UNIDAD 11: DISTRIBUCIONES BINOMIAL Y NORMAL

1. INTRODUCCIÓN: CONCEPTO DE VARIABLE ALEATORIA

Se llama **variable aleatoria** a toda función que asocia a cada elemento del espacio muestral Ω un número real.

Veamos algunos ***ejemplos*** de variables aleatorias:

(1) Consideremos el experimento que consiste en el lanzamiento de tres monedas. El espacio muestral es:

$$\Omega = \{CCC, CCX, CXC, XCC, XXC, XXX\}$$

Supongamos que a cada uno de estos sucesos le asignamos un número real, por ejemplo, asociamos a cada terna el número de caras que contiene:

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$CCC \to 3$$
$$CCX \to 2$$
$$CXC \to 2$$
$$XCC \to 2$$
$$XCX \to 1$$
$$XXC \to 1$$
$$XXX \to 0$$

La función $X : \Omega \to \mathbb{R}$ así construida es una variable aleatoria.

(2) Consideremos ahora el experimento que consiste en lanzar dos dados. El espacio muestral es:

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),...,(1,6),(2,1),...,(2,6),...,(6,1),...,(6,6)\}$$

La función que asocia a cada resultado la suma de los puntos obtenidos en cada dado es una variable aleatoria que toma los siguientes valores:

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12

Consideremos el experimento que consiste en elegir al azar 100 judías verdes de una plantación y medir su longitud. La función que asocia a cada judía su longitud es una variable aleatoria.

(3) En un estudio antropométrico[1] realizado sobre 1000 hembras se les ha medido el perímetro craneal. La función que asocia a cada una de las hembras su perímetro craneal es una variable aleatoria.

Según como sean los recorridos de las **variables aleatorias**, éstas se pueden clasificar en:

- **Discreta**: cuando solo puede tomar ciertos valores enteros.
- **Continua**: cuando puede tomar todos los posibles valores dentro de un intervalo.

[1] Antropometría: tratado de las proporciones y medidas del cuerpo humano.

2. VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS

2.1. Introducción

Se llama **función de probabilidad** de una variable aleatoria discreta X a la aplicación que asocia a cada valor x_i de la variable, su probabilidad p_i. Esta función la podemos expresar fácilmente mediante la siguiente tabla:

x_i	$p_i = P(X = x_i)$
x_1	p_1
x_2	p_2
$\vdots$	$\vdots$
x_n	p_n
	1

Ejemplo:

Supongamos que hemos lanzado 240 veces un dado y que hemos obtenido los siguientes resultados:

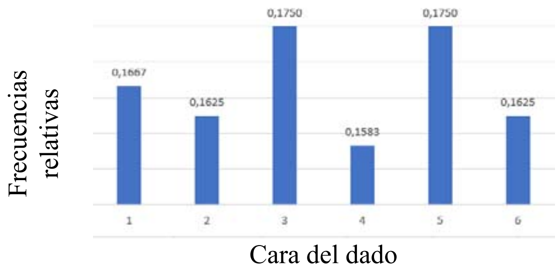
Cara	1	2	3	4	5	6
Número de veces	40	39	42	38	42	39

Vamos a construir la distribución de frecuencias y la distribución de probabilidad:

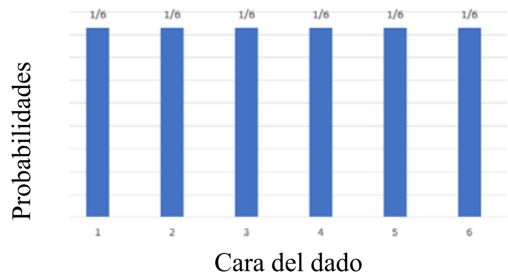
Cara	f_i	n_i
1	40	0.1667
2	39	0.1625
3	42	0.1750
4	38	0.1583
5	42	0.1750
6	39	0.1650
	240	1

Cara	Nº de caras	n_i
1	40	1/6 = 0.1667
2	40	1/6 = 0.1667
3	40	1/6 = 0.1667
4	40	1/6 = 0.1667
5	40	1/6 = 0.1667
6	40	1/6 = 0.1667
	240	1

Los diagramas de barras asociados a las distribuciones anteriores son:



Distribución de frecuencias



Distribución de probabilidad

2.2. Características

Esperanza matemática (o media)

Se llama esperanza matemática (o media) de la variable aleatoria discreta X, que toma los valores $x_1,\dots,x_n$ con probabilidades $p_1,\dots,p_n$ al siguiente número real:

$$EX = \sum p_i x_i$$

donde $p_i = P(X = x_i)$. La esperanza matemática también se representa por μ.

Varianza

Se llama varianza de la variable aleatoria discreta X, que toma los valores $x_1,...,x_n$ con probabilidades $p_1,...,p_n$ al siguiente número real (no negativo):

$$Var(X) = \sum p_i (x_i - EX)^2$$

donde $p_i = P(X = x_i)$. La varianza también se representa por σ^2.

Al igual que ocurría con las variables estadísticas, en la práctica para calcular la varianza utilizaremos la siguiente expresión, que se obtiene como consecuencia del Teorema de König:

$$\sigma^2 = \sum p_i x_i^2 - \overline{x}^2$$

Desviación típica

Llamamos desviación típica[2] de la variable aleatoria discreta X a la raíz cuadrada positiva de la varianza, es decir,

$$\sigma = +\sqrt{Var(X)}$$

Ejemplo:

Consideremos los datos del ejemplo anterior, y calculemos las medias (experimental y teórica) y las varianzas (experimental y teórica):

Distribución experimental:

x_i	h_i	$x_i h_i$	x_i^2	$h_i x_i^2$
1	0.1667	0.1667	1	0.1667
2	0.1625	0.3250	4	0.6500
3	0.1750	0.5250	9	1.5750
4	0.1583	0.6332	16	2.5328
5	0.1750	0.8750	25	4.3750
6	0.1625	0.9750	36	5.8500
	1	3.4999		15.1495

Esperanza matemática: $\mu = 3.4999$

Varianza: $\sigma^2 = 15.1495 - 3.4999^2 = 2.9002$

Distribución teórica:

x_i	p_i	$x_i p_i$	x_i^2	$p_i x_i^2$
1	1/6	1/6	1	1/6
2	1/6	2/6	4	4/6
3	1/6	3/6	9	9/6
4	1/6	4/6	16	16/6
5	1/6	5/6	25	25/6
6	1/6	6/6	36	36/6
	1	21/6		91/6

[2] Recuérdese que tanto la varianza como la desviación típica son medidas de dispersión, de tal manera que cuanto menores sean estos dos parámetros más agrupados se encuentran los valores en torno a las medidas centrales (media, mediana, moda); por el contrario, para valores grandes de la varianza o de la desviación típica los datos de la distribución se encuentran muy dispersos, es decir, poco agrupados en torno a los valores centrales.

Esperanza matemática: $\mu = \frac{21}{6} = 3.5$

Varianza: $\sigma^2 = 15.165 - 3.5^2 = 2.917$

3. DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

3.1. Introducción

Supongamos que un experimento aleatorio tiene las siguientes características:

- En cada prueba del experimento sólo son posibles dos resultados. Llamaremos éxito a la ocurrencia del evento y fracaso a la no ocurrencia.
- El resultado obtenido en cada prueba es independiente de los resultados anteriores.
- La probabilidad de éxito es constante y la representaremos por p (por lo tanto, la de fracaso también es constante y la representaremos por $q = 1 - p$).

Todo experimento que tenga estas características, diremos que sigue el modelo de la distribución binomial.

A la variable aleatoria X, que expresa el número de éxitos obtenidos en las realizaciones del experimento, la llamaremos variable aleatoria binomial.

Esta variable aleatoria es discreta, ya que únicamente toma los valores $0,\ 1,\ 2,\ \dots, n$, suponiendo que se han realizado n pruebas.

Representaremos por $X \to \mathfrak{B}(n, p)$ a la variable aleatoria de la **distribución binomial**, siendo n y p los parámetros de dicha distribución.

3.2. Función de probabilidad

La función de probabilidad de la variable aleatoria binomial, $X \to \mathfrak{B}(n, p)$, viene dada por:

$$\boxed{P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}}$$

donde $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ (número combinatorio, que se lee "n sobre k") y el factorial de un número natural o cero, se define por:

$$\begin{cases} n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \\ 0! = 1 \end{cases}$$

La función de probabilidad de esta distribución se puede obtener de la siguiente forma:

1º) En las hipótesis de la variable aleatoria binomial, consideramos uno de los casos en los que se obtienen k éxitos en las n pruebas. Sea B el suceso considerado. Se tiene que:

$$B = \underbrace{A \cap A \cap \ldots \cap A}_{k \text{ éxitos}} \cap \underbrace{\overline{A} \cap \overline{A} \cap \ldots \cap \overline{A}}_{n-k \text{ fracasos}}$$

La probabilidad de este suceso, teniendo en cuenta la independencia de las pruebas realizadas es:

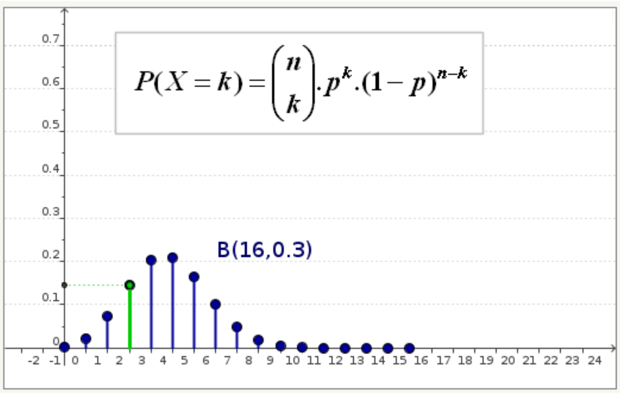
$$P(B) = P(A) P(A) \cdot \ldots \cdot P(A) \cdot P(\overline{A}) \cdot P(\overline{A}) \cdot \ldots \cdot P(\overline{A}) = p^k q^{n-k}$$

2º) Ahora bien, hay que considerar todas las maneras posibles de obtener k éxitos y $n-k$ fracasos, que será el número combinatorio:

$$\binom{n}{k}$$

3º) Juntando los apartados 1 y 2 se obtiene:

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$$



3.3. Características

Esperanza matemática y varianza

Sabemos que la variable aleatoria binomial para una sola prueba[3] tiene la siguiente función de probabilidad:

Valor de la variable	1	0
Probabilidad	p	$q=1-p$

Esperanza matemática:

$$EX=(1\cdot p+0\cdot q)n=np$$

$$\boxed{EX=np}$$

Varianza

$$Var(X)=\left[(1-p)^2 p+(0-p)^2 q\right]n=npq$$

$$\boxed{Var(X)=npq}$$

Desviación típica

$$\boxed{\sigma=+\sqrt{npq}}$$

4. EJERCICIOS: DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

1. El 10 % de los artículos producidos en un cierto proceso de fabricación resulta ser defectuoso. Calcular la probabilidad de que en una muestra de 10 artículos elegidos al azar sean exactamente dos los defectuosos.

---

[3] La variable aleatoria binomial para una sola prueba, es decir, $X\to\mathfrak{B}(1,p)$, se denomina variable aleatoria de Bernouilli.

2. En una nave industrial hay 6 máquinas que trabajan independientemente con un porcentaje de paro del 10 % de tiempo. Calcular:

(1) La probabilidad de que en un momento dado estén paradas la tercera parte de las máquinas.

(2) La probabilidad de que estén paradas al menos la tercera parte de ellas.

3. Si se lanzan dos dados distintos 10 veces, ¿cuál es la probabilidad de que en más de la mitad de las ocasiones se obtenga una suma par de puntos?

4. Hallar la probabilidad de que una familia con 4 hijos tenga:

(1) al menos un niño

(2) ninguna niña

(3) dos niños

(4) a lo más dos niñas

5. Una máquina automática dedicada a la fabricación de comprimidos produce comprimidos defectuosos a razón del 1 %.

(1) Si los comprimidos se colocan en tubos de 25, ¿cuál es la probabilidad de que en un tubo todos los comprimidos sean buenos?

(2) Si los tubos se colocan en cajas de 10, ¿cuál es la probabilidad de que una caja contenga los 10 tubos con ningún comprimido defectuoso?

6. En una distribución binomial de parámetros $n=4$ y p desconocida, encontrar el valor de p que hace que $P(X \leq 3)=0.84$.

7. En un grupo de 10 alumnos de un centro educativo se ha comprobado que cada uno de ellos falta a clase el 5 % de los días. Calcular la probabilidad de que un día determinado:

a) no se registre ninguna ausencia

b) falten a clase más de 5 alumnos

c) no asista a clase ningún alumno

d) falte a clase un único alumno

e) falten a clase menos de 3 alumnos

8. Una prueba de inteligencia está compuesta por 10 preguntas, cada una de las cuales tiene cuatro respuestas, siendo sólo una de ellas correcta. Un alumno tiene prisa por acabar y decide contestar a lo loco, aleatoriamente. Se pide:

a) Probabilidad de acertar exactamente cuatro preguntas

b) Probabilidad de no acertar ninguna

c) Probabilidad de acertar todas

d) Probabilidad de acertar al menos ocho

e) Probabilidad de acertar a lo sumo tres

9. Se ha pasado una prueba sobre fluidez verbal a un numeroso grupo de niños de una comarca socialmente deprimida, y se ha detectado que el 35 tiene una fluidez verbal prácticamente nula; el resto se puede considerar aceptable. De una muestra aleatoria formada por siete niños, hallar:

a) La media y la varianza

b) La función de probabilidad

10. En una manzana de casas hay 10 aparcamientos. En cada aparcamiento puede encontrarse o no un automóvil, con independencia de lo que ocurra en los otros. Si la probabilidad de que un aparcamiento esté ocupado es 0.4. Se pide:

a) Identificar y describir este modelo de probabilidad.

b) Calcular la probabilidad de que en cierto día se encuentren 8 automóviles aparcados.

11. Una encuesta revela que el 20 % de la población es favorable a un político y el resto es desfavorable. Elegidas 6 personas al azar, se desea saber:

a) La probabilidad de que las 6 personas sean desfavorables

b) La probabilidad de que las 6 personas sean favorables.

12. Una determinada raza de perros tiene 4 cachorros en cada camada. Si la probabilidad de que un cachorro sea macho es de 0.55, se pide:

a) Calcular la probabilidad de que, en una camada, dos exactamente sean hembras.

b) Calcular la probabilidad de que, en una camada, al menos dos sean hembras.

13. Un jugador de tenis tiene una probabilidad de ganar una partida de 0.25. Si juega cuatro partidos, calcular la probabilidad de que gane más de la mitad.

14. Si el 20 % de los cerrojos producidos por una máquina son defectuosos, determinar la probabilidad de que de 4 cerrojos elegidos al azar:

a) uno sea defectuoso

b) a lo más, dos sean defectuosos.

15. En un torneo de ajedrez, Karpov y Kasparov disputan la final. Gana el que antes gane 5 partidas. Karpov ganó la primera partida, pero Kasparov es igual de bueno que él. ¿Qué probabilidad tiene Karpov de ganar el torneo, sin contar las tablas?

16. Se lanza una moneda cuatro veces. Calcular la probabilidad de que salgan más caras que cruces.

17. La probabilidad de que salga cara con una moneda trucada es 0.45. Se lanza la moneda 7 veces. Calcular la probabilidad de que:

a) Salgan exactamente tres caras.

b) Al menos tres caras.

c) A lo sumo tres caras.

18. Un laboratorio afirma que una droga causa efectos secundarios en una proporción de 3 de cada 100 pacientes. Para contrastar esta afirmación, otro laboratorio elige al azar a 5 pacientes a los que aplica la droga. ¿Cuál es la probabilidad de los siguientes sucesos?

a) Ningún paciente tenga efectos secundarios.

b) Al menos dos tengan efectos secundarios.

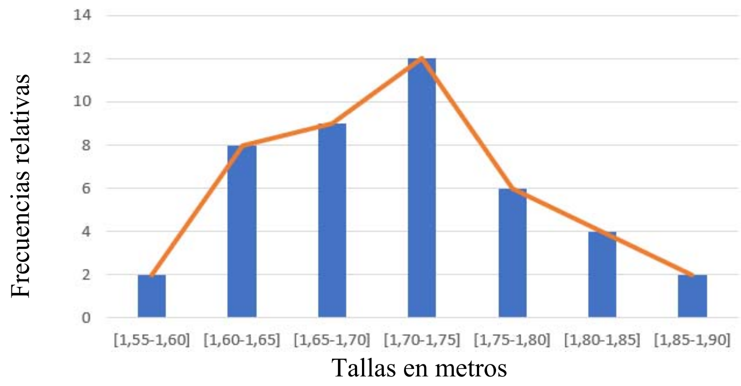
c) ¿Cuál es el número medio de pacientes que espera el laboratorio que sufran efectos secundarios si se eligen 100 pacientes al azar?

5. DISTRIBUCIÓN NORMAL

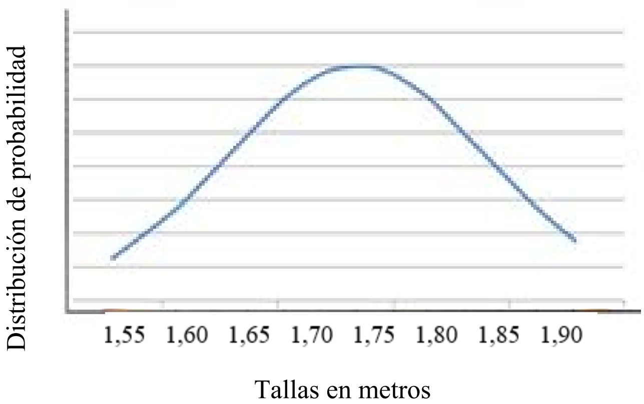
5.1. Idea intuitiva de distribución de probabilidad continua

Consideremos el siguiente ejemplo:

Se han medido las tallas de 40 alumnos varones de un determinado curso de un centro escolar y se ha obtenido que se distribuyen según el histograma siguiente:



Podemos suponer que la distribución de las tallas de los alumnos varones de ese curso de toda España, a medida que los intervalos de clase van siendo más pequeños, tiende al diagrama que aparece a continuación:



Este diagrama proporciona una idea intuitiva de distribución de probabilidad continua. Una distribución de probabilidad es una idealización de una distribución de frecuencias relativas.
De la misma forma que la suma de todas las frecuencias relativas en una distribución de frecuencias es igual a la unidad, se verifica que la suma de todas las probabilidades de una distribución de probabilidad es igual a la unidad.
En el caso de las variables aleatorias continuas no tiene sentido hablar de la probabilidad en un punto, por ser siempre 0; en cambio, tiene interés conocer la probabilidad correspondiente en un intervalo.

5.2. Función de densidad

Analicemos las siguientes figuras:

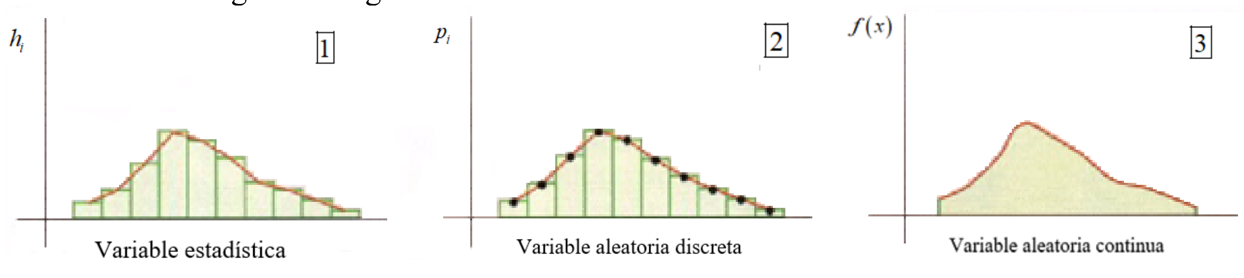


Figura 1:
Distribución de una variable estadística X :
- Los intervalos de clase son las bases de los rectángulos.
- Las alturas de los rectángulos son las frecuencias relativas.

Figura 2:
Distribución de una variable aleatoria discreta X :

- Los intervalos de clase son las bases de los rectángulos.
- Las alturas de los rectángulos son las probabilidades.
- El área del recinto bajo la poligonal es la unidad.

Figura 3:
Distribución de una variable aleatoria continua X :

- A medida que los intervalos de clase van siendo más pequeños el polígono de probabilidades tiende a una curva continua.
- El área bajo la curva entre los límites de un intervalo es la probabilidad de que la variable aleatoria caiga dentro de ese intervalo.

Las funciones $y=f(x)$ asociadas a una variable aleatoria continua X que cumplen las condiciones:

1) $f(x)\geq 0$
2) El área bajo la curva $y=f(x)$ es la unidad.

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx=1$$

se llaman **funciones de densidad** de la variable aleatoria continua X .

5.3. Variable aleatoria de la distribución normal

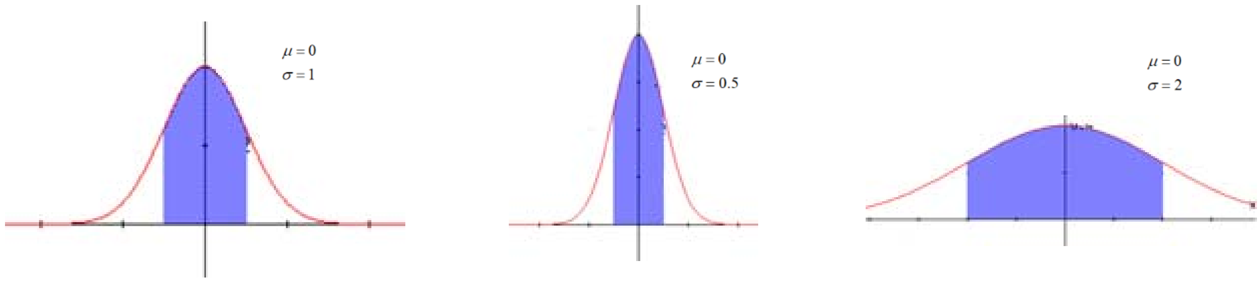
Una variable aleatoria continua X sigue una **distribución normal** de media μ y desviación típica σ , y se designa por $N(\mu,\sigma)$, si se cumplen las siguientes condiciones:

(i) La variable recorre toda la recta real, es decir, $x\in\mathbb{R}$.
(ii) Su función de densidad es:

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]}$$

5.4. Distribución normal estándar o tipificada

A la vista de la representación de la función de densidad de una variable aleatoria $N(\mu,\sigma)$, es evidente que para cada valor de μ y de σ tendremos una función de densidad distinta, como se observa en las gráficas siguientes:

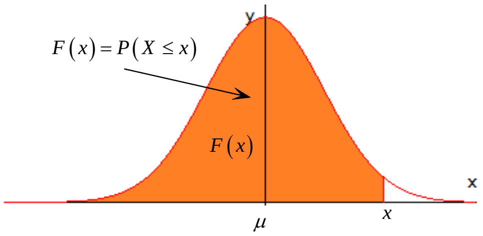


Conviene observar que cuando la desviación típica es elevada aumenta la dispersión y, en consecuencia, la gráfica es menos estilizada y más abierta. Por el contrario, para valores de σ muy pequeños la dispersión disminuye y, en consecuencia, la gráfica de la función es mucho más estilizada y concentrada en torno a la media. En cualquier caso, el área encerrada bajo dichas curvas es siempre igual a la unidad.

De las distintas distribuciones $N(\mu,\sigma)$, tiene especial interés la distribución $N(0,1)$, es decir, aquella que tiene media cero y desviación típica uno. Esta distribución se llama ley normal estándar, reducida o tipificada.

La función de densidad de esta variable aleatoria es: $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$

La función de distribución de la ley normal tipificada proporciona el área del recinto sombreado de la figura siguiente:



Con el fin de facilitar el cálculo de esta superficie y no tener que utilizar en todo momento el Cálculo Integral, se han elaborado unas tablas de muy fácil uso, que veremos a continuación.

5.5. Tipificación

Tipificar una variable es el proceso mediante el cual dicha variable la transformamos en una variable normal estándar. Para realizar este proceso, se realiza el siguiente cambio de variable:

X variable aleatoria normal sin tipificar

$Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}\rightarrow N(0,1)$ variable aleatoria normal tipificada

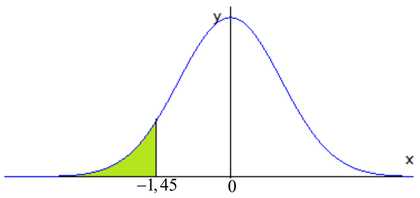
5.6. Uso de tablas

(1) $P(Z\le 1,45)=0,9265$

Para calcular esta probabilidad, basta con mirar en la tabla: $P(Z\le 1,45)=0,9265$

(2) $P(Z\le -1,45)$

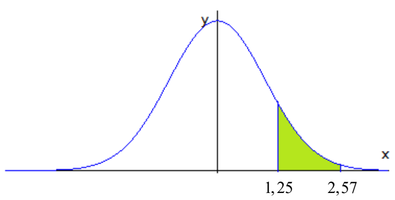
Para calcular esta probabilidad hay que tener en cuenta la simetría de la distribución normal y aplicar la propiedad que relaciona la probabilidad de un suceso con su contrario ($P(\overline{A})=1-P(A)$):



$$P(Z\le -1,45)=P(Z\ge 1,45)=1-P(Z\le 1,45)=$$
$$=1-0,9265=0,0735$$

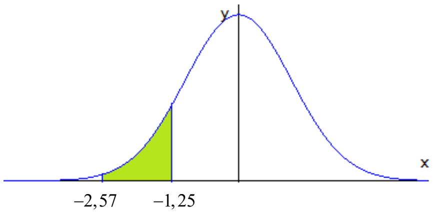
(3) $P(1,25\le Z\le 2,57)$

Interpretando esta probabilidad como áreas se tiene la siguiente igualdad:



$$P(1,25\le Z\le 2,57)=P(Z\le 2,57)-P(Z\le 1,25)=$$
$$=0,9949-0,8944=0,1005$$

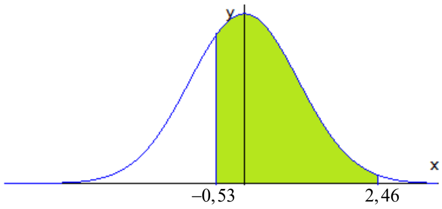
(4) $P\left(-2,57 \le Z \le -1,25\right)$



Para calcular esta probabilidad tenemos en cuenta la simetría de la distribución:

$$P\left(-2,57 \le Z \le -1,25\right) = P\left(1,25 \le Z \le 2,57\right) = \\ = 0,1005$$

(5) $P\left(-0,53 \le Z \le 2,46\right)$



Aplicaremos lo visto en los apartados anteriores:

$$P\left(-0,53 \le Z \le 2,46\right) = P\left(Z \le 2,46\right) - P\left(Z \le -0,53\right) = \\ = P\left(Z \le 2,46\right) - P\left(Z \ge 0,53\right) = \\ = P\left(Z \le 2,46\right) - \left[1 - P\left(Z \le 0,53\right)\right] = 0,695$$

6. EJERCICIOS: DISTRIBUCIÓN NORMAL

19. Los pesos de los individuos de una población se distribuyen normalmente con media 70 kg y desviación típica 6 kg. De una población de 2000 personas, calcular cuántas personas tendrán un peso entre 64 y 76 kg.

20. Se ha aplicado a 300 alumnos de 1º de E.S.O. un test de agresividad y se ha observado que se distribuyen normalmente con media 30 y desviación típica 12. Se pide:

(1) ¿Qué proporción de alumnos tendrá una puntuación en dicho test entre 20 y 35?
(2) ¿Cuántos alumnos tendrán una puntuación superior a 42?

21. Aplicando un test a un grupo de 400 personas se ha obtenido una distribución normal de media 60 y desviación típica 5. Hallar el percentil 67.

22. Después de realizar varios sondeos sobre cierta población, se ha conseguido averiguar que únicamente el 15 % de la misma es favorable a los tratamientos de psicoterapia. Elegida al azar una muestra de 50 personas de dicha población, se desea saber:

(1) La probabilidad de que haya más de cinco personas favorables a dichos tratamientos.
(2) La probabilidad de que a lo sumo haya seis personas favorables.

23. La altura de los individuos en edad militar de un determinado país sigue una $N\left(170,10\right)$, donde 170 y 10 están medidos en cm. Se pide:

(a) Qué proporción de individuos mide menos de 150 o más de 200.
(b) Si no son admitidos para el servicio militar todos aquellos individuos cuya talla dista más de 30 cm de la talla media, ¿qué proporción de individuos se rechaza?

24. Las precipitaciones anuales en una región son, en media, de 2 000 ml/m², con una desviación típica de 300 ml/m². Calcular, suponiendo distribución normal, la probabilidad de que un año determinado la lluvia no supere los 1 200 ml/m².

25. Las tallas de 800 recién nacidos se distribuyen normalmente con una media de 66 cm y una desviación típica de 5. Calcular cuántos recién nacidos se distribuyen normalmente con una media de 66 cm y una desviación típica de 5 cm. Calcular cuántos recién nacidos cabe esperar con tallas comprendidas entre 65 y 70 cm.

26. En un examen de selectividad se comprobó que las calificaciones obtenidas correspondían razonablemente a una distribución normal de media 6 y desviación típica 1. Elegido al azar un estudiante, calcular cuál es la probabilidad de que su calificación esté comprendida entre 6.7 y 7.1.

27. Los ingresos diarios en una empresa tienen una distribución normal, con media 35 600 euros y desviación típica 2 530 euros. Justificar si es razonable o no el esperar obtener un día unas ventas superiores a 55 000 euros. Calcular cuántos días en un año se espera obtener unas ventas superiores a 40 620 euros.

28. El peso de las truchas de una piscifactoría sigue una ley $N(200,50)$. Se extrae una al azar:

(1) ¿Cuál es la probabilidad de que su peso no exceda los 175 gramos?
(2) ¿Cuál es la probabilidad de que su peso exceda los 230 gramos?
(3) ¿Cuál es la probabilidad de que su peso esté comprendido entre 225 y 275 gramos?

29. El peso de los toros de una determinada ganadería se distribuye como una distribución normal de 500 kg de media y 45 kg de desviación típica. Si la ganadería tiene 2000 toros:

(1) ¿Cuántos pesarán más de 540 kg?
(2) ¿Cuántos pesarán menos de 480 kg?
(3) ¿Cuántos pesarán entre 490 y 510 kg?

30. La compañía aérea "Avión" sabe que el tiempo de retraso de sus vuelos sigue una ley normal, con un retraso medio de 10 minutos y desviación típica de 5 minutos. Calcular:

(a) La probabilidad de que un vuelo no tenga retraso
(b) La probabilidad de que el próximo vuelo llegue con no más de 10 minutos de retraso
(c) Probabilidad de que el próximo vuelo llegue con no más de 20 minutos de retraso.

(Datos: $F(0)=0.5$ y $F(2)=0.9777$, donde F es la función de distribución de la $N(0,1)$)

31. Las calificaciones obtenidas por un grupo de alumnos en un examen de Matemáticas sigue una distribución $N(5.2\ ,\ 1.6)$. Calcula la probabilidad de que elegido un alumno al azar haya sacado una nota:

a) superior a 7
b) inferior a 9
c) entre 3 y 4.5

32. El peso (P) de los socios del Club de Amigos del Buen Comer ha resultado que se distribuye conforme a una normal $N(92,20)$. ¿Qué peso máximo tienen el 10 % de los individuos menos obesos de tan opíparo Club?