UNIDAD 7: LÍMITES Y CONTINUIDAD

PARTE 1: LÍMITES Y ASÍNTOTAS

1. LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Diremos que $a \in \mathbb{R}$ es un punto de acumulación de D, y escribiremos $a \in D'$, cuando exista una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de D tal que $\{x_n\} \to a$ (la sucesión $\{x_n\}$ tiende a a).

Siempre que exista un intervalo abierto de centro a contenido en D se tendrá que $a \in D'$.

Definición: Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función, $a \in D'$ y $L \in \mathbb{R}$. Diremos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a $(x \to a)$ es L, y escribiremos $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, si para valores de x cada vez más próximos a (distintos de a), los valores de las imágenes $f(x)$ están cada vez más próximos a L.

Límites laterales:

El límite por la izquierda es el valor al que tiende la función $f(x)$ cuando la variable x se aproxima a a siendo menor que a. Se denota por: $\lim\limits_{x \to a-} f(x)$ o $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x)$

El límite por la derecha es el valor al que tiende la función $f(x)$ cuando la variable x se aproxima a a siendo mayor que a. Se denota por: $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$ o $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x)$

Esto da lugar a la siguiente **caracterización**:

$$\exists \lim_{x \to a} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lim\limits_{x \to a-} f(x), \ \exists \lim\limits_{x \to a+} f(x) \\ \lim\limits_{x \to a-} f(x) = \lim\limits_{x \to a+} f(x) \end{cases}$$

En cuyo caso $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a-} f(x) = \lim\limits_{x \to a+} f(x)$

2. LÍMITES INFINITOS: ASÍNTOTAS VERTICALES

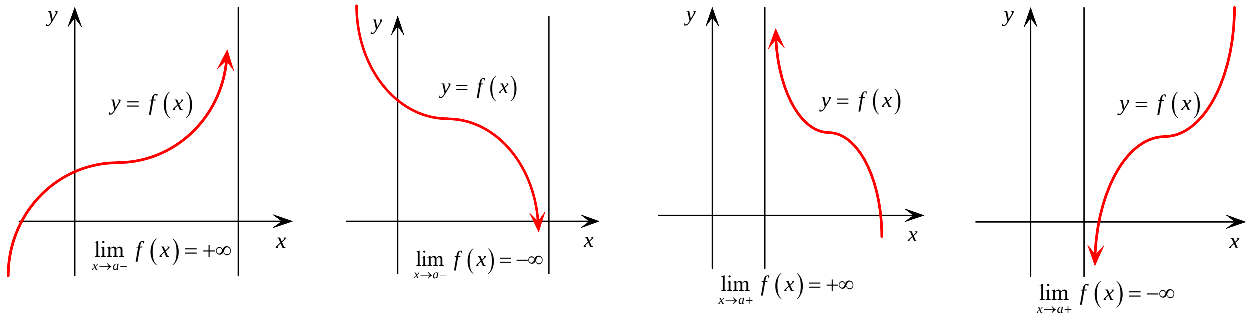
Decir que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ significa que cuando x tiende a a, con $x < a$, $f(x)$ toma valores mayores que cualquier número real k.

Análogamente, decir que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ significa que cuando x tiende a a, con $x < a$, $f(x)$ toma valores cada vez más pequeños.

Llamamos asíntotas de una función a las rectas que se aproxima la función en el infinito.

La recta $x = a$ es una <u>asíntota vertical</u> de $f(x)$ si existe alguno de los siguientes límites:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x\to a+} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x\to a-} f(x) = \pm\infty$$

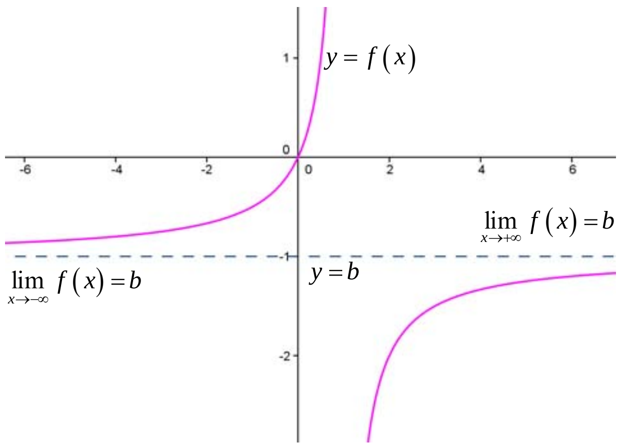


3. LÍMITES EN EL INFINITO: ASÍNTOTAS HORIZONTALES

Decir que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$ significa que cuando x se hace tan grande como queramos, la función $f(x)$ toma valores muy próximos un número fijo b.
De igual modo, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$ significa que $f(x)$ se aproxima a b cuando x se hace cada vez más pequeño.

La recta $y = k$ es una <u>asíntota horizontal</u> de $f(x)$ si existe alguno de los siguientes límites:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = k \qquad \text{o} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = k$$



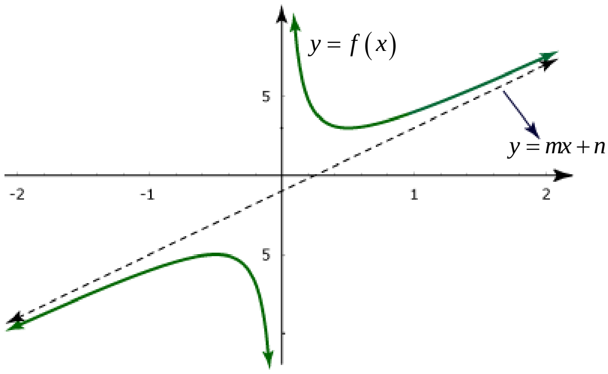
4. LÍMITES INFINITOS EN EL INFINITO: ASÍNTOTAS OBLICUAS

También puede suceder que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, lo que significa que x y $f(x)$ se hacen infinitamente grandes a la vez. Por tanto: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow f(x) > k$ para todo $x > p$, siendo k y p números arbitrariamente grandes.

La recta $y = mx + n$, $m \neq 0$, es una asíntota oblicua de $f(x)$ si existe alguno de los siguientes límites:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(f(x) - mx - n \right) = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - mx - n \right) = 0$$

en cuyo caso $m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$ y $n = \lim_{x \to \infty} \left(f(x) - mx \right)$



5. OPERACIONES CON LÍMITES DE FUNCIONES

1) $\lim_{x \to a} k = k$

2) $\lim_{x \to a} \left[f(x) + g(x) \right] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$

3) $\lim_{x \to a} \left[f(x) \cdot g(x) \right] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$

4) $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$ siempre que $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$

4) $\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = \left[\lim_{x \to a} f(x) \right]^{\lim_{x \to a} g(x)}$ siempre que $\lim_{x \to a} f(x) > 0$

5) $\lim_{x \to a} \left[\log_A f(x) \right] = \log_A \left[\lim_{x \to a} f(x) \right]$ siempre que $\lim_{x \to a} f(x) > 0$

6. REGLAS PARA EL CÁLCULO DE LÍMITES

Regla I: Para calcular el límite de una función, cuando $x \to a \in \mathbb{R}$, basta con sustituir a en la función y si nos da un número real, ya está resuelto.

Regla II: Las funciones polinómicas, cuando $x \to \pm\infty$, se comportan del mismo modo que su término de mayor grado.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \right) = \lim_{x \to \pm\infty} a_n x^n$$

Regla III: $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{a_n x^n + \ldots + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_0} = \begin{cases} \pm\infty & \text{si} \quad n > m \\ \dfrac{a_n}{b_m} & \text{si} \quad n = m \\ 0 & \text{si} \quad n < m \end{cases}$

Regla IV: Cuando al aplicar la regla I en el cálculo de límites el resultado obtenido no tiene sentido aparecen las indeterminaciones, que son expresiones como las siguientes:

Indeterminaciones	$\frac{+\infty}{+\infty}$	$\frac{+\infty}{-\infty}$	$\frac{-\infty}{+\infty}$	$\frac{-\infty}{-\infty}$
Tipo	$\frac{\infty}{\infty}$			

Indeterminaciones	$(+\infty)-(+\infty)$ $(-\infty)-(-\infty)$	$(+\infty)+(-\infty)$ $(-\infty)+(+\infty)$
Tipo	$\infty-\infty$	

Indeterminaciones	$(\pm\infty)\cdot 0$	$0\cdot(\pm\infty)$	$\frac{L}{0}$	$\frac{\pm\infty}{0}$	$\frac{0}{0}$
Tipo	$0\cdot\infty$		$\frac{K}{0}$		$\frac{0}{0}$

Indeterminaciones	0^0	$(\pm\infty)^0$	$1^{+\infty}$	$1^{-\infty}$
Tipo	0^0	∞^0	1^∞	

7. ASÍNTOTAS VERTICALES

La recta $x = a$ es una asíntota vertical de la función $f(x)$ si existe alguno de los siguientes límites

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x\to a+} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x\to a-} f(x) = \pm\infty$$

Observaciones:
(1) Una función *puede tener infinitas asíntotas verticales*.
(2) En las funciones racionales las asíntotas verticales se hallan en los valores x que anulan al denominador.
(3) La gráfica ele *la función no puede cortar a las asíntotas verticales*.

8. ASÍNTOTAS HORIZONTALES

La recta $y = k$ es una asíntota horizontal de la función $f(x)$ si existe alguno de los siguientes límites:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = k \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = k$$

Observaciones:

(1) Una función tiene <u>*como máximo dos asíntotas horizontales*</u>.
(2) La gráfica de <u>*la función puede cortar a las asíntotas horizontales*</u>.
(3) Para *funciones racionales*:

- Si en una función racional el grado del numerador es menor que el grado del denominador la recta $y = 0$ (el eje OX) es una asíntota horizontal.
- Si en una función racional el grado del numerador y el del denominador son iguales la recta $y = b$ será una asíntota horizontal (b indica el cociente entre los coeficientes líderes del numerador y del denominador).
- Si en una función racional el grado del numerador es una unidad mayor que el del denominador la función presenta una asíntota oblicua y no hay asíntotas horizontales.
- Si en una función racional el grado del numerador es dos o más unidades mayor que el del denominador hay asíntota horizontal.

9. ASÍNTOTAS OBLICUAS

La recta $y = mx + n$, $m \neq 0$, es una asíntota oblicua de la función $f(x)$ si existe alguno de los siguientes límites:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-mx-n\right)=0 \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx-n\right)=0$$

en cuyo caso $m = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ y $n = \lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)$

Observaciones:

(1) Una función puede tener <u>*como máximo dos asíntotas oblicuas*</u>.
(2) <u>*Si una función tiene asíntota oblicua no tiene asíntota horizontal y recíprocamente*</u>.
(3) La gráfica de <u>*la función puede cortar a las asíntotas oblicuas*</u> en uno o varios puntos.
(4) Si en una función racional el grado del numerador es dos o más unidades mayor que el del denominador, no hay asíntota oblicua.

10. RESOLUCIÓN DE INDETERMINACIONES

Cuando al calcular el límite de una suma, un producto, un cociente o una potencia de funciones no se pueden aplicar las propiedades de los límites, es decir, hay que hacer un estudio particular de cada caso, suele decirse que estos límites son una **<u>indeterminación</u>.**

1. INDETERMINACIÓN DEL TIPO $\left[\frac{k}{0}\right]$ CON $k \neq 0$

Se calculan los límites laterales: $\lim_{x\to a+} f(x)$, $\lim_{x\to a-} f(x)$

Si existen ambos límites y coincide su valor, entonces:

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a-} f(x)$$

Si no existe alguno de los límites laterales o no coincide su valor, entonces, no existe $\lim_{x\to a} f(x)$.

<u>Ejemplos:</u>

(1) Calcular $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\left[\frac{1}{0}\right]$$

Calculamos los límites laterales: $$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}=+\infty\\ \lim_{x\to 0-}\frac{1}{x}=-\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \nexists\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$$

(2) Calcular $\lim_{x\to 0}\frac{2x+8}{x^4+2x^2}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x+8}{x^4+2x^2}=\left[\frac{8}{0}\right]$$

Calculamos los límites laterales:

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 0+}\frac{2x+8}{x^4+2x^2}=+\infty\\ \lim_{x\to 0-}\frac{2x+8}{x^4+2x^2}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \exists\lim_{x\to 0}\frac{2x+8}{x^4+2x^2}=+\infty$$

2. INDETERMINACIÓN DEL TIPO $\left[\frac{0}{0}\right]$

a) Para funciones racionales

Se descomponen numerador y denominador en factores y se simplifica.

b) Para funciones irracionales

Si se trata de una función con raíces cuadradas en el numerador (o en el denominador), multiplicamos numerador y denominador por la expresión conjugada del numerador (o del denominador).

Ejemplos:

(1) Calcular $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^4-1}$:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^4-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^4-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{\cancel{(x-1)}(x+1)(x^2+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+x+1)}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{3}{4}$$

(2) Calcular $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$:

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 4}\frac{\left(\sqrt{x+5}-3\right)\left(\sqrt{x+5}+3\right)}{(x-4)\left(\sqrt{x+5}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{x+5-9}{(x-4)\left(\sqrt{x+5}+3\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{\cancel{x-4}}{\cancel{(x-4)}\left(\sqrt{x+5}+3\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{1}{\left(\sqrt{x+5}+3\right)}=\frac{1}{6}$$

3. INDETERMINACIÓN DEL TIPO $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

Se divide numerador y denominador por la mayor potencia de x que aparezca en la función (basta con dividir por la mayor potencia de x del denominador).

Ejemplos:

(1) Calcular $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{x^2-2x+1}{x-24}$:

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2-2x+1}{x-24}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to -\infty}\frac{\frac{x^2-2x+1}{x}}{\frac{x-24}{x}}=\lim_{x\to -\infty}\frac{\frac{x^2}{x}-\frac{2x}{x}+\frac{1}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{24}{x}}=\lim_{x\to -\infty}\frac{x-2+\frac{1}{x}}{1-\frac{24}{x}}=-\infty$$

(2) Calcular $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{\sqrt{2x^3-1}}{3x^4}$:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{2x^3-1}}{3x^4}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{\sqrt{2x^3-1}}{x^4}}{\frac{3x^4}{x^4}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{\frac{2x^3-1}{x^8}}}{3}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{\frac{2x^3}{x^8}-\frac{1}{x^8}}}{3}=$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{\frac{2}{x^5}-\frac{1}{x^8}}}{3}=\frac{0}{3}=0$$

4. INDETERMINACIÓN DEL TIPO $[\infty-\infty]$

a) La función es diferencia de dos funciones racionales
Se efectúa dicha operación.
b) La función es diferencia de funciones irracionales
Multiplicamos y dividimos por la expresión conjugada de la función.

Ejemplos:

(1) Calcular $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2-x+1}{x+1}-x\right)$:

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2-x+1}{x+1}-x\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2-x+1}{x+1}-\frac{x(x+1)}{x+1}\right)=$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2-x+1-x(x+1)}{x+1}\right)=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2-x+1-x^2-x}{x+1}\right)=\lim_{x\to +\infty}\frac{-2x+1}{x+1}=-2$$

(2) Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(8x-\sqrt{16x^2-3x}\right)$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(8x-\sqrt{16x^2-3x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(8x-\sqrt{16x^2-3x}\right)\left(8x+\sqrt{16x^2-3x}\right)}{\left(8x+\sqrt{16x^2-3x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{48x^2+3x}{8x+\sqrt{16x^2-3x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=+\infty$$

5. INDETERMINACIÓN DEL TIPO $[0\cdot\infty]$

Transformar esta indeterminación en una de las anteriores, generalmente efectuando las operaciones.

Ejemplo:

Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{3}{x^3}\cdot\frac{x^2+5x}{4}\right)$:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{x^3}\cdot\frac{x^2+5x}{4}\right)=[\infty\cdot 0]=\lim_{x\to 0}\frac{3\left(x^2+5x\right)}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2+15x}{4x^3}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(3x+15)}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{3x+15}{4x^2}=\left[\frac{15}{0}\right]=+\infty$$

6. INDETERMINACIÓN DEL TIPO $\left[1^\infty\right]$

Se resuelve empleando la siguiente igualdad:

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\left[f(x)-1\right]}$$

donde $a\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ y sabemos que $e=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

Ejemplo:

Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x^2+2}\right)^{5x}$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x^2+2}\right)^{5x}=\left[1^\infty\right]=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}5x\left(\frac{x^2}{x^2+2}-1\right)}=e^0=1$$

ya que

$$\lim_{x\to+\infty}5x\left(\frac{x^2}{x^2+2}-1\right)=\lim_{x\to+\infty}5x\left(\frac{x^2-\left(x^2+2\right)}{x^2+2}\right)=\lim_{x\to+\infty}5x\left(\frac{2}{x^2+2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{10x}{x^2+2}=0$$

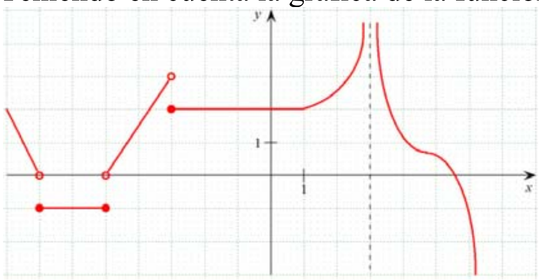
11. EJERCICIOS

Límite de una función en un punto

1. Mediante tablas calcula:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+2\right)$ b) $\lim\limits_{x\to 2}(3x-2)$ c) $\lim\limits_{x\to 1+}(3x-1)$ d) $\lim\limits_{x\to -3-}\left(9+x^2\right)$

2. Teniendo en cuenta la gráfica de la función, calcula los siguientes límites:

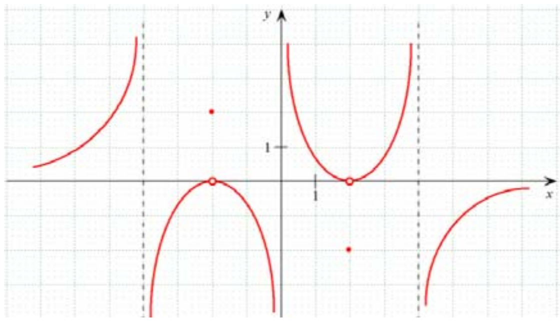


a) $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$

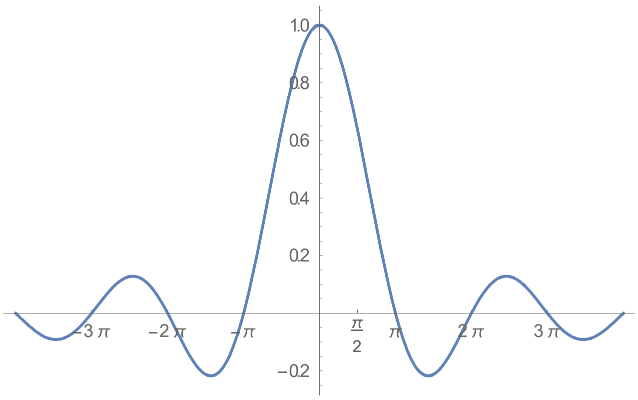
b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to 7} f(x)$

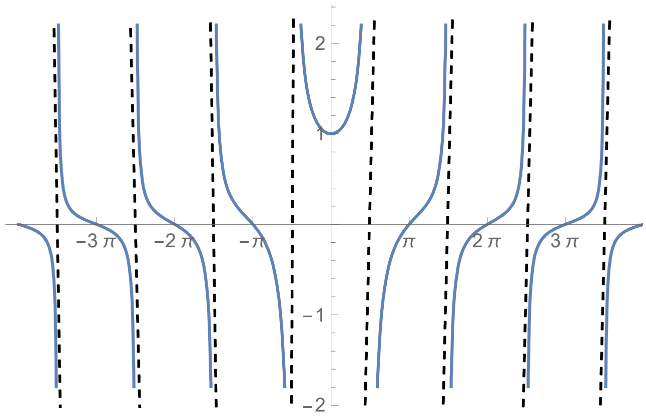
3. A partir de la gráfica de la función, comprueba que $\lim\limits_{x\to 2} f(x)\neq f(2)$:



4. Calcula $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ ý $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$, teniendo en cuenta su gráfica[1]:



$f(x)=\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$



$g(x)=\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$

Límites infinitos en un punto

5. Mediante tablas de valores, calcula:

[1] Estos dos límites son importantes y debes recordarlos.

a) $\lim\limits_{x\to -3^-} \dfrac{3}{2x+6}$ b) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{3x}{x+1}$ c) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{6}{x^2-4}$

d) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2x}{x-1}$ e) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{x^2-4}$ f) $\lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{2x}{x^2-16}$

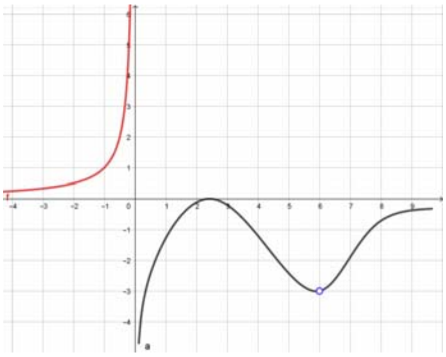
Límites en el infinito

6. Observando la gráfica calcula:

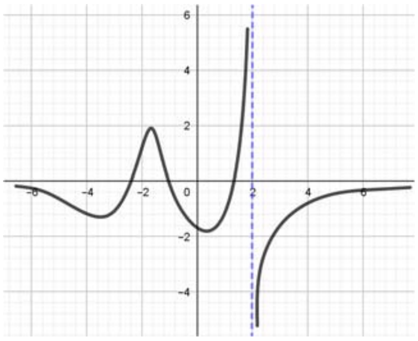
a) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$



7. Observa la función $f(x)$ que tienes a continuación, y calcula:



a) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$

d) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

8. Calcula:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+3}{3x^3-5}$ b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1-x^3}{1+x^3}$ c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x^2-5x+1}{1+x^2}$

Límites infinitos en el infinito

9. Calcula los siguientes límites mediante tablas de valores:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{20}$ b) $\lim\limits_{x\to -\infty} x^3$ c) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^6+x)$ d) $\lim\limits_{x\to -\infty} (x^3+x^2)$

Propiedades de los límites

10. Mediante las propiedades de los límites, comprueba que:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2-4x+1}{3x-1} = 0$ c) $\lim\limits_{x\to 3} (2x^2+4x-27) = 3$

b) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{4x+5}{x^2-2} = -1$ d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x^2-4x+1}{x-1}$

Cálculo de límites

11. Estudia a qué tipo de indeterminación corresponden los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x+2}$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^6+x}{x^4-3}$ c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x^3-3x}{x^2+x^3}\right)^{3x}$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x+1}{x^2-1}$ e) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\sqrt{x^3+x}\right)$ f) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\sqrt{x+3}-\left(x^2+1\right)\right]$

12.(Indeterminación del tipo $\dfrac{k}{0}$ con $k\neq 0$). Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ b) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{2x}{x^2-16}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}$ d) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{5x}{9-x^2}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x+6}{5x^2}$ f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x+8}{x^4+2x^2}$ g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-5}{x^2}$ h) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+1}{x^3+1}$

13.(Indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$). Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^4-1}$ b) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^2-1}{x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$ e) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x-6}{(x-2)^2}$ f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{x+4}-2}$

g) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{-1-x}$ h) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x+4}{x^2-4}$ i) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{9-x^2}{2-\sqrt{x^2-5}}$

14.(Indeterminación del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$). Calcula el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2-2x+1}{x-24}$ b) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sqrt{2x^3-1}}{3x^4}$ c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(1+x)^2-1}{x}$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2-6x+8}{2x^2-5}$ e) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2-1}{x^3-1}$ f) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^2-1}$

g) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x^2-7}{\sqrt[3]{x^6+x}}$ h) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1-x^6}{x^3+1}$

15.(Indeterminación del tipo $\infty-\infty$). Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x-5}\right)$ e) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^4+x}-4x^2\right)$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x^2-x+1}{x+1}-x\right)$ f) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(8x-\sqrt{16x^2-3x}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^4+1}-x^2\right)$ g) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2}-\dfrac{x^2-1}{x}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2x}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$ h) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{9x^2+3x-2}-4x\right)$

16.(Indeterminación del tipo $0\cdot\infty$). Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{x^3}\cdot\frac{x^2+5x}{4}\right)$

b) $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{2}{x}\cdot\sqrt{x^2+8}\right)$

c) $\lim_{x\to +\infty}\left[\left(\sqrt{x^4+x}-x\right)\frac{1}{x}\right]$

d) $\lim_{x\to 3}\left[\left(x^2-9\right)\cdot\frac{1}{x-3}\right]$

e) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x-2}{5}\cdot\sqrt{\frac{1}{x-2}}\right)$

f) $\lim_{x\to 4}\left(\sqrt{x^2-16}\cdot\sqrt{\frac{x}{x-4}}\right)$

g) $\lim_{x\to 2}\left(\sqrt{x^2-4}\cdot\frac{8}{3x-6}\right)$

h) $\lim_{x\to -1}\left(\frac{5}{4x+x}\cdot\frac{x+1}{7x}\right)$

17.(Indeterminación del tipo 1^∞). Calcula el valor de los siguientes límites[2]:

a) $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2}{x^2+2}\right)^{5x}$

b) $\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{6}{x}}$

c) $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{4x+3}{4x-5}\right)^{2x}$

d) $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{5x^3}{5x^3-7}\right)^{2x}$

e) $\lim_{x\to 0}(1-7x)^{\frac{4}{x}}$

f) $\lim_{x\to -\infty}\left(1-\frac{2x}{x^2-1}\right)^{-4x}$

Asíntotas

18. Averigua las asíntotas horizontales y verticales de las siguientes funciones, cuando existan:

a) $f(x)=\frac{x}{x^2}-64$

b) $f(x)=\frac{1}{x-7}$

c) $f(x)=\frac{6x+2}{4x-2}$

d) $f(x)=\frac{3}{x^3}$

e) $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-4}$

f) $f(x)=\frac{1}{x-1}$

19. Estudia las asíntotas de las siguientes funciones.

1) $f(x)=\frac{x+2}{x-1}$

2) $f(x)=\frac{x-x^2}{x+1}$

3) $f(x)=\frac{9-x^2}{x-3}$

4) $f(x)=\frac{x^2-x}{2x}$

5) $f(x)=\frac{(3-x)^2}{2x+1}$

6) $f(x)=\frac{x+2}{x^2-1}$

11) $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$

12) $f(x)=\frac{x^2+3x}{2x-1}$

13) $f(x)=\frac{x^2-3x-4}{x^2-5x+4}$

14) $f(x)=\frac{x\left(x^2-x\right)}{x^2}$

15) $f(x)=\frac{x^3}{x^2-4}$

16) $f(x)=\frac{3x^2}{x+2}$

---

[2] Recuerda que $e=\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=2,718281\ldots\in\mathbb{I}$

7) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+x+1}$

8) $f(x)=\dfrac{x^4-1}{x^2}$

9) $f(x)=\dfrac{(x+3)^2}{(x+1)^2}$

10) $f(x)=\dfrac{5x-2}{2x-7}$

17) $f(x)=\dfrac{1}{9-x^2}$

18) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{2x^2+1}$

19) $f(x)=\dfrac{x^3}{2x-5}$

20) $f(x)=\dfrac{2x^3}{x^2-4x}$

PARTE 2: CONTINUIDAD

1. CONCEPTO DE FUNCIÓN CONTINUA

Sea D un intervalo. Una función $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en el punto $\boxed{x = a \in \text{Dom}(f)}$ cuando

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \qquad (1)$$

Aclaraciones:

- Para que una función sea continua en un punto, dicho punto ha de pertenecer a su dominio de definición. En otro caso, no tiene sentido hablar de continuidad.

  No tiene sentido decir que la función $y = \dfrac{1}{x}$ no es continua en $x = 0$, por que dicho punto no pertenece a su dominio.
- Si el dominio no es un intervalo, entonces hay que exigir que $a \in D \cap D'$, siendo D' el conjunto de puntos de acumulación de D.
- La condición (1) de continuidad implica:
  - $\exists \lim_{x \to a} f(x)$
  - $f(a)$
  - Dichos valores coincidan: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Una función es continua cuando lo es en todos los puntos de su dominio de definición.

Una función es continua por la derecha en un punto si existe límite por la derecha en él y coincide con el valor que toma la función en ese punto:

$$f \text{ continua en } x = a \text{ por la derecha} \Leftrightarrow \lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$$

Una función es continua por la izquierda en un punto si existe límite por la izquierda en él y coincide con el valor que toma la función en ese punto:

$$f \text{ continua en } x = a \text{ por la izquierda} \Leftrightarrow \lim_{x \to a-} f(x) = f(a)$$

Caracterización

Una función es continua en un punto cuando es continua por la izquierda y por la derecha en ese punto:

$$f \text{ continua en } x = a \Leftrightarrow f \text{ continua por la derecha y por la izquierda en } x = a$$

Una función es continua en $[a,b]$ cuando:

(1) Sea continua en el intervalo abierto (a,b)

(2) Sea continua por la derecha en a

(3) Sea continua por la izquierda en b

2. CONTINUIDAD DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES

- Las **funciones polinómicas**, $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$, son continuas en todos los puntos.
- Las **funciones racionales**, $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, son continuas en su dominio.
- La **función exponencial**, $y=e^{f(x)}$, es continua siempre que lo sea $f(x)$.
- La **función logarítmica**, $y=\log f(x)$, es continua en todo punto x, tal que $f(x)>0$ y $f(x)$ sea continua.
- Las **funciones trigonométricas**, $y=\operatorname{sen} x$ e $y=\cos x$, son siempre continuas. La función $y=\operatorname{tg} x$ es continua en su dominio: $\mathbb{R}-\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi \text{ con } k\in\mathbb{Z}\right\}$.
- Las **funciones definidas a trozos** serán continuas si lo son en sus intervalos respectivos y en los puntos de unión. En estos puntos habrá que ver que la función esté definida y que los límites laterales existan y sean iguales.

3. CLASIFICACIÓN DE LAS DISCONTINUIDADES

El ***criterio adoptado por la UCLM en la EvAU*** es el siguiente:

Una función es discontinua en un punto cuando falla alguna de las tres condiciones de la definición de función continua en un punto.

Clasificación de las discontinuidades en a:

i) Evitable

$$\begin{cases} \nexists f(a) \text{ pero } \lim\limits_{x\to a} f(x)\in\mathbb{R} \\ \text{o} \\ \lim\limits_{x\to a} f(x)\neq f(a) \end{cases}$$, en cuyo, caso diremos que f presenta una **discontinuidad evitable.**

ii) No evitable

ii-1) **De primera especie**

$\nexists \lim\limits_{x\to a} f(x)$ ($\exists \lim\limits_{x\to a-} f(x)=L,\ \exists \lim\limits_{x\to a+} f(x)=L'$ y $L\neq L'$), en cuyo caso diremos que f presenta una **discontinuidad de salto** (finito o infinito).

Finito, si $L,L'\in\mathbb{R}$. En este caso el salto es $|L-L'|$.

$$\textbf{\textit{Infinito}}, \text{ si } \begin{cases} L = \pm\infty \\ L' \in \mathbb{R} \end{cases} \text{ o } \begin{cases} L \in \mathbb{R} \\ L' = \pm\infty \end{cases}.$$

$\nexists \lim_{x\to a} f(x)$ porque los límites laterales son infinitos y distintos o $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$. En este caso diremos que f tiene una **discontinuidad asintótica** en a.

ii-2) **De segunda especie**

Diremos que f presenta una **discontinuidad de segunda especie o esencial**, cuando al menos uno de los límites laterales no exista.

$$\text{Función} \begin{cases} \text{Continua} \\ \text{Discontinua} \begin{cases} \text{Evitable} \\ \text{No evitable} \begin{cases} \text{De primera especie} \begin{cases} \text{De salto} \begin{cases} \text{Finito} \\ \text{Infinito} \end{cases} \\ \text{Asintótica} \end{cases} \\ \text{De segunda especie} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Ejemplos:

(1) La función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} x & \text{si} & x \neq 0 \\ 1 & \text{si} & x = 0 \end{cases}$ tiene una discontinuidad evitable en $x=0$, ya que $\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1}(x^2+1) = 2 \neq -1 = f(-1)$.

El valor verdadero de f en $x=0$ es $f(0)=0$.

(2) La función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si} & x \neq -1 \\ -1 & \text{si} & x = -1 \end{cases}$ tiene una discontinuidad evitable en $x=-1$, ya que $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x = 0 \neq 1 = f(1)$.

El valor verdadero de f en $x=-1$ es $f(-1)=2$.

(3) La función «signo de x», $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} & x > 0 \\ 0 & \text{si} & x = 0 \\ -1 & \text{si} & x < 0 \end{cases}$ tiene una discontinuidad de salto finito en $x=0$, ya que $\lim_{x\to 0-} f(x) = -1 \neq 1 = \lim_{x\to 0+} f(x)$.

(4) La función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} & x > 0 \\ 0 & \text{si} & x = 0 \\ -1 & \text{si} & x < 0 \end{cases}$ tiene una discontinuidad de salto finito en $x=0$, ya que $\lim_{x\to 0-} f(x) = -1 \neq 1 = \lim_{x\to 0+} f(x)$.

(5) La función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x>0\\ 0 & \text{si} \quad x=0\\ -1 & \text{si} \quad x<0\end{cases}$ tiene una discontinuidad de salto infinito en $x=0$, ya que $\lim\limits_{x\to 0+} f\left(x\right)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to 0-} f\left(x\right)=-1$.

(6) La función $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x^2}$ tiene una discontinuidad asintótica en $x=0$, ya que

$$\lim_{x\to 0-} f\left(x\right)=+\infty=\lim_{x\to 0+} f\left(x\right)$$

(7) La función $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x}$ tiene una discontinuidad asintótica en $x=0$, ya que

$$\lim_{x\to 0-} f\left(x\right)=-\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0+} f\left(x\right)=+\infty$$

(8) La función $f\left(x\right)=\sqrt{x^2-1}$ (cuyo dominio es $\left(-\infty,-1\right]\cup\left[1,+\infty\right)$) tiene discontinuidades de segunda especie en $x=-1$ y, en $x=1$, ya que:

$$\lim_{x\to -1}\sqrt{x^2-1}\begin{cases}\lim\limits_{x\to -1-}\sqrt{x^2-1}\\ \nexists \lim\limits_{x\to -1+}\sqrt{x^2-1}\end{cases} \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 1}\sqrt{x^2-1}\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1+}\sqrt{x^2-1}\\ \nexists \lim\limits_{x\to 1-}\sqrt{x^2-1}\end{cases}$$

Un $\boxed{\text{resultado}}$ que es importante conocer y memorizar:

- Toda función continua en un intervalo de la forma $\left[a,b\right]$ tiene un máximo y un mínimo absolutos.

4. EJERCICIOS

1. La función $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2-9}$, ¿es continua en $x=-3$?

2. Representa la función $f(x)=\begin{cases} x-2 & \text{si } x\geq 3 \\ 4-x & \text{si } 1\leq x<3 \\ 2 & \text{si } x<1 \end{cases}$, y estudia su continuidad en los puntos $x=1$ y $x=3$.

3. Estudia la continuidad en $x=8$ de la siguiente función: $f(x)=\begin{cases} x+7 & \text{si } x\geq 8 \\ x-7 & \text{si } x<8 \end{cases}$

4. Estudia la continuidad de la función: $f(x)=\begin{cases} x+6 & \text{si } x\leq 0 \\ 2x+6 & \text{si } x>0 \end{cases}$

5. Calcula k para que la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2-1} & \text{si } x\neq 1 \\ k & \text{si } x=1 \end{cases}$ sea continua en $x=1$.

6. ¿Cuál debe ser el valor de k para que la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{4-(x+2)^2}{x} & \text{si } x\neq 0 \\ k & \text{si } x=0 \end{cases}$ sea continua?

7. Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\begin{cases} -x+3 & \text{si } x\leq 0 \\ 2x-4 & \text{si } x>0 \end{cases}$

b) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{|x+1|}$

8. Estudia la continuidad de las funciones:

$$f(x)=\begin{cases} 3x+1 & -2<x\leq 1 \\ x^2+4 & 1<x<2 \\ 7 & x=2 \\ 2x+4 & 2<x<5 \\ 3x-1 & 5\leq x\leq 7 \\ \dfrac{-3x+1}{x-7} & x>7 \end{cases} \qquad h(x)=\begin{cases} 4x+5 & x<0 \\ x+5 & 0\leq x<1 \\ 6x & 1\leq x<2 \\ -4x & 2<x\leq 3 \\ \dfrac{x^2-9}{-x+3} & 3<x\leq 10 \\ \dfrac{1}{x-9} & x>10 \end{cases} \qquad j(x)=\frac{x^2-4}{x^3+6x^2+8x}$$

9. Halla k para que las siguientes funciones sean continuas:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-3x^2+4}{x^3-8x^2+20x-16} & x\neq 2\\ k+1 & x=2\end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-1} & x<1 \text{ y } x\neq -1\\ k & x=\pm 1\\ \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{5-x}-2} & x>1\end{cases}$$

10.¿Cómo deberá definirse $f(1)$ para que la función $f(x)=\dfrac{5-\sqrt{24+x}}{x-1}$ $x\neq 1$, sea continua en $x=1$?

11. Estudia la continuidad de la función $f(x)=\begin{cases}x^3\text{sen}\dfrac{1}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$.

(Indicación: $\lim_{x\to 0} x^3\dfrac{1}{\text{sen } x}=0$)

12. Se considera la función $f(x)$ definida por:

$$f(x)=\begin{cases}-x & \text{si } x<0\\ 3x+b & \text{si } 0\leq x<2\\ ax^2 & \text{si } x\geq 2\end{cases}$$

Calcula los valores de a y b para que $f(x)$ sea continua en todos los puntos.

13. Dada la función

$$f(x)=\begin{cases}2x+a & \text{si} & x\leq -1\\ -x^2+2 & \text{si} & -1<x\leq 1\\ \ln x & \text{si} & x>1\end{cases}$$

Calcular a para que la función f sea continua en $x=-1$, y estudiar la continuidad en $x=1$.

14. Calcula los valores de M y N para que la función f sea continua:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^4-3x^3-11x^2+23x+6}{x^2+x-6} & \text{si } x\neq -3 \text{ y } x\neq 2\\ N & \text{si } x=-3\\ M & \text{si } x=2\end{cases}$$

15. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$

b) $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{(x-1)^2}$

d) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+3} & \text{si} \quad x\le 0\\ -x^2+14 & \text{si} \quad 0<x\le 3\\ \sqrt{x^2+16} & \text{si} \quad x>3\end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x=2\\ \dfrac{|x-2|}{x-2} & \text{si } x\ne 2\end{cases}$

16. Dada la función: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}+b & x\le -1\\ 3x^2+4 & -1<x<1\\ -x^3+8 & x\ge 1\end{cases}$ calcula el valor de b para que $f(x)$ sea continua en $x=-1$. ¿Es continua en $x=1$?

17. Estudia la continuidad de las siguientes funciones en función del parámetro k:

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-3x^2+4}{x^3-8x^2+20x-16} & \text{si} \quad x\ne 2\ ,\ x\ne 4\\ k+1 & \text{si} \quad x=2\\ -\dfrac{3}{2} & \text{si} \quad x=4\end{cases}$

b) $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4x+3}{x-1} & \text{si} \quad x\ne 1\\ k & \text{si} \quad x=1\end{cases}$

18. Calcula *a* y *b* para que sea continua la siguiente función $f(x)=\begin{cases}x^2+ax & x\le -1\\ b & -1<x<3\\ 2x+4 & x\ge 3\end{cases}$

19. Calcula *a* y *b* para que sea continua la siguiente función $f(x)=\begin{cases}2x+1 & x\le -3\\ ax+b & -3<x<5\\ x^2+2 & x\ge 5\end{cases}$

20. Estudia la continuidad de la función $f(x)=\left|1-x^2\right|$.

21. Estudia la continuidad de las siguientes funciones, clasificando sus discontinuidades:

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{si} \quad x\ne 1\\ 3 & \text{si} \quad x=1\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & \text{si} \quad x\le 1\\ x-1 & \text{si} \quad x>1\end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x<0 \\ 1 & \text{si} \quad x\geq 0 \end{cases}$

22. Estudia la continuidad de las siguientes funciones, clasificando sus discontinuidades:

a) $f(x)=\begin{cases} |x-3| & \text{si} \quad x\neq -3 \\ 2 & \text{si} \quad x=-3 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} 9-x^2 & \text{si} \quad x\leq 2 \\ 3x+2 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x-2} & \text{si} \quad x\leq 1 \\ -\dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x-4} & \text{si} \quad x<4 \\ \sqrt{x-4} & \text{si} \quad x\geq 4 \end{cases}$