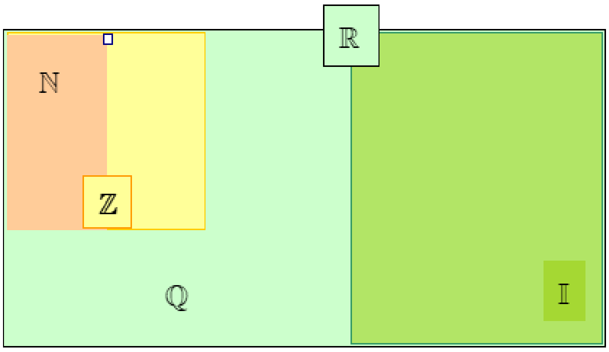
de donde $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} := \Phi$ (es la solución positiva de la ecuación anterior)

[1] **Enunciado de Euclides de Teorema de Pitágoras** (Proposición I.47, del Libro I, de “Los Elementos”): En los triángulos rectángulos el cuadrado del lado que subtiende el ángulo recto es equivalente a los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto.

Inverso del Teorema de Pitágoras (Proposición I.48, del Libro I, de “Los Elementos”): Si en un triángulo el cuadrado construido sobre uno de los lados es igual a los cuadrados construidos sobre los restantes lados del triángulo, el ángulo comprendido por esos lados restantes del triángulo es recto.

2. NÚMEROS REALES

- REALES
  - RACIONALES
    - ENTEROS
      - NATURALES
      - CERO
      - NEGATIVOS
    - FRACCIONARIOS
      - DECIMALES EXACTOS
      - PERIÓDICOS
        - PUROS
        - MIXTOS
  - IRRACIONALES (Decimales no exactos y no periódicos)



En el lenguaje de los conjuntos:

$$\begin{cases} \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \\ \mathbb{I} \subset \mathbb{R} \end{cases}$$

y también $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$

(El símbolo $\cup$ se denomina "unión")

Recuerda que hay números que no son reales:

$$\sqrt{-1}, \sqrt{-2}, \sqrt[4]{-3}, \sqrt[6]{-4}, \ldots$$

3. PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES CON NÚMEROS REALES

SUMA:

(1) Asociativa: $a+(b+c)=(a+b)+c$

(2) Conmutativa: $a+b=b+a$

(3) Existencia de elemento neutro (el cero): $a+0=a$. (*Dicho elemento es único*)

(4) Existencia de elemento opuesto (designado por $-a$): $a+(-a)=0$

<u>Consecuencias</u> que se obtienen:

(i) Resta: $a-b=a+(-b)$

(ii) $-(a+b)=-a-b$

PRODUCTO

(5) Asociativa: $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$

(6) Conmutativa: $a\cdot b=b\cdot a$

(7) Existencia de elemento neutro (el uno): $a\cdot 1=a$

(8) Existencia de elemento inverso (representado por $\frac{1}{a}$ o a^{-1}): $a\cdot\frac{1}{a}=1$ siempre que $a\neq 0$. (*Dicho elemento es único*)

(9) Distributiva: $a\cdot\left(b+c\right)=a\cdot b+a\cdot c$

Por cumplir las nueve propiedades anteriores se dice que $\mathbb{R}$ tiene estructura algebraica de cuerpo conmutativo:

$$\boxed{\left(\mathbb{R},+,\cdot\right)=\text{ cuerpo conmutativo de los números reales}}$$

Consecuencias:

(i) División: $a:b=a\cdot\frac{1}{b}$

(ii) $-\left(a\cdot b\right)=\left(-a\right)\cdot b=a\cdot\left(-b\right)$

Cuando se trabaja con números racionales, es conveniente utilizar sus expresiones fraccionarias, para así garantizar la exactitud del proceso. Sin embrago, ***cuando se trabaja con números reales***, se opera con aproximaciones y, por tanto, es conveniente precisar qué cifras del resultado se consideran exactas, a partir de las cifras aproximadas de los operandos.

4. LA RECTA REAL

Se le puede asignar una abscisa a cada número real, y recíprocamente, es decir, a todo punto de la recta graduada le corresponde un número real.

De este modo, la recta real está completa, no se le pueden añadir más puntos ni más números, por ello se habla de la recta real y de su ***propiedad de completitud***.

Ejercicios:

1. *¿Por qué $-5,02\overset{\frown}{45}$ no es un número irracional?*

2. *Determina y razona cuáles de los siguientes números son racionales y cuáles irracionales.*

$$\frac{3}{4},\quad \sqrt{\frac{3}{4}},\quad 0{,}015,\quad \sqrt{5},\quad \sqrt{\frac{1}{81}},\quad 3{,}1213141516...,\quad e,\quad \Phi$$

3. *Clasifica los siguientes números en naturales, enteros, racionales, irracionales y/o reales.*

$$0,\ 3{,}027,\ \frac{-2}{35},\ \sqrt[3]{0{,}000\ 000\ 1},\ 54{,}23,\ \frac{13}{32},\ -\sqrt[4]{256},\ \pi^3,\ \left(\sqrt{2}+1\right)^2$$

4. *Razona cuál de las siguientes frases es cierta:*

a) Todo número decimal se puede expresar como una fracción.
b) Los números reales se pueden expresar como un número decimal limitado o periódico.
c) Todo número racional es real.
d) Todo número entero es racional.
e) Hay números reales que no pueden expresarse como una fracción.
f) Entre dos números racionales hay infinitos irracionales.

g) *Los números irracionales no se pueden expresar como un número decimal.*

5. EL ORDEN DE LOS NÚMEROS REALES

Algebraicamente el orden se expresa mediante el símbolo $<$:

a es menor que b, y se escribe $a<b$ cuando $b-a>0$

b es mayor que a, y se escribe $b>a$ cuando $a<b$

Propiedades del orden:

(1) $a<b$ y $b<c \Rightarrow a<c$ (*Transitivo*)

(2) $a<b \Rightarrow a+c<b+c$ (*Monótono respecto de la suma*)

(3) $a<b \Rightarrow \begin{cases} a\cdot c<b\cdot c & \text{si } c>0 \\ a\cdot c>b\cdot c & \text{si } c<0 \end{cases}$

(4) $\forall a,b \in \mathbb{R}$ se tiene que $a\le b$ o $b\le a$ (*Orden total*)

Por cumplir estas cuatro propiedades se dice que el conjunto de los números reales está **totalmente ordenado**[2].

Ejercicios:

5. *Si* $a,b>0$ y $a<b$, *¿qué relación de desigualdad existe entre* $\frac{1}{a}$ y $\frac{1}{b}$?

6. *Si* $a<0$ y $b>0$, *¿qué relación de desigualdad existe entre* $\frac{1}{a}$ y $\frac{1}{b}$ *?*

7. *Si* x,y,z *son números reales positivos y*

$$x(y+z)>y(x+z)$$

¿qué relación de orden existe entre x e y *?*

Intervalos:

Los intervalos son subconjuntos de números reales que se corresponden con segmentos, semirrectas o la recta real.

- Intervalo abierto de extremos a y b :

  $(a,b)=\{x : a<x<b\}$

- Intervalo cerrado de extremos a y b :

[2] Recuerda que el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales con la suma y el producto también es un cuerpo conmutativo que está totalmente ordenado. Sin embargo, hay una propiedad fundamental que cumple $\mathbb{R}$ y que no cumple $\mathbb{Q}$, y que es la que los diferencia. Dicha propiedad es el axioma del supremo: todo conjunto no vacío y mayorado de números reales tiene supremo, es decir, el conjunto de sus mayorantes tiene mínimo.

Existen diversos procedimientos para introducir el cuerpo de los números reales. En los métodos "constructivos" se parte de los números naturales, a partir de ellos se definen los enteros y a partir de éstos últimos los racionales. El problema se presenta a la hora de definir los números reales a partir de los números racionales. Para ello, existen varios procedimientos, pero ninguno de ellos es intuitivo, aunque todos conducen a conjuntos que tienen las mismas propiedades (las de cuerpo conmutativo totalmente ordenado más el axioma del supremo) y que son matemáticamente indistinguibles, por lo que se habla del conjunto de los números reales. Por el contrario, los métodos "axiomáticos" admiten la existencia de un conjunto que verifica las propiedades anteriormente reseñadas, y que no es otro que el de los números reales.

$\left[a,b\right]=\left\{x:a\le x\le b\right\}$

- Intervalos semiabiertos o semicerrados

  $\left(a,b\right]=\left\{x:a<x\le b\right\}$

  $\left[a,b\right)=\left\{x:a\le x<b\right\}$

- Semirrectas

  $\left(-\infty,a\right)=\left\{x:x<a\right\}$ $\quad$ $\left(-\infty,a\right]=\left\{x:x\le a\right\}$

  $\left(b,+\infty\right)=\left\{x:x>b\right\}$ $\quad$ $\left[b,+\infty\right)=\left\{x:x\ge b\right\}$

- Recta real

  $\left(-\infty,+\infty\right)=\mathbb{R}$

<u>Entornos</u>:

Se define el **entorno** de centro $a\in\mathbb{R}$ y radio $r>0$, $E\left(a,r\right)$, como el intervalo abierto $\left(a-r,a+r\right)$

$$E\left(a,r\right)=\left(a-r,a+r\right)$$

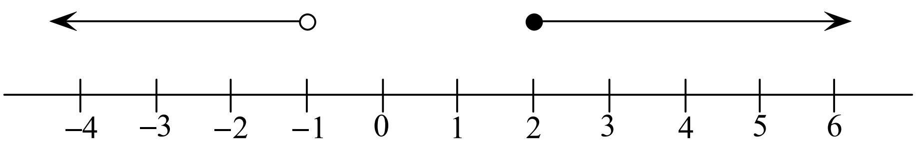
Se define el **entorno reducido** de centro $a\in\mathbb{R}$ y radio $r>0$, $E^{*}\left(a,r\right)$, por:

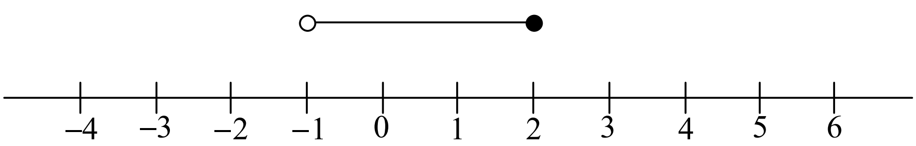
$$E^{*}\left(a,r\right)=E\left(a,r\right)-\left\{a\right\}=\left(a-r,a+r\right)-\left\{a\right\}=\left(a-r,a\right)\cup\left(a,a+r\right)$$

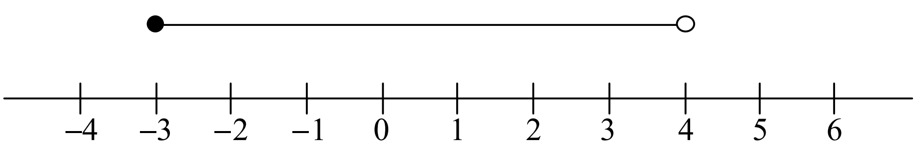
<u>Ejercicios:</u>

8. *Indica qué intervalos o conjuntos numéricos están representados, y representa los que faltan:*

$$\left(-3,4\right],\left(-\infty,-1\right)\cup\left[2,+\infty\right),\left\{x/-3<x\le 4\right\},\mathbb{R}-\left[-1,2\right),$$
$$\left[-3,4\right),\left(-1,2\right],\left\{x/-1<x\le 2\right\}$$







9. *Representa gráficamente los números reales que verifican* $-3<x\le 5$, $x>\sqrt{3}$, $x\le 4$ *y* $\frac{1}{2}\le x\le\frac{5}{3}$. *Indica en cada caso, de qué intervalo se trata.*

10. *Sabiendo que* $2x-1>0$ y $-3x>5$, *determina el intervalo al que pertenece* x.

6. RADICALES

Definición: Se define la raíz $n-$ésima $(n \in \mathbb{N})$ de un número real a por:

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

donde $a \geq 0$ si n par y $a \in \mathbb{R}$ si n es impar.

Los *elementos* de un radical son:

$$\text{Coeficiente} \rightarrow k \cdot \overset{\text{Índice}}{\overset{\downarrow}{\sqrt[n]{a}}} \leftarrow \text{Radicando}$$

Propiedad: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

Definición: Se dice que dos radicales son equivalentes cuando, al expresarlos en forma de potencia con exponente fraccionario, sus bases son iguales y las fracciones de sus exponentes son equivalentes:

$$\sqrt[n]{a^m} \text{ y } \sqrt[p]{a^q} \text{ son equivalentes } (\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[p]{a^q}) \Leftrightarrow \frac{m}{n} = \frac{q}{p}$$

Simplificar un radical es calcular su radical equivalente de índice menor.

Otras propiedades de las raíces:

(1) $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot r]{a^{m \cdot r}}$ con $r \neq 0$

(2) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

(3) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

(4) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

(5) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$

Operaciones con raíces:

- Suma y resta: Tienen que tener el mismo índice e idéntico radicando, esto es, deben ser semejantes.
  Se saca factor común el radical y se suman o se restan los coeficientes.
- Multiplicaciones y divisiones:
  Se pueden multiplicar y dividir raíces que tengan el mismo índice, multiplicando o dividiendo los correspondientes radicandos.

Racionalización de denominadores:
Es el proceso que se sigue para eliminar las raíces de las expresiones fraccionarias.
Estudiaremos dos casos:

1) En el denominador sólo hay un radical. En este caso, multiplicaremos numerador y denominador por un radical conveniente, de forma que al efectuar la multiplicación del denominador nos quede un número entero. (Recuerda que para poder multiplicar los

radicales, éstos tienen que tener el mismo índice, y para que se pueda simplificar el radicando resultante, su exponente tiene que ser igual al índice).

2) <u>En el denominador hay una suma o una resta, y uno de los sumandos es un radicando</u>. En este caso, se multiplica numerador y denominador por la expresión conjugada (se obtiene cambiado el signo que hay entre los sumandos) del denominador. (Recuerda que en el denominador siempre queda suma por diferencia, y aplicamos la correspondiente fórmula)

<u>Ejercicios:</u>

11. *Calcula:*

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(2\sqrt{2}\right)^5\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^3$ b) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}:\left(\frac{-1}{2}\right)^2\right]^{-2}$

c) $\dfrac{3^{-2}\left(\sqrt{3}\right)^3}{\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\sqrt{3}\right)^{-2}}$ d) $\left[\left(\frac{3}{2}\right)^0\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}:\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}\right]^2$

12. *Opera y simplifica:*

a) $\sqrt[6]{a^8}$ d) $\sqrt[3]{125^5}\cdot\sqrt[6]{\frac{-1}{5^6}}$

b) $\sqrt[3]{a^7}\cdot a\cdot\sqrt[3]{a^2}$ e) $\sqrt{15}\sqrt{27}\sqrt{40}$

c) $\sqrt[3]{a^8}$ f) $3\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{3}$

13. *Realiza las siguientes operaciones:*

a) $\left(2\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2$

b) $2\sqrt{6}\left(2\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2$

c) $\left(1-2\sqrt{5}\right)^2\left(1+2\sqrt{5}\right)^2$

d) $\left(\sqrt{3}-2\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{3}+5\right)$

e) $\left(\sqrt{3}-2\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)$

f) $\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)$

14. *Extrae factores de los radicales y realiza las siguientes operaciones:*

a) $\sqrt[6]{8}+\sqrt[4]{4}-7\sqrt{72}$

b) $\sqrt{75}-\frac{1}{3}\sqrt{18}+\frac{3\sqrt{12}}{4}-\sqrt{\frac{2}{25}}$

c) $\frac{1}{3}\sqrt{108}-5\sqrt{75}+\sqrt{243}-\sqrt{\frac{27}{121}}$

d) $\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{7\sqrt{108}}{4}+\sqrt{648}-\frac{2}{3}\sqrt{1875}$

e) $3-\sqrt{288}+\sqrt{363}-\frac{1}{3}\sqrt{800}+\frac{17}{2}\sqrt{\frac{27}{289}}$

15. *Efectúa y simplifica:*

a) $\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt[6]{2^5}}{\sqrt[3]{6^2}}$ c) $\dfrac{\sqrt[4]{2^6 5^3}\cdot\sqrt[4]{5^2 2^3}}{\sqrt[4]{10}}$

b) $\sqrt{\dfrac{2xy^{-3}z}{8x^{-1}y^2z^{-3}}}$ d) $\dfrac{\sqrt{0,0001}\cdot\sqrt{0,01}}{\sqrt{0,001}}$

16. *Racionaliza:*

a) $\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$ c) $\dfrac{1}{3\sqrt{2}+1}$

d) $\dfrac{5-\sqrt[3]{2}}{2\cdot\sqrt[3]{2}}$ e) $\dfrac{1}{\sqrt{2\sqrt{3}}}$ f) $\dfrac{1-\sqrt{7}}{2\sqrt{7}+1}$

17. *Racionaliza y efectúa:*

a) $\dfrac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\dfrac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}-\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$

c) $\dfrac{1}{1-\dfrac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}}+\dfrac{1}{1+\dfrac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}}$

7. VALOR ABSOLUTO

Definición: $|a|=\begin{cases} a & \text{si } a\geq 0 \\ -a & \text{si } a<0 \end{cases}$

Propiedades del valor absoluto:

(1) $|a|=|-a|$

(2) $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$

(3) $|a+b|\leq|a|+|b|$ (desigualdad triangular)

(4) $|a|<k$ (con $k>0$) $\Rightarrow -k<a<k$

Distancia entre dos números reales: $d(a,b)=|b-a|$

Ejercicios:

18. *Halla:* $|-11|$, $|\pi|$, $|\Phi-\pi|$, $|-\sqrt{5}|$, $|\sqrt[3]{-27}|$, $|0|$, $|3-\pi|$

(Indicación: No te dejes llevar por la rutina).

19. *Averigua para qué valores de x se cumplen las siguientes relaciones:*

a) $|x|=5$ b) $|x|\leq 5$ c) $|x-4|=2$

d) $|x-4|\leq 2$ e) $|x-4|>2$

20. *Expresa mediante desigualdades y conjuntos las siguientes expresiones:*

a) $|x|<7$ b) $|2x|<8$ c) $|x-1|\le 6$ d) $|x+2|>9$

e) $|x-5|\ge 1$ f) $|x-2|=5$ g) $|x-4|\le 7$ h) $|x+3|\ge 6$

8. LOGARITMOS

Con la reducción del trabajo de varios meses de cálculo a unos pocos días, el invento de los logaritmos parece haber duplicado la vida de los astrónomos.
Pierre Simon Laplace

Los logaritmos se inventaron con el propósito de simplificar, en especial a los astrónomos, las engorrosas multiplicaciones, divisiones y raíces de números muchas cifras, esto es, como un método para simplificar los cálculos. Sin embargo, en la actualidad se usa para determinar el pH de una disolución, los decibelios, dB, de un sonido, la magnitud de un terremoto, …

El logaritmo en base a $(>0 \text{ y } \neq 1)$ de un número N (llamado argumento) es el exponente al que hay que elevar la base para que dé dicho número:

$$\log_a N = x \Leftrightarrow a^x = N$$

Los logaritmos de base 10 se llaman decimales[3] y se representaban por log, y los logaritmos de base e se llaman naturales o neperianos y se representaban por $\ln$ o L.

Ejercicios:

21. *Calcula, aplicando la definición:*

a) $\log_2 1024$ b) $\log 0,001$ c) $\log_2 \frac{1}{64}$ d) $\log_e \frac{1}{e}$

e) $\log_e e^2$ f) $\log_2 \sqrt{8}$ g) $\log_3 3\sqrt{3}$ h) $\log_3 \frac{\sqrt{3}}{3}$

22. *Aplicando la definición de logaritmo resuelve los siguientes ejercicios:*

1) $2^x=16$ 2) $2^x=32$ 3) $3^{\frac{1}{x}}=9$

4) $\log_2 64 = x$ 5) $\log_3 81 = x$ 6) $\log_{101} 10\,201 = x$

7) $\log_{16} 0,5 = x$ 8) $\log_{10} 10^{-5} = x$ 9) $\log_x 125 = \frac{3}{2}$

10) $\log_x \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}$ 11) $\log_{125} \frac{1}{\sqrt{5}} = x$ 12) $\log_{343} \sqrt{7} = x$

13) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{81}{16} = x$ 14) $\log_{\frac{5}{3}} \frac{27}{125} = x$ 15) $\log_8 \sqrt[4]{2} = x$

Propiedades:

1) $\log_a a = 1$ y $\log_a 1 = 0$

2) $\log_a (MN) = \log_a M + \log_a N$

[3] Actualmente, esta notación está en desuso y se utiliza la notación $\log$ para representar el logaritmo natural.

3) $\log_a\left(\dfrac{M}{N}\right)=\log_a M-\log_a N$ siempre que $N\neq 0$

4) $\log_a N^m = m\cdot\log_a N \qquad \forall m\in\mathbb{R}$

Transformación de logaritmos:

5) $\log_a N=\dfrac{\log_e N}{\log_e a}$ (en los logaritmos de la parte de la derecha se puede poner la base que se quiera)

Otras propiedades:

6) Los logaritmos de un número en dos bases inversas a y $\dfrac{1}{a}$ son opuestos.

7) Conocidos los logaritmos en una base mayor que 1 se pueden hallar fácilmente en cualquier otra base.

Ejercicios:

23. *Calcula, aplicando las propiedades de los logaritmos:*

a) $\log_5 625$ b) $\log_5 (625)^3$ c) $\log_2 \dfrac{1}{32}$

d) $\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{128}$ e) $\log_{\frac{1}{2}} 8$ f) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2}$

24. *Calcula, aplicando la definición y las propiedades de los logaritmos:*

a) $\log 1000$ b) $\log 100\,000$ c) $\log 0{,}01$ d) $\log\dfrac{1}{10}$

e) $\log 10^8$ f) $\log\sqrt{10}$ g) $\log 10^{-7}$ h) $\log\sqrt[3]{0{,}001}$

i) $\log_{10}\left(\dfrac{100}{5^2}\right)$ j) $\log_5 625$ k) $\log_5 (625)^3$ l) $\log_2 32$

25. *Si* $z=\sqrt[5]{\dfrac{a^3 b}{c^2}}$ *y* $\log_{10} a = 1{,}5$, $\log_{10} b = 2{,}5$ y $\log_{10} c=-1{,}2$, *¿cuánto valdrá* $\log_{10} z$ *?*

26. *Si sabemos que* $\log_{10} a=-2$, *¿cuánto valdrá el logaritmo decimal de* $\dfrac{a\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a^2}}$ *?*

27. *Si sabemos que* $\log_{10} k = 0{,}9$, *calcula* $\log_{10}\dfrac{k^3}{100}-\log_{10}\left(100\sqrt{k}\right)$.

28. *Calcula b en las siguientes igualdades:*

a) $\log_b 2=\dfrac{1}{2}$ b) $\log_b 0{,}04=-2$

29. *Calcula, aplicando la definición y/o las propiedades de los logaritmos:*

a) $\log_2\dfrac{1}{64}+\log_2 1+\log_3 81+\log_{11} 121$

b) $\log_2 \sqrt{2} + \log_2 \sqrt{8} - \log_2 \sqrt[3]{2}$

c) $\log_e 1 + \log_e e + \log_e e^2 + \log_e \sqrt{e} + \log_e \frac{1}{e}$

30. *Halla el valor de x en los siguientes casos:*

1) $\log_7 x = 2$ 4) $\log_2 x = 0$ 7) $\log_8 x = \frac{1}{3}$

2) $\log_2 64 = x$ 5) $\log_{49} \sqrt{7} = x$ 8) $\log_8 \sqrt[4]{2} = x$

3) $\log_x 10 = \frac{1}{4}$ 6) $\log_2 \frac{1}{16} = x$ 9) $\log_x 0{,}000001 = -6$

31. *Averigua el valor numérico de las siguientes expresiones:*

a) $\log_a a^2\sqrt{a}$ d) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{64}$ g) $\log_{10}\left(\log_{10} 10^{10}\right)$

b) $\log_a 1$ e) $2^{\log_a a^2}$ h) $\log_{10}\left(10^{10^{\log_{10} 10}}\right)$

c) $\log_x \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}}$ f) $10^{\log_a \sqrt{a}}$ i) $10^{\log_a \sqrt{a}\cdot a^3}$

32. *Sabiendo que* $\log_{10} 2 \simeq 0{,}301030$ *halla los logaritmos decimales de:*

a) $\sqrt[3]{0{,}002}$ b) $\frac{1}{\sqrt[3]{16}}$ c) $0{,}25$

d) $\sqrt{\frac{0{,}0025}{16}}$ e) $\sqrt[4]{\frac{1}{0{,}008}}$ f) 1 024

33. *Halla la base de los logaritmos en las siguientes igualdades:*

1) $\log_a 4 = 2$ 4) $\log_a 243 = 5$ 7) $\log_a 0{,}001 = -3$

2) $\log_a 9 = 2$ 5) $\log_a 256 = 8$ 8) $\log_a 0{,}015625 = 3$

3) $\log_a 625 = 4$ 6) $\log_a 0{,}125 = 3$ 9) $\log_a 1 = 0$

34. *Halla el resultado de las siguientes expresiones, aplicando la definición y/o las propiedades de los logaritmos:*

1) $\log_5 625 - \log_3 243 + \log_4 256$

2) $\log_3 1 + \log_2 64 + \log_3 9 + \log_7 49$

3) $\log_2 4 + \log_3 81 - \log_6 216 + \log_4 64$

4) $\log_3 \frac{1}{9} - \log_5 0{,}2 + \log_6 \frac{1}{36} - \log_2 0{,}5$

35. *Si el logaritmo de A en base 3 es x, expresar en función de x los siguientes logaritmos:*

1) $\log_3 27A$ 2) $\log_3 \frac{A}{81}$ 3) $\log_3 3^6 A$

4) $\log_3 \frac{27}{A}$ 5) $\log_3 \sqrt{A}$

9. APROXIMACIÓN DE NÚMEROS REALES

9.1*. Cifras significativas

Cifras significativas: Son aquellas que tienen un significado real y, por tanto, aportan alguna información.

Algunas reglas para la determinación del número de cifras significativas:

1ª Regla: En números que no contienen ceros todos los dígitos son significativos:

4,669 → 4 cifras significativas → 4,669
4 669 → 4 cifras significativas → 4 669

2ª Regla: Cuando los ceros están entre dos dígitos significativos, se consideran significativos:

1,001 → 4 cifras significativas → 1,001
1 001 → 4 cifras significativas → 1 001

3ª Regla: Los ceros a la izquierda del primer dígito que no es cero sirven solamente para fijar la posición de la coma decimal y no son significativos:

0,001 → 1 cifra significativa → 0,001
0,002451 → 4 cifras significativas → 0,002451

4ª Regla: En un número con dos dígitos decimales, los ceros finales a la derecha de la coma decimal son significativos:

0,0510 → 3 cifras significativas → 0,0510
19,00 → 4 cifras significativas → 19,00

9.2. Aproximación

Redondeo:

Consiste en prescindir de las cifras que siguen a una determinada, sumando una unidad a esta última si la primera eliminada es 5 o superior a 5.

9.3. Errores

- Error absoluto $\left(E_r\right)$:

$$\text{Error absoluto } = \left|\text{valor exacto } - \text{ valor aproximado}\right| = \\ = \left|V_{exacto} - V_{aprox.}\right|$$

Este error tiene la unidad de la magnitud medida, nos indica la *cota de error o incertidumbre* de nuestra medición (aproximación) y por convenio se suele expresar con una sola cifra significativa que debe ser del mismo rango que la última de la medida (aproximación).

- Error relativo $\left(E_r\right)$:

A veces no importa tanto la incertidumbre de una medida como su precisión. Por eso se introduce el

$$\text{Error relativo } = \left|\frac{\text{Error absoluto}}{\text{Valor exacto}}\right|$$

No tiene unidad y suele expresarse en tanto por ciento. De alguna forma nos indica la *precisión* de la medida (aproximación), ya que cuanto menor sea el error relativo más precisa será la medida (aproximación). Así, el error relativo resulta especialmente relevante porque nos relaciona el error cometido con el valor de lo medido. Un error de 1 mm resulta magnífico si se mide la longitud de una carretera de 100 km (representa una desviación de una parte por cada 100 millones), adecuado si se mide una mesa de 2 m e inaceptable si se mide una hormiga de 2 mm. En los tres casos el error absoluto es el mismo, pero su cercanía relativa al valor exacto es distinta.

- Acotación de errores
  Al redondear un número hasta un orden n cometemos un error absoluto que cumple:

$$E_a < \frac{1}{2\cdot 10^n}$$

y que se denomina cota de error absoluto (ε).

Si consideramos una cota de error absoluto, ε , siendo $E_a < \varepsilon$, se cumple:

$$E_r < \frac{\varepsilon}{V_{aprox.} - \varepsilon}$$

y se denomina cota de error relativo.

9.4*. Operaciones con redondeos

Regla 1: El resultado de una suma o resta de números redondeados (no exactos) ha de ser redondeado a la cifra que corresponda al mayor error absoluto de los datos.

Regla 2: Si se multiplican o dividen números redondeados, el producto o cociente se redondeará al menor número de cifras significativas que posean los factores.

Ejercicios:

36. *Los tiempos de utilización de una red de comunicaciones se redondean por exceso a cuartos de hora. Aproxima de esta forma los siguientes tiempos: 39 min; 83 min; 118 min.*

37. *Al medir la longitud de una calle, obtuvimos 1 500 m, con un error absoluto menor que 2 m. Al medir la altura de una habitación, obtuvimos 2,80 m, con un error absoluto menor que 2 cm. ¿Qué medida se hizo con más precisión?*

38. *a) Completa la siguiente tabla de aproximaciones de* $\sqrt{6}$ *:*

Por truncamiento	*2*			
Por redondeo	*3*		*2,45*	

b) Calcula el error máximo y acota el error relativo que se produce al tomar $\sqrt{6} = 2,449$.

39. *Completa la tabla:*

	$\sqrt{3}+\sqrt{7}$	Error absoluto	$\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}$	Error relativo
Por truncamiento				
Por redondeo				

40. *¿Qué error absoluto cometemos al aproximar el resultado de 45,96 + 203,7 + 0,823 por el número 250,49?*

41. *Si aproximamos 10,469 por 10,5, ¿qué error absoluto se comete? ¿Y si lo aproximamos por 10,4? ¿Cuál es la mejor aproximación? Razónalo.*

42. *¿Se puede escribir* $\pi = \frac{355}{113}$ *? Justifica la respuesta y di cuál es el orden de error cometido.*

43. *Las antiguas civilizaciones ya conocían aproximaciones del número π. Así, los babilonios tomaban 3 como valor de π, Brahmagupta (siglo VII a.C.) $\sqrt{10}$, los egipcios 3,1604 y Arquímedes $\frac{245}{78}$, además de establcer las siguientes desigualdades:*

$$\frac{221}{71} < \pi < \frac{22}{7} \quad \text{y} \quad \frac{221\,872}{67\,441} < \pi < \frac{195\,882}{62\,351}$$

En 1.600, Otho dio una de las mejores aproximaciones a través de la fracción que aparece en el ejercicio anterior ($\frac{355}{113}$). Calcula el error absoluto que se comete con cada una de las aproximaciones anteriores.

44. *A partir del S. XVII y con el nacimiento y desarrollo del Cálculo Infinitesimal es cuando se obtienen numerosas expresiones de π en función de sumas o productos infinitos. Algunas de éstas son:*

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots$$

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \ldots$$

$$\frac{\pi}{4} = \left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{5^2}\right)\left(1 - \frac{1}{7^2}\right)\left(1 - \frac{1}{9^2}\right)\ldots$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot\ldots}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot\ldots}$$

Calcula la aproximación de π en cada expresión, utilizando los números que se dan en cada una y que son previos a los puntos suspensivos.

45. *A una persona se le estima una estatura de 180 cm, siendo en realidad de 187 cm; a uno de sus primos le asignan una estatura de 140 cm, cuando es de 147 cm.*

a) Calcula el error absoluto y relativo de cada medida.
b) ¿Cuál de las dos mediciones es más precisa? Razona la respuesta.

46. *La expresión decimal del número e es:*

$$e = 2{,}718281828445904523536\ldots$$

Una forma de obtenerlo de forma aproximada, es utilizando fracciones continuas. Su expresión debida a Euler es:

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{4}{5 + \ldots}}}}}$$

Calcula las cuatro primeras aproximaciones al número e.

47. *Si se quiere obtener $\pi\cdot\sqrt{7}$ con cuatro cifras exactas, ¿qué aproximaciones debemos tomar para π y $\sqrt{7}$?*

48. *¿Cuántas cifras exactas tendrá una aproximación de* $\frac{45}{22}$ *para que el error relativo que se comete no exceda del 1%?*

49. *Se quiere obtener el resultado de* $\pi+\sqrt{12}$ y $\pi\cdot\sqrt{12}$ *con una precisión de milésimas, es decir, con incertidumbre menor que media milésima. ¿Cuántas cifras exactas se deben tomar en las aproximaciones de* π y $\sqrt{12}$ *?*

50. *Se desea calcular la capacidad de un depósito cilíndrico. Se toman las siguientes medidas: diámetro del depósito:* 95 ± 1 *cm, altura:* 180 ± 1 *cm. Calcula su capacidad en litros y expresa el resultado indicando su incertidumbre.*

51. *Una habitación rectangular mide* $4,57$ *m por* $7,32$ *m. Se han realizado las medidas con una cinta métrica que aprecia 1 cm. Calcula su área y exprésala correctamente.*

10. NOTACIÓN CIENTÍFICA

Un número se dice que está escrito en notación científica cuando está dado en la forma

$$a\cdot10^b$$

donde a es un número decimal, con una única cifra en la parte entera (distinta de cero), y b es un número entero.

Las reglas para operar con números escritos en notación científica se suponen conocidas, y como para operar se va a utilizar la calculadora científica y/o gráfica, no merece la pena detenerse más en este punto.

Ejercicio:

52. *Opera y expresa en notación científica:*

a) $2,54\cdot10^{-3}\cdot4,2173\cdot10^{-5}$

b) $10^3-\left(3\cdot10^{-2}\right)^{-2}\cdot4,1\cdot10^4$

c) $3,2\cdot10^3\left(1+6,2\cdot10^{-3}\cdot3\cdot10^{-1}\right)$

d) $\dfrac{2\cdot3,76\cdot10^4+\frac{4}{5}\cdot1,9654\cdot10^2}{7,4321\cdot10^{-5}}$

e) $9\cdot10^9\,\dfrac{2\cdot10^{-6}\cdot10^{-5}}{\left(2\cdot10^{-4}\right)^2}$

f) $6,672\cdot10^{-11}\cdot\dfrac{3,2\cdot10^{-3}\cdot5,96\cdot10^{24}}{\left(6,37\cdot10^6\right)^2}$

11. SUCESIONES

11. 1. INTRODUCCIÓN

Una **sucesión** de números reales es un conjunto ordenado de infinitos números reales

$$a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots$$

siendo a_n el término general. Se representa por $\{a_n\}$ o por (a_n).
Más formalmente, una sucesión es una función

$$f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$$
$$n\to f(n):=a_n$$

y así, $f(1)=a_1,\ f(2)=a_2,...$

Ejercicios:

53. *Obtén el término general de estas sucesiones:*

a) 2, 4, 6, 8, 10, …
b) 1, 4, 9, 16, 25, …
c) 1, 3, 5, 7, 9, 11, …
d) $-1,\ 1, -1,\ 1,\ \ -1,\ 1,\ ...$
e) 3, 8, 13, 18, 23, …
f) 1, 8, 27, 64, 125, …
g) 8, 4, 2, 1, 0,5, …
h) $\frac{3}{5},\ \frac{7}{15},\ \frac{11}{45},\ ...$
i) $\frac{3}{1},\ \frac{1}{4}, \frac{-1}{9},\ \frac{-3}{16},\ ...$

54. *Halla algunos términos de las sucesiones*

a) $a_n=\frac{1}{n}$

b) $b_n=\frac{1}{n^2}$

e indica el número al que se aproxima cada una.

55. *Escribe los cinco primeros términos de la sucesión recurrente* $a_1=1,\ a_2=3,\ a_n=3+5(n-1)$

56. *Escribe los cuatro primeros términos de las sucesiones de término general:*

a) $a_n=2+4(n-1)$

b) $b_n=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

c) $c_n=(-1)^n\cdot 2^n$

57. *Halla los cinco primeros términos de la sucesión recurrente* $a_n=\dfrac{a_{n-1}+3}{a_{n-1}+1}$*, siendo* $a_1=1$ *y determina el número al que se aproxima.*

11.2. MONOTONÍA Y ACOTACIÓN

Se dice que una sucesión de números reales $\{x_n\}$ es:

a) **Creciente**, cuando $x_n\le x_{n+1}\quad \forall n\in\mathbb{N}$
b) **Decreciente**, cuando $x_n\ge x_{n+1}\quad \forall n\in\mathbb{N}$
c) **Monótona**, cuando es creciente o decreciente.

Las **sucesiones constantes** son a la vez crecientes y decrecientes, y recíprocamente.

Ejemplos:

Las sucesiones $\{n\}$ y $\left\{-\frac{1}{n}\right\}$ son crecientes, mientras que $\{-n\}$ y $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ son decrecientes.

La sucesión $\left\{(-1)^n\right\}$ no es monótona.

Una sucesión $\{x_n\}$ se llama **acotada** si existe un número real $M \geq 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple la desigualdad

$$|x_n| \leq M$$

Ejercicio:

58. *Estudia el crecimiento/decrecimiento de las siguientes sucesiones y calcula, si es posible, una cota superior y una cota inferior. En caso de tener cota superior e inferior, estudia la acotación.*

a) $a_n = \frac{8n}{1-2n}$ *b)* $b_n = \frac{2n}{1+n^2}$ *c)* $c_n = \frac{n^2+2}{-n-1}$

59. *Comprueba que las siguientes sucesiones son acotadas:*

a) $a_n = 3 - \frac{5}{n}$ *b)* $a_n = 5 + 4\cos(n)$

11.3. CONVERGENCIA DE UNA SUCESIÓN

Intuitivamente, decimos que el límite de una sucesión $\{x_n\}$ es el número L si los términos de dicha sucesión se van aproximando a L, y escribiremos $\{x_n\} \to L$ o $\lim x_n = L$ o $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = L$

Si $x_n \to L$, entonces $x_n \simeq L$ cuando n es grande.

La pregunta que surge es ¿cómo de grande tiene que ser n para que $x_n \simeq L$? La respuesta es "simple": depende de la aproximación deseada y de la sucesión en cuestión.

El número real a es el **límite de la sucesión** (a_n) de números reales, cuando, para cualquier número positivo ε, podemos encontrar un término de la sucesión a_{n_0} tal que la distancia de los infinitos términos posteriores a a_{n_0} al número a es menor que ε:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{tal que para } n > n_0,\ |a_n - a| < \varepsilon$$

Las **sucesiones** que tienen límite se llaman **convergentes** y las que tienden hacia ∞ se llaman **divergentes**.

Propiedades elementales de la convergencia de sucesiones:

Supongamos que $x_n \to x,\ y_n \to y$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces:

a) $x_n + y_n \to x + y$

b) $x_n y_n \to xy$

c) $\alpha + y_n \to \alpha + y$

d) $\alpha y_n \to \alpha y$

e) $x_n - y_n \to x - y$

f) $\dfrac{x_n}{y_n} \to \dfrac{x}{y}$ siempre que $y \neq 0,\ y_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

<u>Otra propiedad</u> no tan elemental:

Si $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y $x, x_n \in D \quad \forall n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$$

<u>En particular</u>, si $x_n \to x$, se tiene que:

1) $|x_n| \to |x|$
2) $\sqrt{x_n} \to \sqrt{x}$ siempre que $x_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ y $x > 0$
3) $e^{x_n} \to e^x$
4) $\ln x_n \to \ln x$ siempre que $x_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ y $x > 0$
5) $\left.\begin{matrix} x_n \to x \\ y_n \to y \end{matrix}\right\} \Rightarrow {x_n}^{y_n} \to x^y$ siempre que $x_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N},\ x > 0$

<u>Límites y desigualdades:</u>

Supongamos que $x_n \to x,\ y_n \to y$ y $b \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$x_n \leq y_n \Rightarrow x \leq y$$

<u>El número e</u>

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e, \quad e \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \quad \text{y} \quad e = 2{,}7181828...$$

<u>Límites infinitos</u>

1) $x_n \to +\infty \Leftrightarrow -x_n \to -\infty$

2) Si $x_n \to \alpha$ e $y_n \to +\infty$, entonces:

$$\alpha + \infty = +\infty \quad \text{si} \quad \alpha \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

$$\alpha \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad 0 < \alpha \leq +\infty \\ -\infty & \text{si} \quad -\infty \leq \alpha < 0 \end{cases}$$

$$\frac{\alpha}{+\infty} = 0 \quad \text{si} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

3) Los casos $+\infty - \infty,\quad 0 \cdot (\pm\infty),\quad \pm\dfrac{\infty}{\infty}$ son indeterminaciones.

4) $\left.\begin{matrix} x_n \to 0 \\ x_n > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \dfrac{1}{x_n} \to +\infty$

5) $\left.\begin{matrix} x_n \to 0 \\ x_n < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \dfrac{1}{x_n} \to -\infty$

<u>Ejercicios:</u>

60. *Estudia la convergencia de las siguientes sucesiones:*

a) $a_n = (-1)^{2n+4}$ c) $a_n = n^2 - n^3$

b) $a_n = n^2$ d) $a_n = 0,2^n$

61. *Calcula el límite de las siguientes sucesiones:*

a) $a_n = \frac{1}{n}$ c) $a_n = -2^n$

b) $a_n = n^2 - 1$ d) $a_n = (-1)^n \cdot n$

62. *Calcula el límite de las siguientes sucesiones:*

a) $a_n = \frac{(n-1)^2}{n^2+3}$ c) $c_n = \frac{3n+1}{\sqrt{n}}$ e) $e_n = \frac{(1+n)^4}{(n-2)^3}$

b) $b_n = \frac{\sqrt{n^2+1}}{2n}$ d) $d_n = \sqrt{\frac{4n-1}{n+1}}$ f) $f_n = \frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}$

Vídeos:

¿Qué son realmente los números reales?

https://www.youtube.com/watch?v=xOjQ3u7jSLQ

¿Es 0,9999999… igual a 1?

https://www.youtube.com/watch?v=11dd4srNb_E&t=64s

¿Qué es el número e?

https://www.youtube.com/watch?v=Z5czpA-fyMU

La sucesión de Fibonacci y el número de oro

https://www.youtube.com/watch?v=yDyMSliKsxI

¿Cuál es el número más grande que conoces?

https://www.youtube.com/watch?v=eETQBYFGGZ8

¿Existen infinitos más grandes que otros?

https://www.youtube.com/watch?v=TUFQKN5mIWM&t=161s