UNIDAD 10: PROBABILIDAD

«No es nuestra ignorancia, la naturaleza posee la probabilidad como algo intrínseco a ella»
Richard Feynman

«La Estadística es la ciencia que estudia cómo debe emplearse la información y dar una guía de acción en situaciones prácticas que envuelven incertidumbre»
Barnett, 1973

Índice de contenidos:

0.- *INTRODUCCIÓN*

La Teoría de la Probabilidad se interesa por el análisis de la noción intuitiva de “azar” o “aleatoriedad”, la cual como todas las nociones se origina en la experiencia. La idea cuantitativa de azar tomó forma primero con las tablas de juegos y comenzó con Pascal y Fermat (1645) como teoría de los juegos de azar. Desde entonces, la palabra probabilidad aparece en nuestro lenguaje ordinario en multitud de ocasiones. Así, afirmaciones del tipo de que la probabilidad de obtener dos seises al lanzar dos dados no cargados es uno entre 36, de que hay una probabilidad ligeramente inferior a un medio de que un bebé recién nacido sea varón y de que en los próximos dos años la probabilidad de que se pueda curar el cáncer es pequeña, puede decirse que expresan juicios de probabilidad. Sin embargo, cada uno de los ejemplos anteriores se refiere a un tipo diferente de juicio de probabilidad. El primero se refiere a un juicio de probabilidad que podríamos denominar clásico, en el que los posibles resultados son equiprobables (todos tienen la misma probabilidad de ocurrir). El segundo es una afirmación de tipo frecuentista y se refiere a la frecuencia relativa con la que cierta propiedad aparece entre los miembros de una clase determinada, y el tercero constituye un ejemplo de lo que podríamos llamar un juicio de credibilidad y es una medida del grado de confianza que tenemos en la verdad de una cierta proposición o en el acaecimiento de un suceso determinado.
El matemático francés Henri Poincaré (1854-1917) decía: “*El azar es la medida de nuestra ignorancia*”. ¿Qué quería decir? Sencillamente, que en los fenómenos en que interviene el azar no podemos predecir su resultado de antemano.

1.- *EXPERIMENTOS*

En general, llamaremos **experimento** a cualquier procedimiento especificado o conjunto de operaciones que proporcionan unos determinados resultados.

Llamaremos **experimento determinista** a aquel en el que se cumplen las siguientes dos condiciones:

a) se conocen todos los posibles resultados de la experiencia.
b) se sabe con certeza el resultado que se va a obtener al repetir la experiencia en condiciones prefijadas, quedando el fenómeno determinado por ellas.

Ejemplos:

1. Tirar una piedra desde un edificio (sabemos que se va hacia abajo).
2. Calentar un cazo de agua (sabemos que la temperatura sube).
3. Medir la longitud de una circunferencia de radio dado.
4. Golpear una pelota (sabemos que se va a mover, e incluso conociendo las fuerzas que actúan, podemos conocer precisamente dónde caerá)

Llamaremos **experimento aleatorio, probabilista o estocástico** a aquel en el que se cumplen las siguientes dos condiciones:

a) se conocen todos los posibles resultados de la experiencia.
b) repetido en igualdad de condiciones puede presentar resultados distintos en cada experiencia particular y al repetir la experiencia en condiciones fijadas no puede predecirse el resultado que se va a obtener.

Ejemplos:

1. Imaginemos que lanzamos un dado al aire (normal, de 6 caras y no trucado). ¿Podemos predecir el resultado que vamos a obtener? Evidentemente no.
2. Tirar una moneda al aire y observar qué cara cae hacia arriba.
3. Rellenar una quiniela de fútbol.
4. Extraer una carta de una baraja.
5. Jugar una partida de póker y, en general, cualquier juego en el que intervenga el azar.

2.- *ESPACIO MUESTRAL. SUCESOS. ESPACIO DE SUCESOS*

Definiciones:

Se llama **suceso elemental** a cada uno de los posibles resultados *indescomponibles* que pueden obtenerse al realizar un experimento aleatorio.

Denominamos **espacio muestral** al conjunto de resultados posibles que se obtienen al realizar un experimento aleatorio y lo denotaremos por Ω (aunque también se suele denotar por E).

Llamaremos **suceso** a cualquier subconjunto del espacio muestral, es decir, un suceso es un conjunto de puntos muestrales con alguna propiedad.
Denominamos **espacio de sucesos** al conjunto de todos los sucesos de un experimento aleatorio, y se designa por $\wp(\Omega)$, donde Ω es el espacio muestral asociado al experimento aleatorio.

En todo experimento aleatorio siempre hay, al menos, dos sucesos:

Llamamos **suceso imposible** al suceso que no contiene ningún suceso y lo representaremos por $\emptyset \in \wp(\Omega)$, y llamamos **suceso seguro** al suceso $\Omega \in \wp(\Omega)$, ya que contiene a todos los sucesos elementales del experimento.

EJERCICIOS

1. *Obtener el espacio muestral de los puntos obtenidos al tirar un dado.*

2. *¿Y en el caso del lanzamiento de una moneda?*

3. *Describir el espacio muestral del experimento consistente en extraer una bola de una bolsa en la que hay 3 rojas (R), 2 blancas (B) y 4 verdes (V).*

4. *Escribir el espacio muestral asociado al experimento de sacar una carta de entre las diez del palo de copas de una baraja española.*

5. *Con ayuda de un diagrama de árbol, calcula el espacio muestral asociado al experimento aleatorio que consiste en lanzar tres monedas.*

Operaciones con sucesos:

Definimos la **unión** de los sucesos A y B, $A \cup B$, como el suceso formado por los sucesos elementales que pertenecen a alguno de los sucesos A —B. Este suceso ocurre cuando ocurre A o cuando ocurre B.

Definimos el suceso **intersección** de los sucesos A y B, $A \cap B$, como el suceso que ocurre siempre que ocurren A y B, es decir, está formado por los sucesos elementales que pertenecen a A y a B.

Diremos que los sucesos A y B son:

a) **Compatibles** cuando $A \cap B \neq \emptyset$
b) **Incompatibles** cuando $A \cap B = \emptyset$.

Definimos el suceso **complementario** de A, $\overline{A} = A^c = A^*$, como el suceso formado por los sucesos elementales que están en Ω y que no están en A, es decir, si A no se realiza se realiza siempre $\overline{A}$.

Definimos la **diferencia** de los sucesos A y B, $A - B$, como el suceso que se presenta cuando lo hace *A*, pero no *B*, esto es: $A - B = A \cap \overline{B}$.

EJERCICIOS:

6. *¿Cómo son un suceso y su contrario?*

7. *Al extraer una carta de una baraja española, expresa los siguientes sucesos en forma de uniones o intersecciones:*

   A = salir figura de copas
   B = salir una sota o bastos

8. *Consideremos el experimento aleatorio consistente en el lanzamiento de un dado, cuyo espacio muestral es*

$$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$$

Calcular la unión, la intersección, el complementario y la diferencia de los siguientes sucesos:

a) $A=\{1,2,5\}$ y $B=\{2,3,5\}$

b) $A=$ ser par y $B=$ ser impar

c) $A=\{1,3\}$ y $B=\{1,3,6\}$

d) $A=\{1,2,5\}$ y $B=$ ser primo

9. *En el experimento consistente en la extracción de una carta de una baraja española, consideramos los siguientes sucesos:*

A = salir oro
B = salir as
C = salir rey de copas o as de espadas

Interpretar los siguientes sucesos:

$$A\cup B,\ A\cup C,\ B\cup C,\ A\cap B,\ A\cap C,\ B\cap C$$

10. *En el experimento de lanzar tres monedas, encuentra dos sucesos compatibles y otros dos incompatibles.*

Propiedades de las operaciones con sucesos

1) Leyes de De Morgan

$$\overline{(A\cup B)}=\overline{A}\cap\overline{B} \quad \text{y} \quad \overline{(A\cap B)}=\overline{A}\cup\overline{B}$$

2) $\overline{\overline{A}}=A$

EJERCICIOS:

11. *Aplicando las leyes de De Morgan, expresar el suceso* $\overline{H\cup C}$, *donde H es el suceso ser hombre y C estar casado.*

12. *Lanzamos un dado de seis caras, y consideramos los sucesos*

A = número par y B = múltiplo de 3

Comprobar las leyes de De Morgan.

13. *Consideremos los sucesos del experimento de lanzar dos monedas:*

A = {sacar una cara y una cruz}
B = {al menos una cruz}

Calcular: $A\cup B$, $A\cap B$, $\overline{A}\cap\overline{B}$ y $A-B$.

3.- CONCEPTO DE PROBABILIDAD SEGÚN LAPLACE: DEFINICIÓN CLÁSICA

Está basado en el concepto de resultados igualmente verosímiles y motivado por el *Principio de la razón insuficiente*, el cual postula que, si no existe un fundamento para preferir una entre varias posibilidades, todas deben ser consideradas equiprobables.

Laplace, y el cálculo de probabilidades hasta su axiomatización (Kolmogorov), consideraron el principio intuitivamente obvio y así lo haremos nosotros.

<u>Ejemplos</u>

1) Así, en el lanzamiento de una moneda perfecta la probabilidad de cara debe ser igual a la de cruz y, por tanto, ambas iguales a ½.
2) De la misma manera, la probabilidad de cada uno de los seis sucesos elementales asociados al lanzamiento de un dado debe ser igual a $\frac{1}{6}$.

<u>Regla de LAPLACE</u>

Si los sucesos elementales del espacio muestral son equiprobables (es decir, tienen la misma probabilidad), entonces la probabilidad de un suceso cualquiera A viene dada por el cociente entre el número de casos favorables de que ocurra A y el número de casos posibles, esto es:

$$\boxed{P(A)=\frac{\text{Nº de casos favorables}}{\text{Nº de casos posibles}}}$$

<u>Propiedades</u> de la probabilidad:

1) $0 \leq P(A) \leq 1$
2) La suma de las probabilidades de todos los sucesos elementales de un experimento aleatorio es igual a 1.
3) La probabilidad de un suceso es igual a la suma de las probabilidades de los sucesos elementales que lo componen.
4) $P(\Omega)=1$ y $P(\varnothing)=0$
5) Si A y B son sucesos incompatibles, entonces:
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$
6) Si A y B son sucesos compatibles, entonces:
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
7) La suma de las probabilidades de dos sucesos contrarios es igual a 1, es decir,
$$P(A)+P(\overline{A})=1$$

<u>PROBLEMAS</u>

14. *En el experimento que consiste en lanzar un dado cúbico y anotar el resultado de la cara superior, calcular la probabilidad de:*
a) Salir par
b) Salir impar
c) Salir múltiplo de 3
d) Salir múltiplo de 5

15. *Una urna tiene ocho bolas rojas, cinco amarillas y siete verdes. Se extrae una al azar. Determinar la probabilidad de que:*
a) Sea roja
b) Sea verde
c) Sea amarilla
d) No sea roja
e) No sea amarilla

16. *Se ha encargado la impresión de una encuesta. El impresor informa que cada millar de folios la máquina estropea 12 folios. Hallar la probabilidad de que elegido al azar un folio de la encuesta:*
a) Esté mal impreso
b) Esté correctamente impreso

17. *Hallar la probabilidad de que al lanzar tres monedas se obtenga al menos una cara.*

18. *Se lanzan dos dados cúbicos. Hallar la probabilidad de que los resultados de cada dado sean distintos.*

19. *Se extrae una carta de una baraja española. ¿Qué es más probable?:*
a) Que salga la sota de bastos o el rey de espadas
b) Que salga un oro o una figura
c) Que salga un oro o un no oro
d) Que salga una figura o que no salga una figura

20. *Se lanzan dos monedas. Hallar las siguientes probabilidades:*
a) Obtener dos caras
a) Obtener dos cruces
b) Obtener al menos una cara

21. *Extraemos una carta de una baraja española. Hallar las siguientes probabilidades:*
a) Que sea un rey o un as
b) Que sea un rey o una copa
c) Que sea un rey y una copa

22. *Se lanzan al aire tres monedas. Determinar la probabilidad de que se obtengan al menos dos cruces.*

23. *Se lanzan simultáneamente dos dados con las caras numeradas del 1 al 6. Hallar la probabilidad de que la suma de los puntos obtenidos sea menor que siete.*

4.- PROBABILIDAD CONDICIONADA

Sea A un suceso con $P(A)>0$. Para cualquier otro suceso B se define la **probabilidad de B condicionada a A** por:

$$\boxed{P\left(B/A\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}}$$

Como consecuencia:

$$P(A\cap B)=P(A)\,P\left(B/A\right)$$

Otra propiedad de la probabilidad condicionada es:

$$P\left(\overline{B}/A\right)=1-P\left(B/A\right)$$

PROBLEMAS

24. *Calcular la probabilidad de obtener tres cuatros al lanzar tres dados.*

25. *Calcular la probabilidad de "ningún seis" al lanzar cuatro dados.*

26. *Calcular la probabilidad de "algún seis" al lanzar cuatro dados. ("Algún seis" es el suceso contrario de "Ningún seis")*

27. *En una clase infantil hay 6 niñas y 10 niños. Si se escoge a 3 alumnos al azar, halla la probabilidad de:*

a) Seleccionar tres niños.
b) Seleccionar 2 niños y una niña.
c) Seleccionar, al menos, un niño.

28. *Se tienen dos sucesos A y B. Si las probabilidades*

$$P(A)=0.7, P(B)=0.6, \text{ y } P\left(A^c \cup B^c\right)=0.58$$

a) ¿Son independientes A y B?
b) Halla la probabilidad de que no se cumpla ni A ni B.

29. *En un IES hay organizadas actividades extraescolares de carácter deportivo. De los alumnos de 2º de Bachillerato, participan en esas actividades 14 chicas y 22 chicos. En ese curso hay un total de 51 chicos y 44 chicas. Si se escoge un alumno al azar, calcula la probabilidad de que:*

a) Sea chico y no participe en dichas actividades.
b) Participe en las actividades sabiendo que es chica.
c) Sea chica, sabiendo que participa.

30. *En cierta población laboral, un 80 % son peones sin cualificar (suceso P) y un 50 % son mujeres (suceso M). Se sabe, además, que el 40 % son peones femeninos y que un 45 % de los trabajadores cuyos padres tienen estudios (suceso PE), son mujeres. Di si son independientes los sucesos:*

a) P y M *b) PE y M* *c) P y* $\overline{M}$

5.- *INDEPENDENCIA DE SUCESOS*

Se dice que un suceso A ***es independiente de*** *otro suceso* B *cuando* $P\left(A/B\right)=P(A)$*, es decir, la presencia de* B *no influye en la probabilidad de que* A *ocurra o no.*

Caracterización:

$$A \text{ es independiente de } B \Leftrightarrow P\left(A/B\right)=P(A) \Leftrightarrow P(A\cap B)=P(A)P(B)$$

Como consecuencia, la independencia de sucesos es una propiedad recíproca, es decir, si A *es independiente de* B*, entonces* B *es independiente de* A*, y por tanto, diremos que* A y B *son independientes.*

Propiedad: Si A y B *son independientes, entonces también lo son:*

a) $\overline{A}$ y $\overline{B}$

b) $\overline{A}$ y B

c) A y $\overline{B}$

<u>Propiedad</u>: Si A, B y C *son independientes, entonces:* $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$.
El recíproco no es cierto.

6.- DEFINICIÓN AXIOMÁTICA: KOLMOGOROV

<u>Definición:</u>
Se llama *medida de probabilidad* a cualquier función que asocie a cada suceso A, del espacio de sucesos (finito), un número real de $[0,\ 1]$ que llamamos **<u>probabilidad de</u>** A y representamos por $P(A)$, que cumple los siguientes axiomas:

1) La probabilidad de un suceso cualquiera es mayor o igual que cero: $P(A) \geq 0$
2) La probabilidad del suceso seguro es igual a la unidad: $P(\Omega) = 1$
3) La probabilidad de dos sucesos incompatibles es igual a la suma de las probabilidades de cada uno de ellos, es decir, si A y B son incompatibles, entonces:
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

<u>Propiedades:</u>
Las mismas que las vistas en la definición clásica de Laplace.

7.- MÁS PROBLEMAS: PARA PRACTICAR

32. *Se juntan 3 clases, A, B y C con el mismo número de alumnos en el salón de actos de un instituto. Se sabe que el 10 % de los alumnos en la clase A son zurdos, en la clase B el 8 % son zurdos y en la clase C el 88 % no son zurdos. Si elegimos al azar un alumno del salón de actos, ¿con qué probabilidad el alumno no será zurdo?*

33. *En una población se ha determinado que, de cada 100 aficionados al fútbol, 25 son abonados del equipo A, 45 son abonados del equipo B y el resto son abonados del equipo C. Sabiendo que el 30 % de los abonados de A, el 40 % de los abonados de B y el 50 % de los abonados de C, tienen menos de 30 años, determinar la probabilidad de que seleccionado al azar un aficionado al fútbol en esa población, sea menor de 30 años.*

34. *En un mercado de valores cotizan un total de 60 empresas, de las que 15 son del sector bancario, 35 son industriales y 10 son del sector tecnológico. La probabilidad de que un banco de los que cotizan en el mercado se declare en quiebra es 0,01, la probabilidad de que se declare en quiebra una empresa industrial es 0,02 y de que lo haga una empresa tecnológica es 0,1.*
a) ¿Cuál es la probabilidad de que se produzca una quiebra en una empresa del citado mercado de valores?
b) Habiéndose producido una quiebra, ¿cuál es la probabilidad de que se trate de una empresa tecnológica?

35. *Una urna A contiene 5 bolas blancas y 3 negras y otra urna B contiene 3 blancas y 4 negras. Se elige una urna al azar y se extrae una bola.*
  a) *Calcula la probabilidad de que la bola extraída sea negra.*
  b) *Suponiendo que la bola extraída es blanca, calcula la probabilidad de que la urna elegida haya sido la A.*

36. *En una cierta facultad se sabe que el 25 % de los estudiantes suspenden matemáticas, el 15 % suspenden química y el 10 % suspenden matemáticas y química. Se selecciona un estudiante al azar.*
  a) *Calcula la probabilidad de que el estudiante no suspenda química ni matemáticas.*
  b) *Si sabemos que el estudiante ha suspendido química, ¿cuál es la probabilidad de que suspenda también matemáticas?*

37. *Un test para detectar si una persona es portadora del virus de la gripe aviar da positivo en el 96 % de los pacientes que la padecen y da negativo en el 94 % de los pacientes que no la padecen. Si una de cada ciento cuarenta y cinco personas es portadora del virus y una persona se somete al test, calcula:*
  a) *La probabilidad de que el test dé positivo.*
  b) *La probabilidad de que sea portadora, si el resultado del test es positivo.*
  c) *La probabilidad de que el test sea negativo y no sea portadora del virus.*

38. *La probabilidad de que haya un incidente en una fábrica que dispone de alarma es 0.1. La probabilidad de que suene esta, si se ha producido algún incidente es 0.97 y la probabilidad de que suene si no ha sucedido ningún incidente es 0.02.*
  a) *Calcula la probabilidad de que no suene la alarma.*
  b) *En el supuesto de que haya funcionado la alarma, ¿cuál es la probabilidad de que no haya habido ningún incidente?*

39. *Se sabe que 3 000 de los 20 000 estudiantes matriculados en cierta universidad hacen uso del comedor universitario y acuden a sus clases en transporte público. A partir de la información proporcionada por una amplia muestra de estudiantes universitarios se ha estimado que uno de cada cuatro universitarios que utilizan el transporte público para acudir a sus clases hacen también uso del comedor universitario. Determinar, justificando la respuesta, la probabilidad de que seleccionado al azar un estudiante en esta universidad resulte ser de los que utilizan el transporte público para acudir a sus clases.*

40. *En una ciudad en la que hay doble número de hombres que, de mujeres, se declara una epidemia. Un 4 % de los habitantes que son hombres están enfermos, mientras que un 3 % son mujeres y están enfermas. Elegido un solo habitante de la ciudad, calcular:*
  a) *La probabilidad de que sea hombre.*
  b) *Si es hombre, la probabilidad de que esté enfermo.*
  c) *La probabilidad de que sea mujer o esté sano.*