UNIDAD 8:
DERIVADAS

1. DEFINICIÓN DE DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Definición:

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y a un punto interior de D. Diremos que

$$f \text{ derivable en } x = a \Leftrightarrow \exists \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \Leftrightarrow \exists \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

en cuyo caso dicho límite se representa por $f'(a)$.

2. CARACTERIZACIÓN

Derivadas laterales:

$$f \text{ derivable por la izquierda en } x = a \Leftrightarrow \exists f'(a-) = \lim_{x\to a-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$f \text{ derivable por la derecha en } x = a \Leftrightarrow \exists f'(a+) = \lim_{x\to a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Caracterización:

$$f \text{ derivable en } x = a \Leftrightarrow \exists f'(a-), f'(a+) \text{ y } f'(a-) = f'(a+)$$

3. RELACIÓN CON LA CONTINUIDAD

Si una función es derivable en un punto es continua en dicho punto.

Resumen:

$$\boxed{f \text{ derivable en } x_0 \Rightarrow f \text{ continua en } x_0}$$

$$\boxed{f \text{ NO continua en } x_0 \Rightarrow f \text{ NO derivable en } x_0}$$

4. PROPIEDADES FUNDAMENTALES

- Derivada de una suma de funciones:

$$\boxed{\left(f(x)+g(x)\right)' = f'(x)+g'(x)}$$

- Derivada de una constante por una función:

$$\boxed{\left(c \cdot f(x)\right)' = c \cdot f'(x)}$$

- Derivada de un producto de funciones:

$$\boxed{\left(f(x)g(x)\right)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}$$

- Derivada de un cociente de funciones:

$$\boxed{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}}$$

- Derivada de una función compuesta:

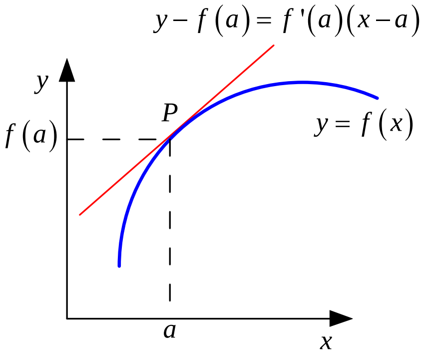
$$\boxed{f\left(g(x)\right)' = f'\left(g(x)\right)g'(x)}$$

- Derivada de la función inversa:

$$\boxed{\left(f^{-1}\right)'\left(f(x)\right) = \frac{1}{f'(x)}}$$

5. ECUACIÓN DE LA RECTA TANGENTE

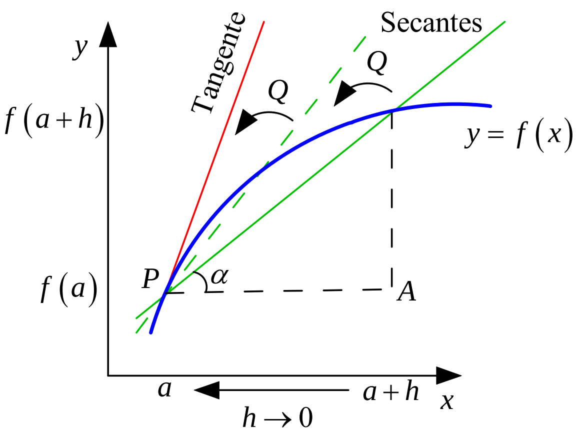
Ecuación de la recta tangente:



La ecuación de la recta tangente a la función $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = a$ es:

$$\boxed{y - f(a) = f'(a)(x - a)}$$

6. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA



La derivada de una función en un punto es igual a la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto, es decir,

$$\text{tg}\ \alpha = f'(a) = m_{\text{recta tangente}}$$

7. TABLAS DE DERIVADAS

Tabla de derivadas (de funciones simples)

Función	Derivada
$y = c \in \mathbb{R}$	$y' = 0$
$y = x$	$y' = 1$
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$y = \sqrt[n]{x}$	$y' = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$y = a^x$ con $a > 0$	$y' = a^x \ln a$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x}\log_a e$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = \text{sen}\, x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y = -\ \text{sen}\, x$
$y = \text{tg}\, x$	$y' = 1 + \text{tg}^2 x$

Aplicando la regla de la cadena, obtenemos la siguiente tabla de derivadas para funciones compuestas:

Tabla de derivadas, para funciones compuestas:

Función	Derivada
$y = f(x)^n$	$y' = n \cdot f(x)^{n-1} \cdot f'(x)$
$y = \sqrt{f(x)}$	$y' = \frac{f'(x)}{2 \cdot \sqrt{f(x)}}$

$y=\sqrt[n]{f(x)}$	$y'=\dfrac{f'(x)}{n\cdot\sqrt[n]{f(x)^{n-1}}}$
$y=a^{f(x)}$ con $a>0$	$y'=f'(x)\cdot a^{f(x)}\cdot\ln a$
$y=e^{f(x)}$	$y'=f'(x)\cdot e^{f(x)}$
$y=\log_a f(x)$	$y'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}\cdot\log_a e$
$y=\ln f(x)$	$y'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$
$y=\operatorname{sen} f(x)$	$y'=f'(x)\cdot\cos f(x)$
$y=\cos f(x)$	$y=-f'(x)\ \cdot\operatorname{sen} f(x)$
$y=\operatorname{tg} f(x)$	$y'=f'(x)\cdot\left[1+\operatorname{tg}^2 f(x)\right]$

8. EJERCICIOS

1. Calcula la derivada de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $f(x)=x^2$ en $a=1$

b) $f(x)=3x^2-2x+1$ en $a=2$

c) $f(x)=\dfrac{3}{x}$ en $a=2$

2. Calcula la función derivada de $f(x)=x^2$

3. Calcula la función derivada de $f(x)=x^3-2x+1$ y como aplicación calcula $f'(3), f'(-2)$ y $f'(0)$.

4. Indica en qué puntos es derivable la siguiente función y halla $f'(x)$:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+3x & \text{si } x\le 0 \\ x^3+3x & \text{si } 0<x<2 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$$

5. Halla el valor de a para que $f(x)$ sea derivable en $x=1$, siendo

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2 & \text{si } x\le 1 \\ ax+1 & \text{si } x>1 \end{cases}$$

6. Dada la función

$$f(x)=\left|1-x^2\right|=\begin{cases} x^2-1 & x<-1 \\ 1-x^2 & -1\le x\le 1 \\ x^2-1 & x>1 \end{cases}$$

Estudiar la continuidad, la derivabilidad y representarla gráficamente.

7. Consideremos la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & 0<x<b \\ 1-\dfrac{1}{4}x & b\le x \end{cases}$

Se pide:

a) Determinar el valor de b para que sea continua.

b) ¿Es derivable f en el valor de b calculado en el apartado anterior?

8. Calcula la derivada de las siguientes funciones:

1) $f(x)=7x^5-2x^3+3x^2-4$

2) $f(x)=5x^4+3x^2+2x-7$

3) $f(x)=(3x-1)(5x^2+3x-2)$

17) $f(x)=\operatorname{tg} x \operatorname{sen} x$

18) $f(x)=\cos x \operatorname{tg} x$

19) $f(x)=e^x \operatorname{tg} x$

4) $f(x)=\dfrac{4x^2+1}{7x+1}$

5) $f(x)=x-\dfrac{1}{x}+\sqrt[3]{x}$

6) $f(x)=(x-\sqrt{x})(x+\sqrt{x})$

7) $f(x)=\dfrac{(3x-1)(2x+3)}{x^2+7}$

8) $f(x)=(5x^2-3x+1)\dfrac{2x}{5x+3}$

9) $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt[5]{x^3}+\sqrt{x^5}$

10) $f(x)=\dfrac{(3x-1)^2-(3x+1)^2}{2-x^2}$

11) $f(x)=\dfrac{1}{3x^2-5x+2}$

12) $f(x)=\dfrac{1}{5x-3}(3x^2-x+2)$

13) $f(x)=(x^2+3x)\operatorname{sen} x$

14) $f(x)=3^x$

15) $f(x)=\dfrac{x\operatorname{tg} x}{x+1}$

16) $f(x)=5^x$

20) $f(x)=2^x\ln x$

21) $f(x)=e^x\log_{10} x$

22) $f(x)=\log_5 x\cos x$

23) $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x}$

24) $f(x)=\dfrac{2^x}{\ln x}$

25) $f(x)=\dfrac{x^2}{\ln x}$

26) $f(x)=\operatorname{sen} x\cos x$

27) $f(x)=\operatorname{sen} x+e^x\operatorname{sen} x$

28) $f(x)=\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x+\cos x}$

29) $f(x)=\dfrac{3^x\operatorname{sen} x}{2x+e^x}$

30) $f(x)=\log_5 x\log_7 x$

31) $f(x)=e^x\operatorname{sen} x$

32) $f(x)=\dfrac{(x^2-3x+2)\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{tg} x}$

9. Calcula la derivada de las siguientes funciones:

1) $f(x)=\operatorname{sen}(2x^2-3x)$

2) $f(x)=\ln(3x+1)$

3) $f(x)=e^{5x}$

4) $f(x)=\operatorname{tg}(2-3x)$

5) $f(x)=(x^2-5x+2)^7$

6) $f(x)=e^{\operatorname{sen} x}$

7) $f(x)=3^{1+\operatorname{sen} x+\cos x}$

8) $f(x)=\log_7(4+\operatorname{sen} x)$

9) $f(x)=\operatorname{sen}^2 x$

10) $f(x)=\operatorname{tg}^3 x$

11) $f(x)=3^{x^2+2}\operatorname{sen} x$

12) $f(x)=(3x^2-2)\operatorname{sen}(5x)$

13) $f(x)=(x^2+1)^5$

14) $f(x)=\operatorname{sen}^3 x$

15) $f(x)=\operatorname{sen}(x^3)$

16) $f(x)=\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x$

17) $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen}(5x+2)}{\cos(3x-1)}$

18) $f(x)=e^{\operatorname{sen} x}\cos x$

19) $f(x)=\log_5(3x+1)$

20) $f(x)=\ln(\operatorname{tg} x)$

21) $f(x)=\operatorname{sen}(\cos(3x))$

22) $f(x)=\sqrt{5x^2-3x+2}$

23) $f(x)=\sqrt[3]{(3-2x^2)^2}$

24) $f(x)=\sqrt[4]{x^2-3x+1}$

10. Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x)=x^3$ en el punto de abscisa $x=-1$.

11. Calcula la ecuación de la recta tangente a $f(x)=\frac{4}{x^2}$ en el punto de abscisa $x=2$.

12. Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x)=2x^3-x^2$ en el punto de abscisa $x=3$.

13. Dada $f(x)=x^2-10x+9$, halla el punto en el que la recta tangente a la gráfica de f es paralela al eje de abscisas.

14. Calcula la ecuación de la recta tangente de las siguientes funciones, en $x=0$:

1) $y=x^3-4x^2+4x$
2) $y=x^3-x$
3) $y=\frac{x^2}{x^2+1}$
4) $y=\frac{x}{x^2+1}$
5) $y=\ln\left(\sqrt{x^2+1}\right)$
6) $f(x)=\frac{x^2}{x^2-1}$
7) $y=x^3-x^2$
8) $y=x^5$
9) $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$
10) $y=\frac{4x}{2x+5}$
11) $y=e^x+x$
12) $f(x)=\frac{x^2+3x}{x-2}$