PROBLEMAS DE PROBABILIDAD

1.- *Obtener el espacio muestral de los puntos obtenidos al tirar un dado.*

Solución:
$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

2.- *¿Y en el caso del lanzamiento de una moneda?*

Solución:
$\Omega = \{C, X\}$ donde C = salir cara y X = salir cruz

3.- *Describir el espacio muestral del experimento consistente en extraer una bola de una bolsa en la que hay 3 rojas (R), 2 blancas (B) y 4 verdes (V).*

Solución:
$\Omega = \{R, B, V\}$ donde R = sacar bola roja, B = sacar bola blanca y V = sacar bola verde

4.- *Escribir el espacio muestral asociado al experimento de sacar una carta de entre las diez del palo de copas de una baraja española.*

Solución:
$\Omega = \{1C, 2C, 3C, 4C, 5C, 6C, 7C, SC, CC, RC\}$ donde iC = sacar i (i = 1, 2, … , 7) de copas, SC = sacar sota de copas, CC = sacar caballo de copas y RC = sacar rey de copas.

5.- *Sean los sucesos: A = {ser oyente de Cadena Dial}, B = {ser oyente de la Europa FM} y C = ={ser oyente de KISS FM}. Expresa mediante las operaciones de sucesos:*

(a) Ser oyente de, al menos, una emisora.
(b) Ser oyente de Cadena Dial, pero no de Europa FM ni de KISS FM.
(c) Oír sólo dos emisoras.
(d) No oír más de una emisora.
(e) Oír alguna emisora, pero no las tres.

Solución:
a) El enunciado equivale a ser oyente de alguna de las tres emisoras, luego:
$A \cup B \cup C$
b) $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$
c) $(A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C)$
d) O se oye una emisora o no se oye ninguna, luego:
$(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C})$
e) Se trata de oír una o dos emisoras, pero no las tres, por tanto:
$(A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$

6.- *En un sorteo de lotería nos fijamos en la cifra en que termina el “gordo”.*

a) ¿Cuál es el espacio muestral?
b) Describe los sucesos

A = "menor que 4"
B = "par"
C = "mayor que 5"
escribiendo todos sus elementos.

c) *Halla los sucesos* $A\cup B$, $B\cap C$, $\overline{A}\cap\overline{B}$ y $A\cup\overline{C}$

d) *¿Cuántos sucesos hay?*

Solución:

a) $\Omega=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

b) $A=\text{menor que }4=\{1,2,3\}$

$B=\text{par}=\{2,4,6,8\}$

$C=\text{mayor que }5=\{6,7,8,9\}$

c) $A\cup B=\{1,2,3,4,6,8\}$

$B\cap C=\{6,8\}$

$\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{(A\cup B)}=\{5,9\}$

$A\cup\overline{C}=\{1,2,3,4,6,8\}\cup\{1,2,3,4,5\}=\{1,2,3,4,5,6,8\}$

d) El número total de sucesos es $2^{10}=1024$

7.- *Aplicando las leyes de De Morgan, expresar el suceso* $(H\cup C)^c$, *donde H es el suceso ser hombre y C estar casado.*

Solución:

$\overline{(H\cup C)}=\overline{H}\cap\overline{C}$

$$\left.\begin{array}{l}\overline{H}=\text{ no ser hombre}=\text{ser mujer}\\ \overline{C}=\text{ estar soltero}\end{array}\right\}\Rightarrow \overline{H}\cap\overline{C}=\text{ ser mujer soltera}$$

8.- *Consideremos entre los habitantes de un municipio, los sucesos A = {ser socio del casino}, B = {ser socio del club de fútbol local} y C = {ser socio de alguna asociación juvenil}. Expresa en función de A, B y C las siguientes situaciones:*

a) *Ser socio de alguna de esas asociaciones.*
b) *Ser socio de las tres asociaciones.*
c) *Ser socio, sólo, del casino.*
d) *Ser socio de, como máximo, una o dos asociaciones.*
e) *No ser socio de ninguna de las tres.*
f) *Ser socio de una sola asociación.*

Solución:

a) Alguna de las tres: $A\cup B\cup C$

b) Ser socio de las tres: $A\cap B\cap C$

c) Sólo del casino: $A\cap\overline{B}\cap\overline{C}$

d) $A\cup B\cup C-(A\cap B\cap C)$

e) De ninguna de las tres: $\overline{A\cup B\cup C}=\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}$

f) $(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap B\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C)$

9.- *Halla los espacios muestrales (producto) de los siguientes experimentos:*

a) Tirar dos monedas y apuntar el resultado de su cara superior.
b) Tirar un dado y una moneda.
c) Tirar tres monedas.
d) Tirar dos dados.

Solución:

a) $\Omega = \{CC, CX, XC, XX\}$

b) $\Omega = \{1C, 1X, 2C, 2X, ..., 6C, 6X\}$

c) $\Omega = \{CCC, CCX, CXC, CXX, XCC, XCX, XXC, XXX\}$

d) $\Omega = \{(1,1),(1,2),...,(1,6),(2,1),(2,2),...,(2,6),...,(6,1),...,(6,6)\}$

10.- *Escribir el espacio muestral asociado al experimento de lanzar dos dados de diferentes colores y observar la pareja de números que se obtiene.*

Solución:

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),...,(1,6),(2,1),(2,2),...,(2,6),...,(6,1),...,(6,6)\}$$

11.- *Escribir el espacio muestral asociado al experimento de lanzar dos dados de diferentes colores y sumar los números que se obtienen.*

Solución:

$$\Omega = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$$

12.- *Consideremos los sucesos del experimento de lanzar dos monedas:*

A = {sacar una cara y una cruz}
B = {al menos una cruz}

Calcular: $A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A} \cap \overline{B}$ y $A - B$.

Solución:

C = sacar cara
X = sacar cruz

$\Omega = \{CC, CX, XC, XX\}$

A = sacar al menos una cara y una cruz = $\{CX, XC\}$

B = al menos una cruz = $\{CX, XC, XX\}$

$A \cup B = \{CX, XC, XX\} = B$

$A \cap B = \{CX, XC\} = A$

$$\left.\begin{array}{l} \overline{A} \cap \overline{B} \\ \qquad \overline{A} = \{CC, XX\} \\ \qquad \overline{B} = \{CC\} \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{A} \cap \overline{B} = \{CC\} = \overline{A}$$

$A - B = A \cap \overline{B} = \varnothing$

13.- *Se ha lanzado un dado 100 veces y se han obtenido los siguientes resultados:*

Cara	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
f_a	*13*	*15*	*17*	*16*	*20*	*19*

Calcular las frecuencias relativas de los sucesos siguientes:

a) A = salir par *b) B = salir impar*

c) C = salir 2 o 4 *d)* $A \cup A^c$ *y* $A \cap B^c$

Solución:

a) A = salir par

i = salir i, para i = 1,2,3,4,5,6

$$f_r(A) = f_r(2) + f_r(4) + f_r(6) = \frac{15}{100} + \frac{16}{100} + \frac{19}{100} = \frac{1}{2}$$

b) B = salir impar = $\overline{A}$

$$f_r(B) = 1 - f_r(A) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

c) C = salir 2 o 4

$f_r(C) = f_r(2) + f_r(4) = \frac{15}{100} + \frac{16}{100} = \frac{31}{100}$ ya que no puede salir a la vez un dos y un cuatro

d) $f_r\left(A \cup \overline{A}\right) = f_r(A) + f_r\left(\overline{A}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ ya que $A \cap \overline{A} = \varnothing$

e) $f_r\left(A \cup \overline{B}\right) = f_r(A) + f_r\left(\overline{B}\right) - f_r\left(A \cap \overline{B}\right) \Rightarrow f_r\left(A \cap \overline{B}\right) = f_r(A) + f_r\left(\overline{B}\right) - f_r\left(A \cup \overline{B}\right)$

$A \cup \overline{B} = A$

$$f_r\left(A \cap \overline{B}\right) = f_r(A) + f_r\left(\overline{B}\right) - f_r(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

14.- *Se considera un experimento aleatorio que consiste en lanzar un dado. Se pide la probabilidad de obtener:*

a) Número impar
b) Número primo
c) Múltiplo de 3
d) Múltiplo de 5

Solución:

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

A = número impar = $\{1,3,5\} \rightarrow P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

B = número primo = $\{2,3,5\} \rightarrow P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

C = múltiplo de 3 = $\{3,6\} \rightarrow P(C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

D = múltiplo de 5 = $\{5\} \rightarrow P(D) = \frac{1}{6}$

15.- *Se realiza un experimento aleatorio que consiste en la extracción de una carta de una baraja española. Se pide hallar las siguientes probabilidades:*

a) Obtener un oro
b) Obtener un as

Solución:
Consideramos que la baraja tiene 40 cartas, 10 por palo.

A = obtener un oro $\rightarrow P(A)=\frac{10}{40}=\frac{1}{4}$

B = obtener un as $\rightarrow P(B)=\frac{2}{40}=\frac{1}{20}$

16.- *Consideremos el experimento aleatorio que consiste en lanzar dos dados y anotar la suma de los puntos de las caras superiores. Hallar la probabilidad de los siguientes sucesos:*

a) Obtener suma igual a 8
b) Obtener suma menor o igual a 4

Solución:
$\Omega=\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\} \rightarrow \#\Omega=11$

A = obtener suma igual a 8 = $\{8\} \rightarrow P(A)=\frac{1}{11}$

B = obtener suma menor o igual que 4 = $\{2,3,4\} \rightarrow P(B)=\frac{3}{11}$

17.- *Una urna contiene dos bolas blancas y dos rojas. Se hacen cuatro extracciones con reemplazamiento. Encuentra:*

a) Los sucesos A = {sólo ha salido una bola roja} y B = {la segunda extracción es bola roja}
b) $P(A)$, $P(B)$, $P(A\cap B)$, y $P(A\cup B)$

Solución:
a) A = sólo ha salido una bola roja $=\{RBBB, BRBB, BBRB, BBBR\} \rightarrow P(A)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$

B = la segunda extracción es bola roja =

$=\{BRBB, BRBR, BRRB, BRRR, RRBB, RRBR, RRRB, RRRR\} \rightarrow P(B)=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$

b) $\left.\begin{array}{l} P(A\cap B) \\ A\cap B = \text{ la segunda es roja y no han salido más rojas} =\{\text{BRBB}\} \end{array}\right\} \rightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{16}$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{16}=\frac{11}{16}$$

18.- *Se ha encargado la impresión de una encuesta. El impresor informa que cada millar de folios la máquina estropea 12 folios. Hallar la probabilidad de que elegido al azar un folio de la encuesta:*

a) Esté mal impreso
b) Esté correctamente impreso

Solución:
a) A = folio mal impreso

$$P(A)=\frac{12}{1000}$$

b) $P(\overline{A})=1-P(A)=1-\frac{12}{1000}=\frac{988}{1000}=\frac{247}{250}$

19.- *Hallar la probabilidad de que al lanzar tres monedas se obtenga al menos una cara.*

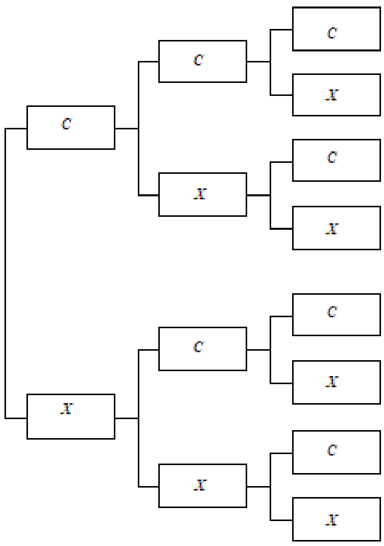
Solución:

Construimos un árbol y nombramos los sucesos:

A = obtener al menos una cara

$\overline{A}=$ no obtener ninguna cara $\rightarrow P(\overline{A})=\frac{1}{8}$

$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$



20.- *Se lanzan dos dados cúbicos. Hallar la probabilidad de que los resultados de cada dado sean distintos.*

Solución:

$\Omega=\{(1,1),...,(1,6),(2,1),...,(2,6),...,(6,1),...,(6,6)\}\rightarrow \#\Omega=36$

A = los resultados de cada dado son distintos

$P(A)=\frac{30}{36}=\frac{5}{6}$

21.- *Un jugador de fútbol, especialista en lanzar penaltis, mete 4 de cada 5 que tira. Para los próximos tres penaltis que tire, se consideran los siguientes sucesos: A = {mete sólo uno de ellos}, B = {mete dos de los tres} y C = {mete el primero}. Halla la probabilidad de los sucesos* $A\cup B, A\cap C$ *y* $B\cap C$.

Solución:

M = mete el penalti $\rightarrow P(M)=\frac{4}{5}$

A = mete sólo uno de ellos = $\left\{M\overline{M}\,\overline{M},\overline{M}M\overline{M},\overline{M}\,\overline{M}M\right\}$

$$P(A)=P\left(M\overline{M}\,\overline{M}\right)+P\left(\overline{M}M\overline{M}\right)+P\left(\overline{M}\,\overline{M}M\right)=3\cdot\frac{4}{5}\frac{1}{5}\frac{1}{5}=\frac{12}{125}$$

B = mete dos de tres = $\left\{MM\overline{M},M\overline{M}M,\overline{M}MM\right\}$

$$P(B)=3\cdot\frac{4}{5}\frac{4}{5}\frac{1}{5}=\frac{48}{125}$$

C = mete el primero = $\left\{MMM,MM\overline{M},M\overline{M}M,M\overline{M}\,\overline{M}\right\}$

$$P(C)=P(MMM)+P\left(MM\overline{M}\right)+P\left(M\overline{M}M\right)+P\left(M\overline{M}\,\overline{M}\right)=\frac{4}{5}\frac{4}{5}\frac{4}{5}+3\frac{4}{5}\frac{4}{5}\frac{1}{5}=\frac{112}{125}$$

a) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{12}{125}+\frac{48}{125}-0=\frac{60}{125}=\frac{12}{25}$

$A\cap B=\varnothing$

b) $A\cap C=\left\{M\overline{M}\,\overline{M}\right\}$

$$P(A\cap C)=\frac{4}{5}\frac{1}{5}\frac{1}{5}=\frac{4}{125}$$

C) $B\cap C=\left\{MM\overline{M},M\overline{M}M\right\}$

$$P(B\cap C)=P\left(MM\overline{M}\right)+P\left(M\overline{M}M\right)=2\cdot\frac{4}{5}\frac{4}{5}\frac{1}{5}=\frac{32}{125}$$

22.- *Dos sucesos tienen la misma probabilidad igual a 0.5. La probabilidad de que ocurra uno de los sucesos sabiendo que ha ocurrido el otro es igual a 0.3. ¿Cuál es la probabilidad de que no curra ninguno de los dos sucesos?*

Solución:
Los datos del problema son:

$$P(A)=P(B)=0.5$$

$$P\left(A/B\right)=0.3$$

Calculamos la probabilidad que nos piden:

$$P(A\cap B)=P(B)P\left(A/B\right)=0.5\cdot 0,3=0.15$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.5+0.5-0.15=0.85$$

$$P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=P\left(\overline{A\cup B}\right)=1-P(A\cup B)=1-0.85=0.15$$

23.- *En una joyería hay dos alarmas. La probabilidad de que se active la primera es $\frac{1}{3}$, de que se active la segunda es $\frac{2}{5}$ y de que se activen las dos a la vez es $\frac{1}{15}$. ¿Cuál es la probabilidad de que se active alguna de las dos? ¿Y de que no se active ninguna de ellas?*

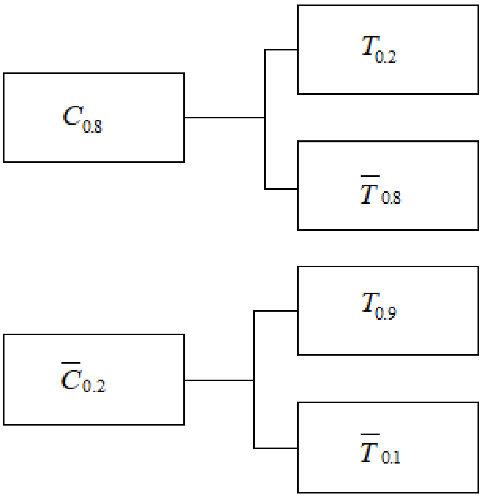
Solución:
Los datos son: $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(B)=\frac{2}{5}$ y $P(A\cap B)=\frac{1}{15}$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{3}+\frac{2}{5}-\frac{1}{15}=\frac{2}{3}$$
$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

24.- *A un alumno le lleva en coche a la facultad el 80% de los días un amigo. Cuando le lleva en coche llega tarde el 20% de los días. Cuando el amigo no le lleva, el alumno llega temprano a clase el 10% de los días. Determinar:*

1) *La probabilidad de que llegue pronto a clase y le haya llevado el amigo.*
2) *La probabilidad de que llegue tarde a clase.*
3) *Si ha llegado pronto a clase calcúlese, ¿Cuál es la probabilidad de que no le haya llevado el amigo?*

Solución:
Nombramos los sucesos y realizamos un diagrama de árbol con las probabilidades que nos da el enunciado:



C = ir en coche $\rightarrow \overline{C}$ = no ir en coche
T = llegar tarde $\rightarrow \overline{T}$ = no llegar tarde = llegar pronto

1) $P(\overline{T}\cap C)=0.8\cdot 0.8=0.64$

2) $P(T)=0.8\cdot 0.2+0.2\cdot 0.9=0.16+0.18=0.34$

3) $P\left(\overline{C}/\overline{T}\right)=\dfrac{P(\overline{C}\cap\overline{T})}{P(\overline{T})}=\dfrac{0.2\cdot 0.1}{0.8\cdot 0.8+0.2\cdot 0.1}=0.03$

25.- *Sean A y B dos sucesos con* $P(A)=0.5,\ P(B)=0.3$ y $P(A\cap B)=0.1$. *Calcular las siguientes probabilidades:*

$$P(A\cup B),\ P\left(A/B\right),\ P\left(A/A\cap B\right)\ \text{y}\ P\left(A/A\cup B\right)$$

Solución:
1) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.5+0.3-0.1=0.7$

2) $P\left(A/B\right)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{0.1}{0.3}=\dfrac{1}{3}$

3) $P\left(A/A\cap B\right)=\dfrac{P(A\cap(A\cap B))}{P(A\cap B)}=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A\cap B)}=1$

4) $P\left(A/A\cup B\right)=\dfrac{P(A\cap(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\dfrac{P(A)}{P(A\cup B)}=\dfrac{0.5}{0.7}=\dfrac{5}{7}$

26.- *Calcular la probabilidad de obtener tres cuatros al lanzar tres dados.*

<u>Solución:</u>
A_i = obtener un cuatro con el dado i

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{256} = 0.0046$$

27.- *Calcular la probabilidad de "ningún seis" al lanzar cuatro dados.*

<u>Solución:</u>

$$P(\text{ningún seis}) = \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} = 0.48$$

28.- *Calcular la probabilidad de "algún seis" al lanzar cuatro dados. ("Algún seis" es el suceso contrario de "Ningún seis")*

<u>Solución:</u>
El suceso "ningún seis" es el contrario de "algún seis", luego

$$P(\text{algún seis}) = 1 - P(\text{ningún seis}) = 1 - 0.48 = 0.52$$

29.- *En una clase infantil hay 6 niñas y 10 niños. Si se escoge a 3 alumnos al azar, halla la probabilidad de:*

a) Seleccionar tres niños.
b) Seleccionar 2 niños y una niña.
c) Seleccionar, al menos, un niño.

<u>Solución:</u>

a) $P(\text{elegir 3 niños}) = P(\text{niño})\cdot P\left(\text{niño}/\text{niño}\right)\cdot P\left(\text{niño}/\text{2 niños}\right) == \frac{10}{16}\cdot\frac{9}{15}\cdot\frac{8}{14} = \frac{3}{14}$

b) 2 niños y 1 niña = $\{$niño-niño-niña, niño-niña-niño, niña-niño-niño$\}$

$$P(\text{2 niños y 1 niña}) = 3P(\text{niño})\cdot P\left(\text{niño}/\text{niño}\right)\cdot P\left(\text{niña}/\text{2 niños}\right) = 3\cdot\frac{10}{16}\cdot\frac{9}{15}\cdot\frac{6}{14} = \frac{27}{56}$$

c) El suceso "al menos un niño" es el contrario de "ningún niño", luego

$$P(\text{ningún niño elegido}) = P(\text{3 niñas}) = \frac{6}{16}\cdot\frac{5}{15}\cdot\frac{4}{14} = \frac{1}{28}$$

$$P(\text{al menos un niño}) = 1 - \frac{1}{28} = \frac{27}{28}$$

30.- *Se tienen dos sucesos A y B. Si las probabilidades*
$P(A) = 0.7, P(B) = 0.6,$ y $P(A^c \cup B^c) = 0.58$

a) ¿Son independientes A y B?
b) Halla la probabilidad de que no se cumpla ni A ni B.

<u>Solución:</u>

a) A y B son independientes $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Por un lado,

$$P(A)P(B) = 0.7\cdot 0.6 = 0.42$$

y por otro,

$$\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cap B}\Rightarrow P\left(\overline{A\cap B}\right)=1-P\left(A\cap B\right)=0.58$$

de donde se deduce que

$$P\left(A\cap B\right)=1-0.58=0.42$$

Así, los sucesos *A* y *B* son independientes.

b) Que no se cumpla ni A ni B, es el suceso contrario de que se cumpla alguno de los dos, esto es, el suceso $\overline{A\cup B}$.

Queremos calcular $P\left(\overline{A\cup B}\right)$, y sabemos que $P\left(\overline{A\cup B}\right)=1-P\left(A\cup B\right)$

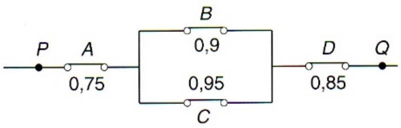
donde

$$P\left(A\cup B\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)-P\left(A\cap B\right)=0.7+0.6-0.42=0.88$$

luego

$$P\left(\overline{A\cup B}\right)=1-P\left(A\cup B\right)=1-0.88=0.12$$

31.- *Un circuito eléctrico dispone de cuatro interruptores A, B, C y D, cuyas probabilidades de estar cerrados se muestran en la figura:*



¿Cuál es la probabilidad de que en un momento dado pase corriente de P a Q?

Solución:

Hay que suponer que los interruptores actúan independientemente unos de otros.

Para que circule corriente, los interruptores *A* y *D*, así como *B* o *C*, han de estar cerrados. Esta circunstancia se representa mediante el suceso $A\cap\left(B\cup C\right)\cap D$, cuya probabilidad es:

$$P\left(A\cap\left(B\cup C\right)\cap D\right)=P\left(A\right)P\left(B\cup C\right)P\left(D\right)=P\left(A\right)\left[P\left(B\right)+P\left(C\right)-P\left(B\cap C\right)\right]P\left(D\right)=$$

$$=0.75\cdot\left(0.9+0.95-0.9\cdot0.95\right)\cdot0.85=0.634$$

32.- *En un IES hay organizadas actividades extraescolares de carácter deportivo. De los alumnos de 2º de Bachillerato, participan en esas actividades 14 chicas y 22 chicos. En ese curso hay un total de 51 chicos y 44 chicas. Si se escoge un alumno al azar, calcula la probabilidad de que:*

a) Sea chico y no participe en dichas actividades.
b) Participe en las actividades sabiendo que es chica.
c) Sea chica, sabiendo que participa.

Solución:

Con los datos suministrados podemos formar la siguiente tabla:

	Chicos (H)	**Chicas (M)**	**Total**
Participan (S)	22	14	36
No participan (N)	29	30	59
Total	51	44	95

a) $P\left(H\cap N\right)=\dfrac{29}{95}$

b) $P\left(S/_{M}\right)=\dfrac{P(S\cap M)}{P(M)}=\dfrac{14/_{95}}{44/_{95}}=\dfrac{14}{44}=\dfrac{7}{22}$

c) $P\left(M/_{S}\right)=\dfrac{14}{36}=\dfrac{P(S\cap M)}{P(S)}=\dfrac{14/_{95}}{36/_{95}}=\dfrac{7}{18}$

33.- *En cierta población laboral, un 80 % son peones sin cualificar (suceso P) y un 50 % son mujeres (suceso M). Se sabe, además, que el 40 % son peones femeninos y que un 45 % de los trabajadores cuyos padres tienen estudios (suceso PE), son mujeres. Di si son independientes los sucesos:*

a) P y M *b) PE y M* *c) P y M^c*

Solución:
De la información del enunciado, podemos inferir: $P(P)=0.8,\quad P(M)=0.5,\quad P(P\cap M)=0.4$

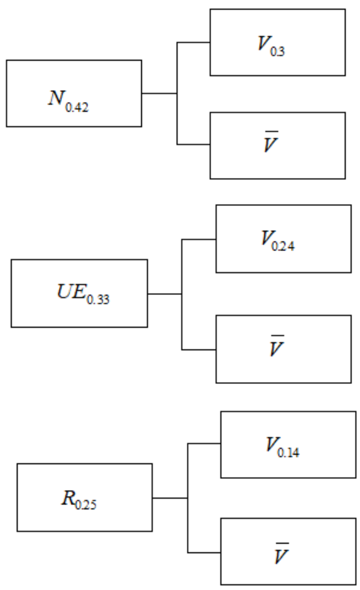
a) Como $P(P\cap M)=P(P)P(M)=0.8\cdot 0.5=0.4$, los sucesos *P* y *M* son independientes.

b) $P\left(M/_{PE}\right)=0.45\neq P(M)=0.5$, resultando que el suceso *PE* condiciona al suceso *M*, no siendo, por tanto, independientes.

c) Como *P* y *M* son independientes, *P* y $\overline{M}$ también lo son.

34.- *De los créditos concedidos por un banco, un 42 % lo son para clientes nacionales, un 33 %, para clientes de la Unión Europea y un 25 % para individuos del resto del mundo. De esos créditos, son destinados a vivienda un 30 %, un 24 % y un l4 %, según sean nacionales, de la UE o del resto del mundo. Elegido un cliente al azar, ¿qué probabilidad hay de que el crédito concedido no sea para vivienda?*

Solución:



Nombramos los sucesos:
N = ser cliente nacional
UE = ser cliente de la Unión Europea
V =crédito para la vivienda

La probabilidad de que un crédito sea para vivienda es:

$$P(V)=P(N)P\left(V/_{N}\right)+P(UE)P\left(V/_{UE}\right)+$$
$$+P(R)P\left(V/_{R}\right)=0.42\cdot 0.3+0.33\cdot 0.24+$$
$$+0.25\cdot 0.14=0.2402$$

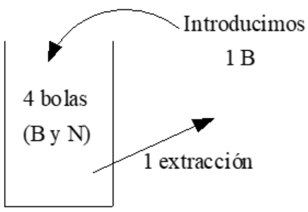
Por tanto:

$$P\left(\overline{V}\right)=1-0.2402=0.7598$$

Donde hemos tenido en cuenta el diagrama de árbol que se puede ver al lado.

35.- *** Una urna contiene 4 bolas (blancas y negras). Se introduce una bola blanca y a continuación se extrae otra bola. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea blanca?*

Solución:
Veamos gráficamente lo que tenemos:



Las configuraciones iniciales pueden ser:

$$A_1 = BNNN,\quad A_2 = BBNN,\quad A_3 = BBBN$$

Y después de introducir la bola blanca, las configuraciones pueden ser (mantenemos la misma notación para los sucesos):

$$A_1 = BBNNN,\quad A_2 = BBBNN,\quad A_3 = BBBBN$$

Estas tres configuraciones son equiprobables.

La probabilidad de sacar bola blanca es:

$$P(B) = P(A_1)P\left(B/A_1\right) + P(A_2)P\left(B/A_2\right) + P(A_3)P\left(B/A_3\right) = \frac{1}{3}\frac{2}{5} + \frac{1}{3}\frac{3}{5} + \frac{1}{3}\frac{4}{5} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

36.- *En cierta empresa se producen dos bienes A y B en la proporción 3 a 4. La probabilidad de que un bien de tipo A tenga defecto de fabricación es del 3%, y del tipo B, del 5 %. Se analiza un bien, elegido al azar, y resulta correcto. ¿Qué probabilidad existe de que sea del tipo A?*

Solución:
La proporción 3 a 4 significa, que se producen 3 bienes de tipo A por cada 4 de tipo B, luego:

$$P(A) = \frac{3}{7} \qquad P(B) = \frac{4}{7}$$

Llamamos C = ser correcto. Tenemos las siguientes probabilidades condicionadas:

$$P\left(C/A\right) = 0.97 \qquad P\left(C/B\right) = 0.95$$

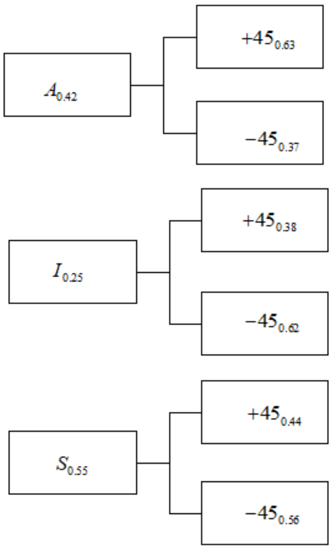
y nos piden: $P\left(A/C\right)$

Como $P(C) = \frac{3}{7}\cdot 0.97 + \frac{4}{7}\cdot 0.95 = \frac{671}{700}$

se tiene que: $P\left(A/C\right) = \frac{P(A\cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{3}{7}\cdot 0.97}{\frac{3}{7}\cdot 0.79 + \frac{4}{7}\cdot 0.95} = \frac{\frac{291}{700}}{\frac{671}{700}} = \frac{291}{671} = 0.4337$

37.- *En cierta población, un 20 % de los trabajadores lo hace en la agricultura (A), un 25 % en la industria (I) y el resto en el sector de servicios (S). Un 63 % de los que trabajan en el campo son mayores de 45 años, siendo ese porcentaje del 38 % y el 44 % en los otros sectores. Seleccionado un trabajador al azar, ¿qué probabilidad hay de que tenga menos de 45 años?*

Solución:



El enunciado nos da las siguientes probabilidades:

$$P(A) = 0.2 \qquad P(I) = 0.25 \qquad P(S) = 0.55$$

Y nombramos otros sucesos que aparecen:

–45 = tener menos de 45 años

Otras probabilidades que se deducen del enunciado son:

$$P\left(-45/A\right) = 0.37 \qquad P\left(-45/I\right) = 0.62 \qquad P\left(-45/S\right) = 0.56$$

La probabilidad que nos piden es:

$$P(-45) = P(A)P\left(-45/A\right) + P(I)P\left(-45/I\right) + P(S)P\left(-45/S\right) =$$

$$= 0.2 \cdot 0.37 + 0.25 \cdot 0.62 + 0.55 \cdot 0.56 = 0.537$$

38.- *En una casa hay tres llaveros A, B y C. El primero con 5 llaves, el segundo con 7 y el tercero con 8, de las que sólo una de cada llavero abre la puerta del trastero. Se escoge al azar un llavero, y de él, una llave para intentar abrir el trastero. Se pide:*

a) ¿Cuál es la probabilidad de que se acierte con la llave?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el llavero escogido sea el tercero y la llave no abra?

c) Y si la llave escogida es la correcta, ¿cuál será la probabilidad de que pertenezca al llavero A?

Solución:

Sean los sucesos

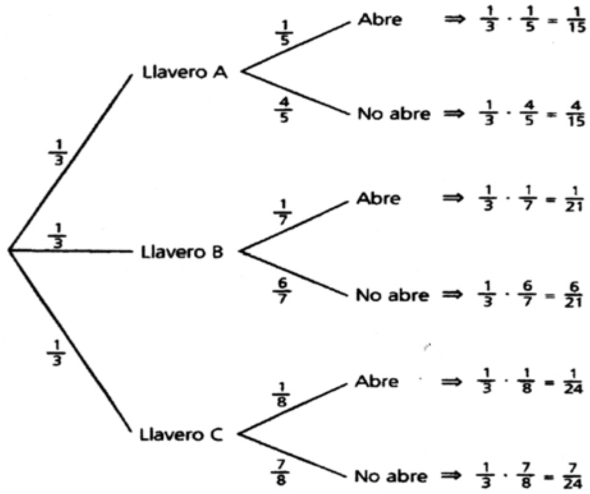
A = "seleccionar el llavero A"

B = "seleccionar el llavero B"

C = "seleccionar el llavero C"

T = "la llave seleccionada abre la puerta del trastero"

El diagrama de árbol adjunto describe el proceso de selección de llaveros y de abrir o no la puerta del trastero:



a) Se trata de una aplicación del teorema de la probabilidad total:

$$P(T) = P(A)\cdot P(T/A) + P(B)\cdot P(T/B) + P(C)\cdot P(T/C) =$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \frac{1}{24} = \frac{131}{840} = 0{,}1559$$

b) Se trata de una aplicación del teorema de la probabilidad compuesta:

$$P\left(C \cap \bar{T}\right) = P(C)\cdot P\left(\bar{T}/C\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{7}{8} = \frac{7}{24} = 0{,}2917$$

c) Se trata de una aplicación del teorema de Bayes:

$$P(A/T) = \frac{P(A)\cdot P(T/A)}{P(A)\cdot P(T/A) + P(B)\cdot P(T/B) + P(C)\cdot P(T/C)} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{131}{840}} = \frac{56}{131} = 0{,}4275$$

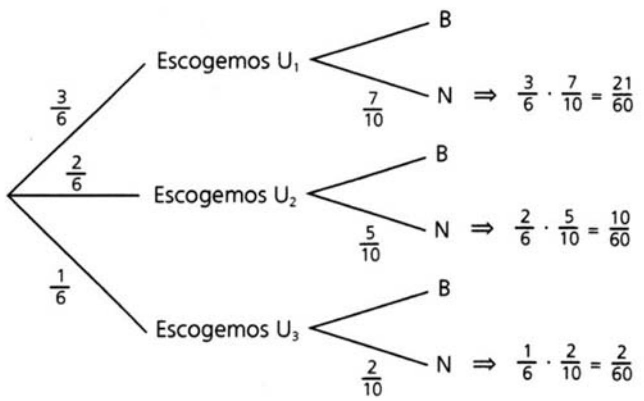
39.- *Se dispone de tres urnas con las siguientes composiciones en bolas de color blanco (B) y negras (N):*

U1 = {3B, 7N}; U2 = {5B, 5N}; U3 = {8B, 2N}

Lanzamos un dado al aire, de modo que: Si sale 1, 2 o 3, extraemos una bola de la primera urna; si sale 4 o 5 hacemos la extracción una bola de la segunda urna, y, si sale 6, hacemos la extracción de una bola de la tercera. Tras realizar una extracción se verifica que ha salido una bola de color negro. Determinar la probabilidad de que proceda de la tercera urna.

Solución:

Se trata de una aplicación del teorema de Bayes, para lo cual utilizamos el siguiente diagrama de árbol:



Sean los sucesos: N = "extraer una bola negra"

U1 = "escoger la primera urna"

U2 = "escoger la segunda urna"

U3 = "escoger la tercera urna"

La probabilidad que nos piden es:

$$P(U_3/N) = \frac{P(U_3)\cdot P(U_3/N)}{P(U_1)\cdot P(U_1/N) + P(U_2)\cdot P(U_2/N) + P(U_3)\cdot P(U_3/N)}$$

Sobre el diagrama, se tiene:

$$P(U_3/N) = \frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{10}}{\frac{3}{6}\cdot\frac{7}{10} + \frac{2}{6}\cdot\frac{5}{10} + \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{10}} = \frac{2}{21+10+2} = \frac{2}{33} = 0{,}0606$$

40.- *En una bolsa hay 4 bolas negras y 5 blancas. En otra bolsa hay 2 bolas negras y 3 blancas. Se elige al azar una bolsa y de ella extrae una bola, se pide:*

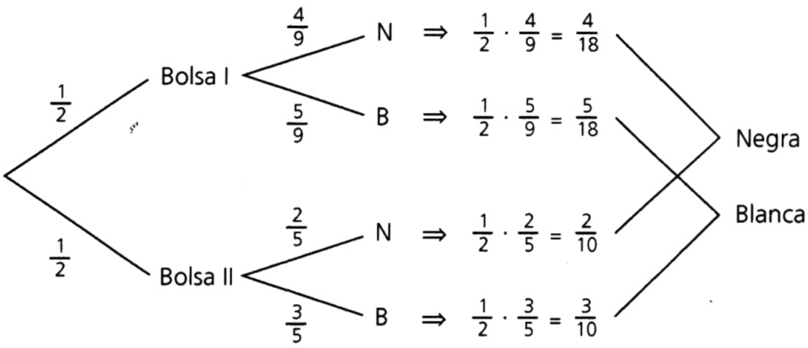
a) Si la bola extraída es de color blanco, probabilidad de que proceda de la primera urna.

b) Si la bola extraída es de color negro, probabilidad de que proceda de la segunda urna.

Solución:

Los dos apartados son una aplicación del teorema de Bayes.

Con el siguiente diagrama de árbol, podemos hacer los cálculos:



$$a)\ P(B_1 / bola\ blanca) = \frac{\frac{5}{18}}{\frac{5}{18}+\frac{3}{10}} = \frac{25}{52} = 0{,}4808$$

$$b)\ P(B_2 / bola\ negra) = \frac{\frac{2}{10}}{\frac{4}{18}+\frac{2}{10}} = \frac{9}{19} = 0{,}4737$$

41.- *Un armario tiene dos cajones. El cajón Nº1 contiene 4 monedas de oro y 2 de plata. El cajón Nº 2 contiene 3 monedas de oro y 3 de plata. Se abre un cajón al azar y se extrae una moneda. Calcular:*

a) Probabilidad de que se haya abierto el cajón Nº2 y se haya extraído una moneda de oro.

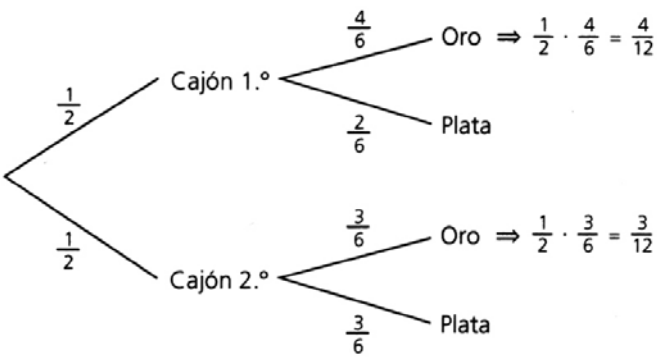
b) Probabilidad de que se haya abierto el cajón Nº1, sabiendo que al extraer una moneda, ésta es de oro.

Solución:

El apartado a) es una aplicación del teorema de la probabilidad compuesta.

El apartado b) es una aplicación del teorema de Bayes.

Construimos el siguiente diagrama de árbol:



$$a)\ P\left(\text{moneda de oro del } 2^{o} \text{ cajón}\right) = \frac{3}{12} = 0,25$$

$$b)\ P\left(\text{cajón } 1^{o}/\text{fue de oro}\right) = \frac{\frac{4}{12}}{\frac{4}{12}+\frac{3}{12}} = \frac{4}{7} = 0,714$$

42.- *Un taller tiene distribuidos los vehículos en tres naves. En la nave A hay 12 vehículos de los cuales 4 están averiados; en la nave B hay 6 vehículos y la mitad están averiados, y en la nace C de los 8 vehículos que contiene, hay 3 averiados. Si se elige una nave y un vehículo al azar, se pide:*

a) ¿Qué probabilidad hay de esté en perfectas condiciones de funcionamiento?
b) Si el vehículo está averiado, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la nave B?

Solución:
Sean los sucesos:

A = "seleccionamos la nave A para elegir un vehículo"
B = "seleccionamos la nave B para elegir un vehículo"
C = "seleccionamos la nave C para elegir un vehículo"
D = "un vehículo seleccionado se encuentra averiado"

De las condiciones del enunciado, y considerando que los sucesos A, B y C son igualmente probables, se tiene:

$$P(D/A) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3};\quad P(D/B) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2};\quad P(D/C) = \frac{3}{8}$$

$$P\left(\bar{D}/A\right) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3};\quad P\left(\bar{D}/B\right) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2};\quad P\left(\bar{D}/C\right) = \frac{5}{8}$$

a) La probabilidad de que un vehículo no esté averiado es:

$$P\left(\bar{D}\right) = P(A)\cdot P\left(\bar{D}/A\right) + P(B)\cdot P\left(\bar{D}/B\right) + P(C)\cdot P\left(\bar{D}/C\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{8} = \frac{43}{72} = 0,5972$$

b) Se trata de aplicar Bayes, para calcular la probabilidad de que un vehículo averiado, proceda de la nave B:

$$P(B/D) = \frac{P(B)\cdot P(D/B)}{P(A)\cdot P(D/A) + P(B)\cdot P(D/B) + P(C)\cdot P(D/C)} =$$

$$= \frac{P(D/B)}{P(D/A) + P(D/B) + P(D/C)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{3}{8}} = \frac{12}{29} = 0,4138$$

43.- *En una urna hay cuatro bolas blancas y dos rojas. Se lanza una moneda, si sale cara se extrae una bola de la urna y si sale cruz se extraen, sin reemplazamiento, dos bolas de la urna.*

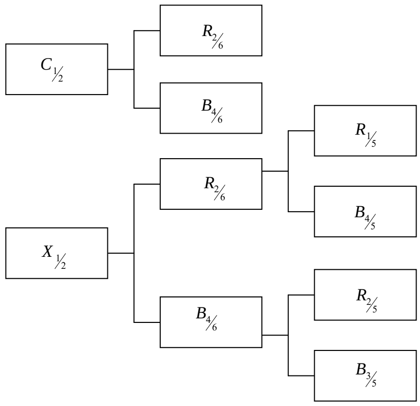
a) Calcula la probabilidad de que se hayan extraído dos bolas rojas.
b) Halla la probabilidad de que no se haya extraído ninguna bola roja.

Solución:
Nombramos los sucesos:

C = sale cara X = sale cruz

R = bola roja B = bola blanca

a) Para que se hayan obtenido dos bolas rojas ha tenido que salir cruz en la moneda y dos bolas rojas en las extracciones.



$$P(X\cap R\cap R)=P(X)P\left(R/X\right)P\left(R/X\cap R\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\frac{2}{6}\frac{1}{5}=\frac{1}{30}$$

b) Si no se ha extraído bola roja es porque ha salido cara en la moneda y blanca en la extracción, o cruz en la moneda y dos blancas en las extracciones.

$H =$ ninguna roja

$$P(H)=P(C\cap B)+P(X\cap B\cap B)=\frac{1}{2}\frac{4}{6}+\frac{1}{2}\frac{4}{6}\frac{3}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{8}{15}$$

44.- *Tenemos dos urnas (urna Nº1 y urna Nº2) y una bolsa. La urna número 1 contiene 4 bolas blancas y 8 verdes y la urna número 2 contiene 6 bolas blancas y 3 verdes. La bolsa contiene 10 bolas numeradas del 1 al 10.*

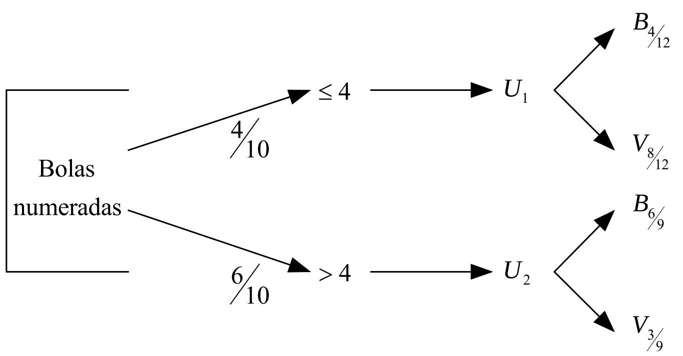
Extraemos una bola de la bolsa: si sale un número menor o igual que 4 elegimos la urna Nº1 y si sale un número mayor que 4 elegimos la urna Nº2. De la urna elegida extraemos una bola. Calcular la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) La bola extraída es verde y de la urna Nº2.

b) La bola extraída es blanca.

Solución:

Construimos en diagrama:



a) $P(V\cap U_1)=\frac{6}{10}\frac{3}{9}=\frac{1}{5}$

b) $P(B)=P(U_1\cap B)+P(U_2\cap B)=\frac{4}{10}\frac{4}{12}+\frac{6}{10}\frac{6}{9}=\frac{2}{12}+\frac{2}{5}=\frac{8}{15}$

45.- *Un test para detectar si una persona es portadora del virus de la gripe aviar da positivo en el 96 % de los pacientes que la padecen y da negativo en el 94 % de los pacientes que no la padecen. Si una de cada ciento cuarenta y cinco personas es portadora del virus y una persona se somete al test, calcula:*

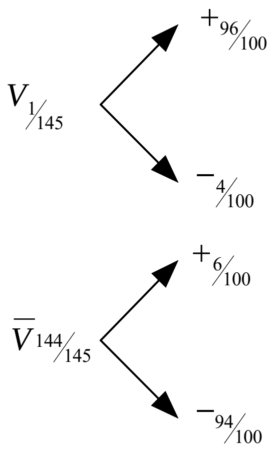
(a) La probabilidad de que el test dé positivo.

(b) La probabilidad de que sea portadora, si el resultado del test es positivo.

(c) La probabilidad de que el test sea negativo y no sea portadora del virus.

Solución:
Nombramos los sucesos y construimos un diagrama de árbol:

V = portador del virus de la gripe aviar
+ = el test es positivo
− = el test es negativo



a) $P(+) = \frac{1}{145}\frac{96}{100} + \frac{144}{145}\frac{6}{100} = \frac{48}{725} \simeq 0.07$

b) $P\left(V/_{+}\right) = \dfrac{\frac{1}{145}\cdot\frac{96}{100}}{\frac{48}{725}} = \frac{1}{10} = 0.1$

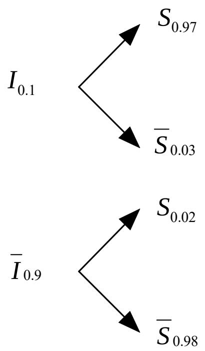
c) $P\left(-\cap\overline{V}\right) = \frac{144}{145}\cdot\frac{95}{100} = \frac{3384}{3625} \simeq 0.93$

46.- *La probabilidad de que haya un incidente en una fábrica que dispone de alarma es 0.1. La probabilidad de que suene esta si se ha producido algún incidente es 0.97 y la probabilidad de que suene si no ha sucedido ningún incidente es 0.02.*

a) Calcula la probabilidad de que no suene la alarma.
b) En el supuesto de que haya funcionado la alarma, ¿cuál es la probabilidad de que no haya habido ningún incidente?

Solución:
Nombramos los sucesos y construimos un diagrama de árbol:

I = se ha producido un incidente
S = suena la alarma



a) $P\left(\overline{S}\right) = 0.1\cdot 0.03 + 0.9\cdot 0.98 = 0.885$

b) $P\left(\overline{I}/_{S}\right) = \frac{0.9\cdot 0.02}{0.1\cdot 0.97 + 0.9\cdot 0.02} = \frac{0.018}{0.115} \simeq 0.157$

47.- *Se sabe que 3 000 de los 20 000 estudiantes matriculados en cierta universidad hacen uso del comedor universitario y acuden a sus clases en transporte público. A partir de la información proporcionada por una amplia muestra de estudiantes universitarios se ha estimado que uno de cada cuatro universitarios que utilizan el transporte público para acudir a sus clases hacen también uso del comedor universitario. Determinar, justificando la respuesta, la probabilidad de que seleccionado al azar un estudiante en esta universidad resulte ser de los que utilizan el transporte público para acudir a sus clases.*

Solución:

Nombramos los sucesos:

C = hacer uso del comedor universitario

T = acudir a las clases en transporte público

$$P(C \cap T) = \frac{3000}{20000} = \frac{3}{20}$$

$$P\left(C/_{T}\right) = \frac{1}{4}$$

$$P\left(C/_{T}\right) = \frac{P(C \cap T)}{P(T)} \Rightarrow P(T) = \frac{P(C \cap T)}{P\left(C/_{T}\right)} = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{1}{4}} = \frac{3}{5}$$

48.- *En una ciudad en la que hay doble número de hombres que, de mujeres, se declara una epidemia. Un 4 % de los habitantes que son hombres están enfermos, mientras que un 3 % son mujeres y están enfermas. Elegido un solo habitante de la ciudad, calcular:*

a) La probabilidad de que sea hombre.

b) Si es hombre, la probabilidad de que esté enfermo.

c) La probabilidad de que sea mujer o esté sano.

Solución:

Nombramos los sucesos: M = ser mujer, H = ser hombre y E = estar enfermo

a) $$\left.\begin{array}{l} P(M) = x \\ P(H) = 2x \end{array}\right\} \rightarrow x + 2x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{3} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} P(M) = \frac{1}{3} \\ P(H) = \frac{2}{3} \end{array}\right.$$

b) $$P(H \cap E) = 0.04$$
$$P\left(E/_{H}\right) = \frac{P(H \cap E)}{P(H)} = \frac{0.04}{\frac{2}{3}} = 0.06$$

c) $$P(M \cap E) = 0.03$$
$$P\left(M \cup \overline{E}\right) = P(M) + P\left(\overline{E}\right) - P\left(M \cap \overline{E}\right)$$

Para obtener las probabilidades necesarias, construimos una tabla de contingencia.

	M	H	Total
E	0.03 (dato)	0.04 (dato)	0.07
$\overline{E}$	0.3	0.63	0.93
Total	1/3 (dato)	2/3 (dato)	1

$$P\left(M \cup \overline{E}\right) = \frac{1}{3} + 0.93 - 0.3 = 0.96$$