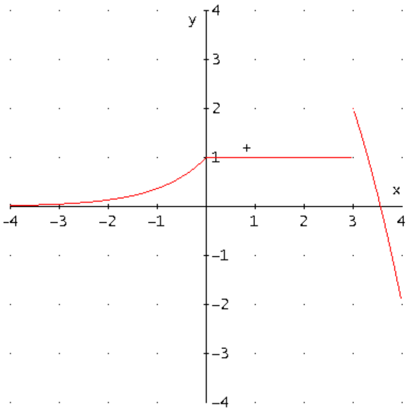
ANÁLISIS (2000-2006)

$\boxed{1.-}$ Dada $f(x)=\begin{cases} e^x & si \quad x\le 0 \\ 1 & si \quad 0<x<3 \\ -x^2+3x+2 & si \quad x\ge 3 \end{cases}$ Se pide:

1) Gráfica de $f(x)$.
2) Estudiar la continuidad y derivabilidad de $f(x)$.
3) Calcular la pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa 4.

SOL:

1) Representación gráfica.



2) Estudio de la continuidad.

Cada una de las funciones componentes son continuas en su domino de definición luego falta por ver la continuidad en los puntos de unión:

Continuidad en $x=0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0-} e^x = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0+} 1 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$$

y por tanto, la función es continua en dicho punto.

Continuidad en $x=3$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3-} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 3+} \left(-x^2+3x+2\right) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 3} f(x)$$

Esto es, la función presenta en dicho punto una discontinuidad de salto1.

Resumen: La función dada es continua en $\mathbb{R}-\{3\}$.

Estudio de la derivabilidad.

Al igual que antes, cada una de las funciones componentes son derivables en su dominio de definición. Estudiemos la derivabilidad en los puntos de unión.

Derivabilidad en $x=0$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(0-) = \lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{e^x-e^0}{x-0} = 1 \\ f'(0+) = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{1-1}{x-1} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists f'(0)$$

Esto es, la función dada no es derivable en el origen.

Derivabilidad en $x=3$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(3-)=\lim\limits_{x\to 3-}\dfrac{1-2}{x-3}=-\infty \\ f'(3+)=\lim\limits_{x\to 3+}\dfrac{\left(-x^2+3x+2\right)-2}{x-3}=-3 \end{array}\right\}\Rightarrow \nexists f'(3)$$

Es decir, la función tampoco es derivable en el punto 3.

Conclusión: La función es derivable en $\mathbb{R}-\{0,3\}$

3) La pendiente pedida es $f'(4)$ para $f(x)=-x^2+3x+2$:

$$f'(x)=-2x+3$$

$$f'(4)=-5$$

Luego la pendiente pedida vale -5.

$\boxed{2.-}$ Dada la función $f(x)$. Se pide:

1) Estudiar la continuidad y hallar a para que sea continua en $x=4$.
2) Gráfica de la misma para el valora de *a* calculado.
3) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
4) Hallar la pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en $x=3$ y en $x=5$.

$$f(x)=\begin{cases} |x+1| & si \quad x\le 1 \\ \dfrac{2}{x} & si \quad 1<x\le 4 \\ a & si \quad 4<x \end{cases}$$

SOL:

1) Cada una de las funciones componentes son continuas en su domino de definición luego falta por ver la continuidad en los puntos de unión:

Continuidad en $x=1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1-}|x+1|=2 \\ \lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{2}{x}=2 \end{array}\right\}\Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to 1} f(x)=2=f(1)$$

Por tanto, la función es continua en $x=1$.

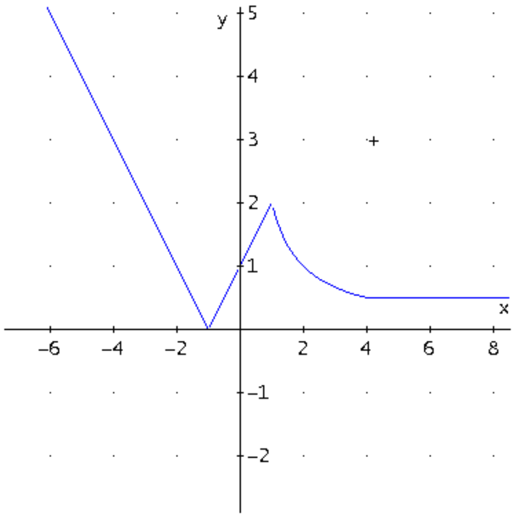
Continuidad en $x=4$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 4-}\dfrac{2}{x}=\dfrac{1}{2} \\ \lim\limits_{x\to 4+} a=a \end{array}\right\}\Rightarrow a=\frac{1}{2} \text{ para que } \exists \lim_{x\to 4} f(x) \text{ y para que además } \lim_{x\to 4} f(x)=f(4)$$

Conclusión: $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, si $a=\dfrac{1}{2}$. Para cualquier otro valor de a, la función es continua en $\mathbb{R}-\{4\}$.

2) Representación gráfica.

$$f(x)=\begin{cases} -(x+1) & \text{si } x<-1 \\ x+1 & \text{si } -1\le x\le 1 \\ \dfrac{2}{x} & \text{si } 1<x\le 4 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x>4 \end{cases}$$



3) Monotonía (signo de f'):

$$f(x) \text{ es } \begin{cases} \text{creciente en } (-1,1) \\ \text{decreciente en } (-\infty,1)\cup(1,4) \\ \text{constante en } (4,+\infty) \end{cases}$$

Lo que concuerda con el signo de la derivada primera: $f'(x)=\begin{cases} -1 & \text{si } x<-1 \\ 1 & \text{si } -1<x<1 \\ -\dfrac{2}{x^2} & \text{si } 1<x<4 \\ 0 & \text{si } x>4 \end{cases}$

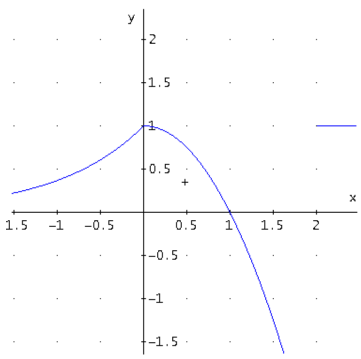
$\boxed{3.}$ Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases} e^x & si \quad x\le 0 \\ -x^2+1 & si \quad 0<x\le 2 \\ 1 & si \quad x>2 \end{cases}$$

i) Representar gráficamente $f(x)$.
ii) Estudiar su continuidad.
iii) Estudiar crecimiento y decrecimiento.
iv) Determinar la pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en $x=1$.

SOL:

1) Representación gráfica.



2) A la vista de la representación gráfica se observa que la función es continua en $\mathbb{R}-\{2\}$.

Estudio analítico de la continuidad:

Continuidad en $x=0$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0-} e^x = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0+}\left(-x^2+1\right)=1\end{array}\right\} \Rightarrow \exists \lim_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$$

Esto es, la función es continua en dicho punto.

Continuidad en $x=2$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2-}\left(-x^2+1\right)=-3 \\ \lim\limits_{x\to 2+} 1 = 1\end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 2} f(x)$$

Es decir, la función presenta una discontinuidad de salto 4 en dicho punto.

Conclusión: Como cada una de las funciones componentes son continuas en su dominio de definición y tendiendo en cuenta lo anterior, la función es continua en $\mathbb{R}-\{2\}$.

3) Crecimiento y decrecimiento.

Teniendo en cuenta la representación gráfica, $f(x)$ es $\begin{cases}\text{creciente en } (-\infty,0) \\ \text{decreciente en } (0,2) \\ \text{constante en } (2,+\infty)\end{cases}$

Lo que concuerda con el signo de la derivada primera:

$$f'(x)=\begin{cases} e^x & \text{si } x<0 \\ -2x & \text{si } 0<x<2 \\ 0 & \text{si } x>2\end{cases}$$

4) La pendiente pedida corresponde a $f'(1)$ para $f(x)=-x^2+1$:

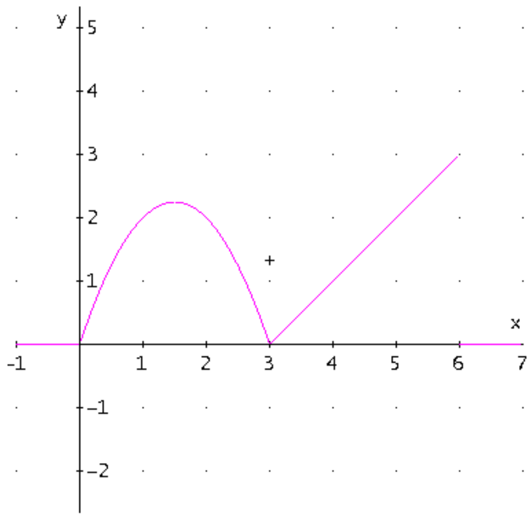
$$f'(x)=-2x \to f'(1)=-2$$

Así, la pendiente pedida vale – 2.

$\boxed{4.}$ Dada la función $f(x)=\begin{cases} 0 & si & x<0 \\ 3x-x^2 & si & 0\le x<3 \\ x-3 & si & 3\le x<6 \\ 0 & si & x\ge 6\end{cases}$

i) Representarla gráficamente.
ii) Estudiar su continuidad.
iii) Hallar el área limitada por $f(x)$ y OX.

SOL:



2) Cada una de las funciones componente son continuas en su dominio de definición, luego falta por estudiar la continuidad en los puntos de unión.

Continuidad en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0-} 0 = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0+} \left(3x - x^2\right) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$$

Por tanto, la función es continua en el origen.

Continuidad en $x = 3$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3-} \left(3x - x^2\right) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 3+} (x-3) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \lim_{x\to 3} f(x) = 0 = f(3)$$

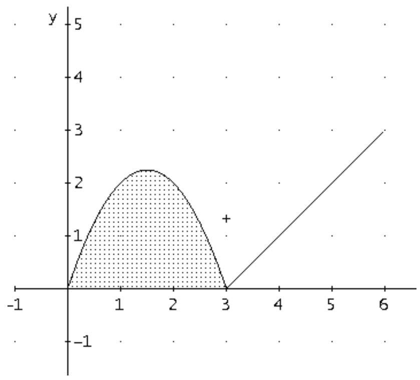
Así, la función es continua en el punto de abscisa 3.

Continuidad en $x = 6$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 6-} (x-3) = 3 \\ \lim\limits_{x\to 6+} 0 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 6} f(x)$$

Esto es, la función no es continua en 6.

Conclusión: La función dada es continua en $\mathbb{R} - \{6\}$.



3) Área pedida:

$$A = \int_0^3 \left(3x - x^2\right) dx = \left.\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right|_0^3 =$$

$$= \frac{9}{2} - 0 = \boxed{\frac{9}{2}\ \mathrm{u}^2}$$

$\boxed{5.}$ Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases} e^x & si \quad x\le 0 \\ 1-x^2 & si \quad 0<x\le 1 \\ x & si \quad x>1 \end{cases}$$

Se pide:

i) Representarla gráficamente.

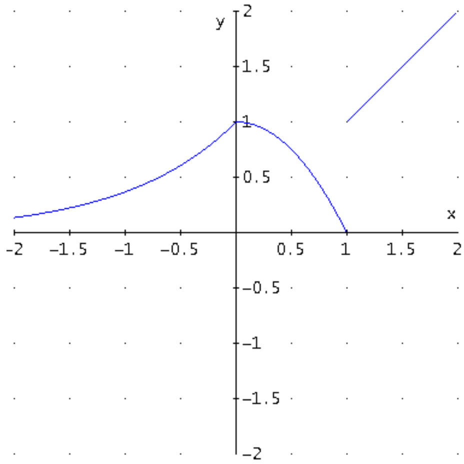
ii) Estudiar su continuidad.

iii) Hallar la ecuación de su recta tangente en $x=\dfrac{1}{2}$.

iv) Hallar el área limitada por $f(x)$ y las abscisas $x=-2$ y $x=0$.

SOL:

1) Representación gráfica.



2) Cada una de las funciones componentes es continua en su dominio de definición. Falta estudiar la continuidad en los puntos de unión.

Continuidad en $x=0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0-} e^x = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0+}\left(1-x^2\right)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \lim_{x\to 0} f(x)=1=f(0)$$

Esto es, la función es continua en el origen.

Continuidad en $x=1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1-}\left(1-x^2\right)=0 \\ \lim\limits_{x\to 1+} x = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 1} f(x)$$

Es decir, la función presenta una discontinuidad de salto 1 en el punto $x=1$.

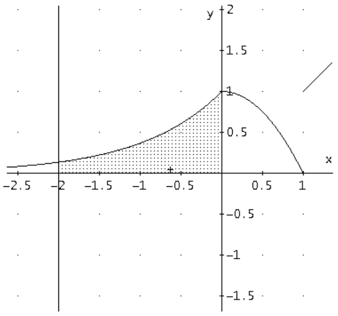
Conclusión: La función dada es continua en $\mathbb{R}-\{1\}$.

3) La pendiente a la función en el punto de abscisas ½ es $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)$:

$$f'(x) = -2x \to f'\left(\frac{1}{2}\right) = -1$$

La pendiente pedida vale – 1.

4) Área.



$$A = \int_{-2}^{0} e^x dx = e^x\Big|_{-2}^{0} = 1 - e^{-2} =$$

$$= 1 - \frac{1}{e^2} = \frac{e^2 - 1}{e^2} \text{ u}^2$$

$\boxed{6.}$ Dada la función $f(x)$:

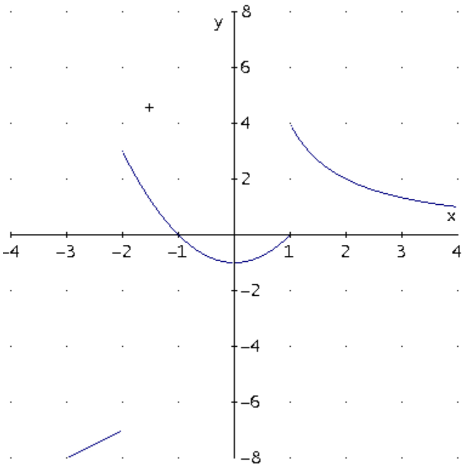
$$f(x) = \begin{cases} x - 5 & si \quad x < -2 \\ x^2 - 1 & si \quad -2 \le x \le 1 \\ \dfrac{4}{x} & si \quad x > 1 \end{cases}$$

Se pide:

i) Representarla gráficamente.
ii) Estudiar su continuidad.
iii) Hallar el valor de la pendiente en $x = 2$.
iv) Hallar el área limitada por $f(x)$ y el eje OX.

SOL:

1) Representación gráfica.



2) Continuidad.

Estudiamos la continuidad en los puntos de unión.

Continuidad en $x = -2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2-} (x - 5) = -7 \\ \lim\limits_{x \to -2+} (x^2 - 1) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \to -2} f(x)$$

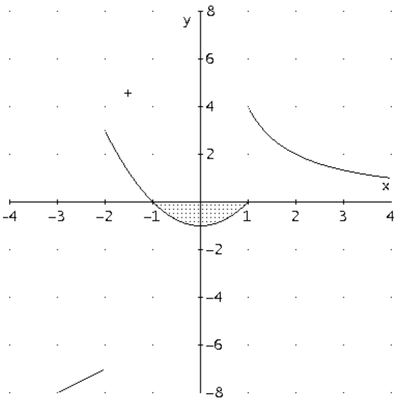
La función presenta una discontinuidad de salto 10 en dicho punto.

Continuidad en $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1-}\left(x^2-1\right)=0 \\ \lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{4}{x}=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 1} f(x)$$

Por tanto, la función presenta en el punto 1 una discontinuidad de salto 4.

Resumen: La función dada es continua en $\mathbb{R}-\{-2,1\}$.



3) La pendiente pedida es igual $f'(2)$ donde $f(x)=\dfrac{4}{x}$:

$$f'(x) = -\frac{4}{x^2} \to f'(2) = -2$$

La pendiente vale – 2.

4) Área limitada por la función y el eje de abscisas.

$$A = -\int_{-1}^{1}\left(x^2-1\right)dx = \int_{1}^{-1}\left(x^2-1\right)dx = \left.\frac{x^3}{3}-x\right|_{1}^{-1} =$$

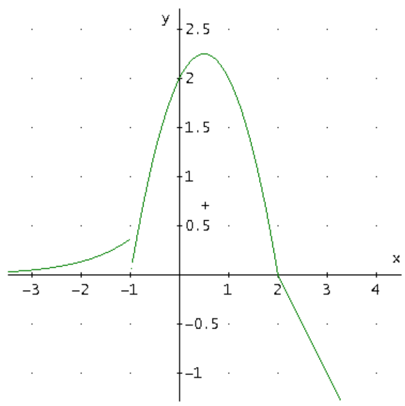
$$= \frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}\ \mathrm{u}^2$$

$\boxed{7.}$ Dada la función $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} e^x & si \quad x \le -1 \\ \left|x^2 - x - 2\right| & si \quad -1 < x \le 2 \\ -x+2 & si \quad x > 2 \end{cases}$$

Se pide:

a) Representarla gráficamente.
b) Estudiar su continuidad.
c) Estudiar crecimiento y decrecimiento.
d) Hallar el área limitada por $f(x)$ y las abscisas $x=-1$ y $x=2$.



SOL:

1) Representación gráfica.

2) Continuidad.

Estudiamos la continuidad en los puntos de unión.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1-} e^x = \dfrac{1}{e} \\ \lim\limits_{x\to -1+}\left|x^2-x-2\right| = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to -1} f(x)$$

La función presenta una discontinuidad de salto 1/e en el punto – 1.

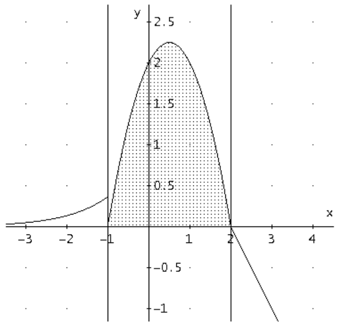
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2-}\left|x^2-x-2\right|=0\\ \lim\limits_{x\to 2+}\left(-x+2\right)=0\end{array}\right\}\Rightarrow \exists \lim_{x\to 2} f\left(x\right)=0=f\left(2\right)$$

Conclusión: La función dada es continua en $\mathbb{R}-\left\{-1\right\}$.

3) Monotonía de la función.

A la vista de la gráfica se tiene que $f\left(x\right)$ es $\begin{cases}\text{creciente en } \left(-\infty,-1\right)\cup\left(-1,\dfrac{1}{2}\right)\\ \text{decreciente en } \left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)\end{cases}$

4) Área



$$A=\int_{-1}^{2}\left|x^2-x-2\right|dx=\int_{-1}^{2}\left(-x^2+x+2\right)dx=$$

$$=-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\Big|_{-1}^{2}=\frac{10}{3}-\left(-\frac{7}{6}\right)=$$

$$=\frac{9}{2}\ \text{u}^2$$

$\boxed{8.}$ Dada la función $f\left(x\right)$:

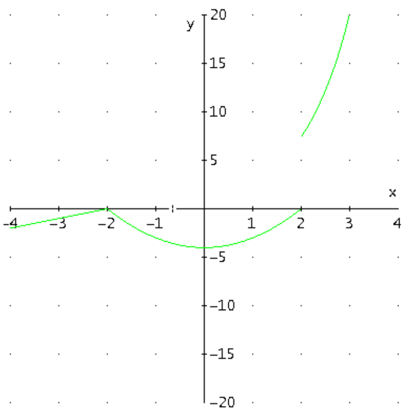
$$f(x)=\begin{cases}x+2 & si \quad x<-2\\ x^2-4 & si \quad -2\le x\le 2\\ e^x & si \quad x>2\end{cases}$$

Se pide:

i) Representarla gráficamente.
ii) Estudiar su continuidad.
iii) Hallar la ecuación de la pendiente en $x=-1$.
iv) Hallar el área limitada por $f\left(x\right)$ y el eje OX.

SOL:

1) Representación gráfica



2) Continuidad
Estudiamos la continuidad en los puntos de unión.
Continuidad en $x=-2$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -2-}(x+2)=0\\ \lim\limits_{x\to -2+}(x^2-4)=0\end{array}\right\}\Rightarrow \exists \lim_{x\to -2} f(x)=0=f(-2)$$

Por tanto, la función es continua en dicho punto.

Continuidad en $x=2$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2-}(x^2-4)=0\\ \lim\limits_{x\to 2+}e^x=e^2\end{array}\right\}\Rightarrow \nexists \lim_{x\to 2} f(x)$$

Es decir, la función presenta en el punto 2 una discontinuidad de salto e^2.

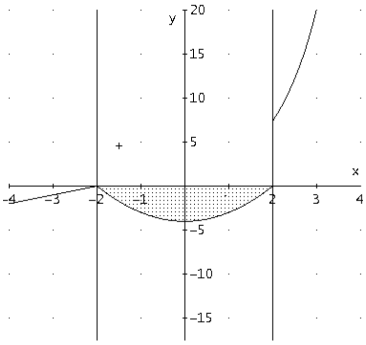
Conclusión: La función dada es continua en $\mathbb{R}-\{2\}$.

3) La pendiente pedida es igual a $f'(-1)$ donde $f(x)=x^2-4$.

$f'(x)=2x \to f'(-1)=-2$

La pendiente pedida vale – 2.

4) Área limitada por la función y el eje de abscisas.



$$A=-\int_{-2}^{2}(x^2-4)\,dx=-\left(\frac{x^3}{3}-4x\right)\Bigg|_{-2}^{2}=\frac{16}{3}-\left(-\frac{16}{3}\right)=$$

$$=\frac{32}{3}\ \mathrm{u}^2$$

$\boxed{9.}$ Dada la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & si \quad x<\dfrac{-1}{2}\\ -x^2+3x & si \quad \dfrac{-1}{2}\le x\le 3\\ |x+3| & si \quad x>3\end{cases}$. Se pide:

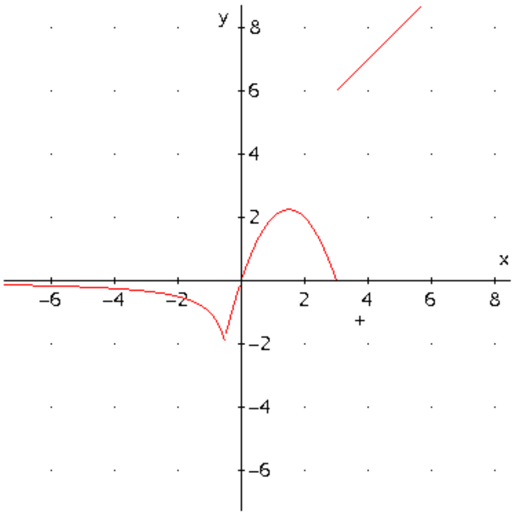
i) Gráfica de $f(x)$

ii) Estudiar la continuidad de $f(x)$.

iii) Hallar el área limitada por $f(x)$, el eje OX, y las rectas $x=0$ y $x=3$.

SOL:

1) Representación gráfica.



2) Continuidad en los puntos de unión.

Continuidad en $x = -\frac{1}{2}$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}^-} \frac{1}{x} = -2 \\ \lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}^+} \left(-x^2 + 3x\right) = -\frac{7}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}} f(x)$$

La función presenta una discontinuidad de salto ¼.

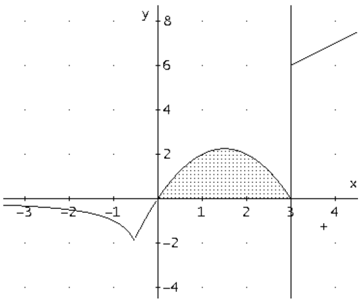
Continuidad en $x = 3$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} \left(-x^2 + 3x\right) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} |x+3| = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x \to 3} f(x)$$

La función presenta una discontinuidad de salto 6 en dicho punto.

Resumen: La función es continua en $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}, 3\right\}$.

3) Área encerrada por la gráfica de la función el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 3$.



$$A = \int_0^3 \left(-x^2 + 3x\right) dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\Bigg|_0^3 =$$

$$= \frac{9}{2} \text{ u}^2$$

$\boxed{10.}$ Se considera la función $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 1$. Se pide:

a) Pendiente de la recta tangente a la grafica de la función en el punto de abscisa $x = -1$.

b) Escribe los intervalos en donde la función es creciente y en donde sea decreciente

c) Determina los valores de x en los que la función alcanza máximos y mínimos relativos.

d) Valor mínimo que toma la función en el intervalo [- 1, 2].

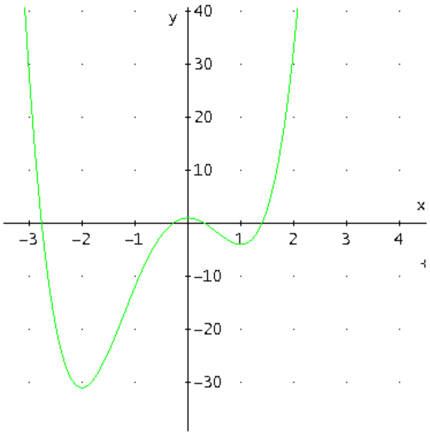
SOL:

1) La pendiente pedida es igual a $f'(-1)$.

$$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 24x \rightarrow f'(-1) = 24$$

La pendiente pedida vale – 24.

2) Monotonía de la función.



Estudiemos el signo de la derivada primera:

$$f' \text{ es } \begin{cases} <0 & \text{en } (-\infty,-2) \\ >0 & \text{en } (-2,0) \\ <0 & \text{en } (0,1) \\ >0 & \text{en } (1,+\infty) \end{cases}$$

Por tanto, la función es:

$$\begin{cases} \text{creciente en } (-2,0)\cup(1,+\infty) \\ \text{decreciente en } (-\infty,-2)\cup(0,1) \end{cases}$$

3) Vamos a calcular los puntos críticos y a evaluar la derivada segunda en ellos.

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\begin{cases} -2 \\ 0 \\ 1 \end{cases}$$

$$f''(x)=36x^2+24x-24$$

$f''(-2)=72>0 \to x=-2$ es un mín. rel.

$f''(0)=-24<0 \to x=0$ es un máx. rel.

$f''(1)=36>0 \to x=1$ es un mínimo relativo

4) Valor mínimo en el intervalo [- 1, 2].

Como la función es creciente en el intervalo $(-2,0)$, hay que ver si $f(-1)>f(1)$ que es donde la función tiene el otro mínimo.

$$f(-1)=-12$$

Luego ese es el valor mínimo de la función en el intervalo dado.

$\boxed{11.}$ **[Junio de 2000] A)** Dada la función $f(x)=2x^3+3x^2-12x+4$. Se pide:

(1) Pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función *f* en el punto de abscisa $x=2$.

(2) Escribir los intervalos en donde la función *f* sea creciente y en donde sea decreciente.

(3) Determinar los valores de *x* en los que la función *f* alcanza un máximo relativo y un mínimo relativo, respectivamente. ¿Cuánto vale la función *f* en esos puntos?

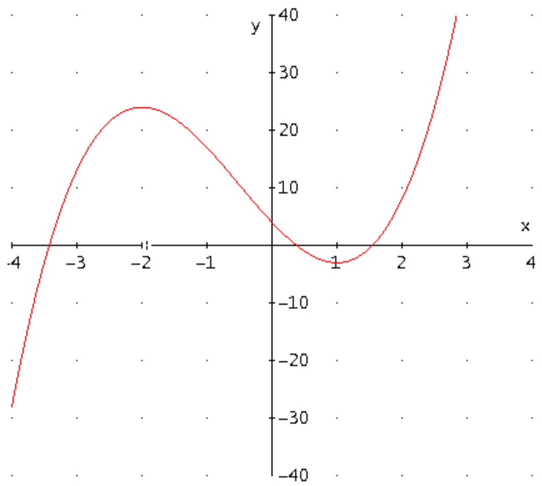
SOL: (1) La pendiente de la recta tangente a f en $x=2$ es $f'(2)$:

Derivamos: $f'(x)=6x^2+6x-12$

Evaluamos en 2: $f'(2)=6\cdot 2^2+6\cdot 2-12=24$ (esta es la pendiente pedida)

(2) Para determinar los intervalos de monotonía, estudiamos el signo de f':

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 6x^2+6x-12=0 \Leftrightarrow x=\begin{cases}-2\\1\end{cases}$$



En $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$ la función es creciente

En $(-2,1)$ la función es decreciente

Calculamos f'':

$$f''(x)=12x+6$$

$f''(-2)<0 \Rightarrow$ en $x=-2$ hay un máximo rel.

$f''(1)>0 \Rightarrow$ en $x=1$ hay un mínimo rel.

En dichos puntos la función vale:

$f(-2)=24$

$f(1)=-3$

$\boxed{12.}$ **[Junio de 2000] B)** Dada la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{x} & \text{si} \quad x<-3/2\\ 2x+1 & \text{si} \quad -3/2\le x<0\\ x^2+1 & \text{si} \quad x\ge 0\end{cases}$.

Se pide: **(a)** Estudiar la continuidad de *f*; **(b)** Representación gráfica de *f*; **(c)** área del recinto limitado por la gráfica de *f*, el eje OX y la recta $x = 3$.

SOL:

Cada una de las funciones componentes son continuas en todo su dominio de definición. Estudiemos la continuidad en los puntos de unión:

Continuidad en $x=-\dfrac{3}{2}$:

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to-\frac{3}{2}-}\frac{3}{x}=-2\\ \displaystyle\lim_{x\to-\frac{3}{2}+}(2x+1)=-2\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to-\frac{3}{2}} f(x)=-2=f\left(-\frac{3}{2}\right)$$

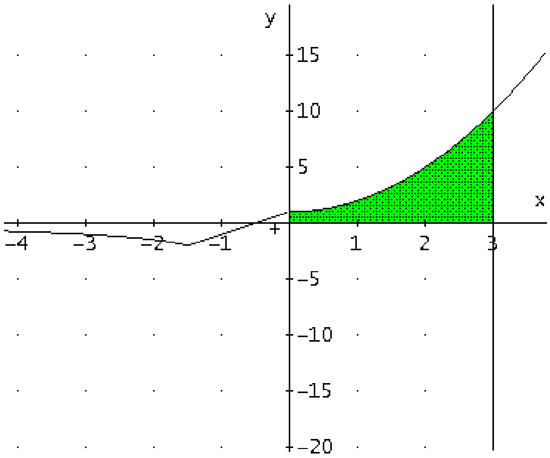
Por tanto, la función es continua en $x=-\dfrac{3}{2}$.

Continuidad en $x=0$:

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to0-}(2x+1)=1\\ \displaystyle\lim_{x\to0+}(x^2+1)=1\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to0} f(x)=1=f(0)$$

Es decir, la función es continua en $x=0$.

La representación gráfica del recinto al que hay que calcularle el área es:



Calculamos los límites de integración. Uno es $x = 0$ (ya que el área está limitada por el eje OY) y el otro es $x = 3$ (recta dada). Por tanto, el área pedida vendrá dada por la siguiente integral:

$$A = \int_0^3 \left(x^2 + 1\right) dx = \left. \frac{x^3}{3} + x \right]_0^3 = \frac{3^3}{3} + 3 - \left(\frac{0^3}{3} - 0\right) = 12$$

Así, el área buscada es de 12 u^2.

$\boxed{13.}$ **[Septiembre de 2000] A)** El consumo de agua en un colegio viene dado por la función:

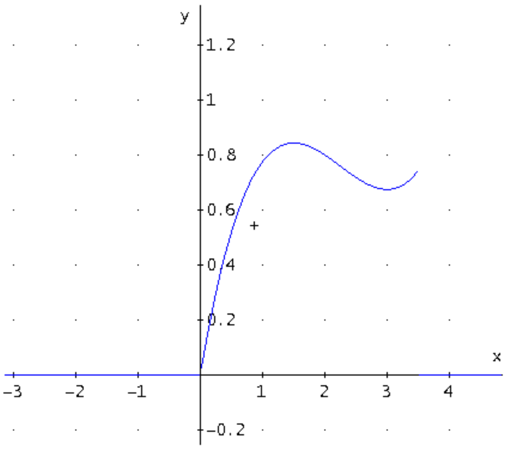
$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \quad t < 0 \\ 0{,}1t^3 - 0{,}675t^2 + 1{,}35t & \text{si } \; 0 \le t \le 3{,}5 \\ 0 & \text{si } \quad t > 3{,}5 \end{cases}$$

en donde "*t*" es el tiempo en horas a contar desde la apertura del colegio y *f(t)* es el consumo en m^3. Se supone que la jornada escolar comienza a las 10 horas y finaliza a las 13,5 horas. Se pide:

(1) ¿Cuándo el consumo de agua es creciente? ¿Cuándo el consumo es decreciente?

(2) ¿En qué momento el consumo es máximo y en qué momento es mínimo?

SOL:



Calculamos $f'(t)$:

$$f'(t) = 0.3t^2 - 1.35t + 1.35$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \begin{cases} \frac{3}{2} \\ 3 \end{cases}$$

Signo de f':

$$\begin{cases} \text{En } \left(0, \frac{3}{2}\right) \text{ la función es creciente} \\ \text{En } \left(\frac{3}{2}, 3.5\right) \text{ la función es decreciente} \end{cases}$$

Calculamos f'':

$f''(t) = 0.6t - 1.35$

$f''\left(\frac{3}{2}\right) < 0 \Rightarrow t = \frac{3}{2}$ es un máximo relativo

$f''(3) > 0 \Rightarrow t = 3$ es un mínimo relativo

Por tanto, el máximo consumo de agua se produce a la hora y media de abrir el colegio, es decir, a las 11:30 h, y dicho consumo es de 0.84675 m^3. Por otra parte, el mínimo consumo se produce a las tres horas de haber abierto el colegio, es decir, a las 13:30 h, y dicho consumo es de 0.675 m^3. Por otra parte, a la hora de cierre del colegio hay otro máximo, y el consumo a esa hora (las 13,5 h) 0.74375 m^3.

$\boxed{14.}$ **[Septiembre de 2000] B)** Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < -3 \\ |x+1| & \text{si } -3 \le x < 0 \\ 2x^2 - 4x + 3 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}.$$

Se pide: **(1)** Estudiar la continuidad de la función. **(2)** Representación gráfica de f. **(3)** Calcular el área de la región del plano limitada por la gráfica de f, el eje OX, el eje OY y la recta $x = 3$.

SOL:

Estudiamos la continuidad en los puntos de unión, ya que en los demás puntos la función es continua, por serlo las funciones componentes.

Continuidad en $x = -3$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -3-} 2 = 2 \\ \lim\limits_{x \to -3+} |x+1| = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to -3} f(x) = 2 = f(-3)$$

Por tanto, la función es continua en $x = -3$.

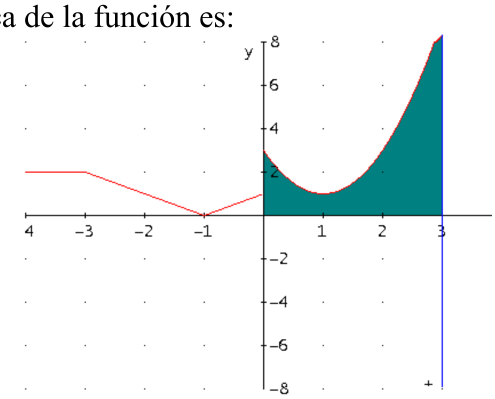
Continuidad en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0-} |x+1| = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0+} \left(2x^2 - 4x + 3\right) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \to 0} f(x)$$

Por tanto, la función presenta una discontinuidad de salto en $x = 0$.

Conclusión: $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

La representación gráfica de la función es:

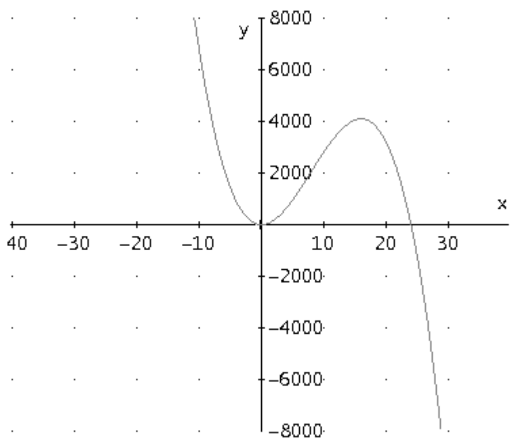


Vamos a calcular el área pedida:
Los límites de integración son $x = 0$ (ya que el área pedida está limitada por el eje OY) y $x = 3$ (recta dada), y por tanto, el área pedida vale:

$$A = \int_0^3 \left(2x^2 - 4x + 3\right)dx = 2\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + 3x\Big]_0^3 = 2\frac{3^3}{3} - 4\frac{3^2}{2} + 3\cdot 3 = 18 - 18 + 9 = 9 \text{ u}^2$$

$\boxed{15.}$ **[Reserva 1 de 2000] A)** Tras la aparición de una cierta enfermedad infecciosa, el número de afectados viene dado por la función $p(t) = 48t^2 - 2t^3$, siendo *t* el número de días desde que se detectó el primer caso. Se pide: ¿Cuántos días transcurrirán hasta que la enfermedad deje de propagarse? ¿Cuándo aumenta el número de personas afectadas? ¿Cuándo disminuye? ¿Cuándo se detecta el número máximo de personas afectadas? ¿Cuántas son las personas afectadas en ese momento?

SOL:
Aunque no se pide, hacemos una representación gráfica de la función:



$$p(t) = 0 \Leftrightarrow 2t^2(24 - t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 24 \end{cases}$$

Tienen que transcurrir 24 días para que la enfermedad deje de propagarse.

Calculamos $p'(t)$:

$$p'(t) = 96t - 6t^2$$

$$p'(t) = 0 \Leftrightarrow 6t(16 - t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 16 \end{cases}$$

$$\text{Signo de } p': \begin{cases} (0,16) \text{ la función es creciente} \\ (16,24) \text{ la función es decreciente} \end{cases}$$

Calculamos p'':

$$p''(t) = 96 - 12t$$

$$p''(16) = -96 < 0 \Rightarrow (16,4096) \text{ es un máximo}$$

Por tanto, el número máximo de afectados se detecta 16 días después del comienzo de la infección, y en ese día hay 4 096 personas afectadas.

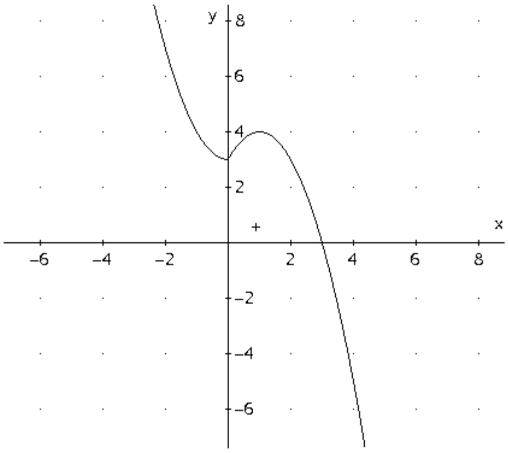
$\boxed{16.}$ **[Reserva 1 de 2000] B)** Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + a & \text{si } x \le 0 \\ -x^2 + (a-1)x + 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Se pide: **(1)** Determinar el valor de *a* para que f sea continua en *x* = 0. **(2)** Para el valor de *a* calculado en el apartado anterior, dibujar la gráfica de la función. **(3)** Calcular el área del recinto plano limitado por la gráfica de la función f, el eje OX y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

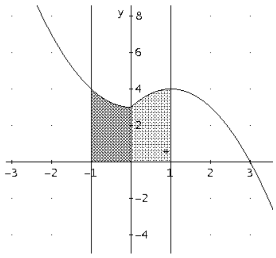
SOL:
Para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$, $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0-}\left(x^2+a\right)=a \\ \lim\limits_{x\to 0+}\left(-x^2+(a-1)x+3\right)=3\end{array}\right\}\Rightarrow a=3$$

Gráfica de $y=f(x)$:



Área:

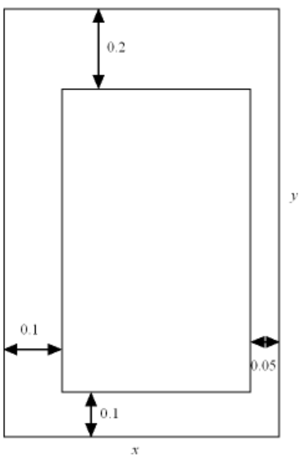


$$A=\int_{-1}^{0}\left(x^2+3\right)dx+\int_{0}^{1}\left(-x^2+2x+3\right)dx=$$

$$=\left.\frac{x^3}{3}+3x\right|_{-1}^{0}+\left.\frac{-x^3}{3}+x^2+3x\right|_{0}^{1}=\frac{21}{3}\ \mathrm{u}^2$$

$\boxed{17.}$ **[Reserva 2 de 2000] A)** Se dispone de un papel rectangular de 2 metros cuadrados de superficie para diseñar un cartel publicitario. Los márgenes del cartel han de ser: 0,2 metros el superior, 0,1 metro el inferior, 0,1 metro el izquierdo y 0,05 metros el derecho. Calcular las dimensiones que debe tener el papel para que la parte que se ha de imprimir sea máxima. ¿Qué superficie tendría la parte impresa?

SOL:



Vamos a obtener la función a maximizar:

$$\left.\begin{array}{l}xy=2\rightarrow y=\dfrac{2}{x} \\ s=xy-2\cdot 0.05y-2\cdot 0.2\left(x-0.1-0.05\right)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow s(x)=x\frac{2}{x}-0.1\frac{2}{x}-0.4x+0.06=2.06-\frac{0.2}{x}-0.4x$$

Calculamos la derivada primera:

$$s'(x)=\frac{1}{5x^2}-\frac{2}{5}$$

$$s'(x)=0 \Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Calculamos ahora la derivada segunda y evaluamos en los puntos críticos:

$$s''(x)=-\frac{2}{5x^3}$$

$$s''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{4\sqrt{2}}{5}<0 \to x=\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ es un máximo rel.}$$

$$s''\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{4\sqrt{2}}{5}$$

Así, las dimensiones del cartel son: $\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$ m, y el área de la parte impresa es:

$$s\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{103}{50}-\frac{2\sqrt{2}}{5}\simeq 1.50 \text{ m}^2$$

$\boxed{18.}$ **[Reserva 2 de 2000] B)** Dada la función $f(x)=\begin{cases} |2x-1| & \text{si } x\le 0 \\ a & \text{si } 0<x\le 1 \\ -x^2+3x & \text{si } x>1 \end{cases}$

Se pide: **(1)** Determinar el valor de *a* para que *f* sea continua en *x = 0.* **(2)** Para ese valor de *a*, ¿es *f* continua para todo valor real de *x*? **(3)** Gráfica de *f*. **(4)** Área del recinto limitado por la gráfica de *f*, el eje OX y las rectas *x = 1* y *x = 2*.

SOL:

(1) Para que *f* sea continua en *x = 0* : $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$:

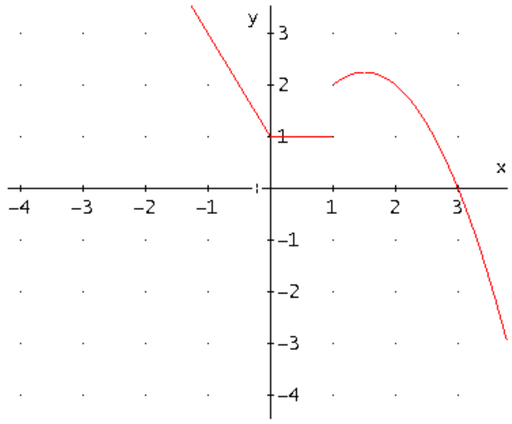
$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 0-}|2x-1|=1 \\ \lim_{x\to 0+} a=a\end{array}\right\}\Rightarrow a=1$$

(2) Estudiemos la continuidad en $x=1$: $\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 1-} 1=1 \\ \lim_{x\to 1+}\left(-x^2+3x\right)=2\end{array}\right\}\Rightarrow \nexists \lim_{x\to 1} f(x)$$

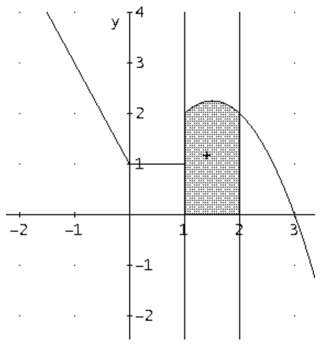
La función presenta una discontinuidad de salto en $x=1$.

(3) Representación gráfica de la función.



(4) Área:

$=$



$$A=\int_1^2\left(-x^2+3x\right)dx=-\frac{x^3}{3}+3\frac{x^2}{2}\Bigg|_1^2=$$

$$\frac{13}{6}\ \mathrm{u}^2$$

$\boxed{19.}$ **[Junio de 2001] A)** Halla un número "*xy*" tal que la suma de sus cifras sea 12 y de modo que la suma del cubo de la cifra de las decenas y del triple del cuadrado de la cifra de las unidades sea lo más pequeña posible.

SOL:

Queremos que la función $F\left(x,y\right)=x^3+3y^2$ sea mínima .

$$x+y=12\rightarrow y=12-x$$

$$F\left(x\right)=x^3+3\left(12-x\right)^2=x^3+3x^2-72x+432$$

Para obtener los puntos críticos, derivamos e igualamos a cero la derivada:

$$F'\left(x\right)=3x^2+6x-72$$

$$F'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=\begin{cases}4\\-6\end{cases}$$

Comprobamos cuál de los valores obtenidos corresponde a un mínimo, hallando $F''\left(x\right)$:

$$F''\left(x\right)=6x+6\rightarrow\begin{cases}F''\left(4\right)=30>0\rightarrow\text{Mínimo}\\F''\left(-6\right)=-30<0\end{cases}$$

Así, $x=4\rightarrow y=12-4=8$.

Por tanto, el número buscado es 48.

$\boxed{20.}$ **[Junio de 2001] B)** Dada la función $f(x)=\begin{cases} x+t & \text{si } x\le -2 \\ x^2-2t & \text{si } -2<x\le 2 \\ 4x-8 & \text{si } x>2 \end{cases}$.

Se pide: **(1)** Halla el valor de “t” para que la función f sea continua en todos los números reales. **(2)** Para el valor de “t” obtenido en el apartado anterior, representa gráficamente la función de f. **(3)** Para el valor de “t” obtenido en el apartado a) calcula el área del recinto cerrado limitado por la gráfica de f y el eje OX.

SOL:

(1) Cada uno de los trozos de la función es continua en todo $\mathbb{R}$. Para que $f(x)$ sea continua en los puntos de unión, se tienen que dar las siguientes condiciones:

$$\lim_{x\to -2} f(x)=f(-2) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 2} f(x)=f(2)$$

Estudiamos la continuidad en $x=-2$:

$$f(-2)=-2+t$$

$$\lim_{x\to -2} f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to -2-}(x+t)=-2+t \\ \lim\limits_{x\to -2+}(x^2-2t)=4-2t \end{cases} \to -2+t=4-2t \to t=2$$

$$f(-2)=0=\lim_{x\to -2} f(x)$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x=-2$, debe ser $t=2$.

Estudiamos la continuidad en $x=2$:

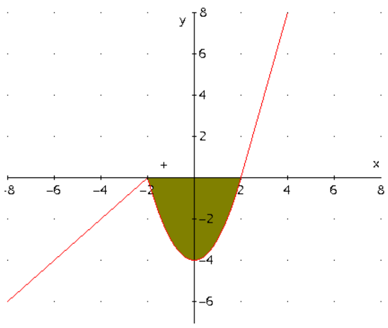
$$f(2)=4-2t$$

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2-}(x^2-2t)=4-2t \\ \lim\limits_{x\to 2+}(4x-8)=0 \end{cases} \to 4-2t=0 \to t=2$$

$$f(2)=0=\lim_{x\to 2} f(x)$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x=2$, debe ser $t=2$.

Así, la función dada es continua en todo $\mathbb{R}$, cuando $t=2$.



(2) La representación gráfica de $f(x)$ es:

(3) El área de la zona sombreada vale:

$$A=\left|\int_{-2}^{2}(x^2-4)\,dx\right|=\frac{32}{3}\ \text{u}^2$$

$\boxed{21.}$ **[Septiembre de 2001] A)** El precio, en pesetas, que la acción de una empresa alcanza en el transcurso de una sesión de Bolsa, viene dado por la función $p(t)=40t^3-420t^2+1200t+200$, en donde t es el tiempo en horas a contar desde el inicio de la sesión. Supongamos que la sesión comienza a las 10 de la mañana y finaliza

7 horas después. Se pide: **(a)** ¿Entre qué horas el precio de la acción sube? **(b)** ¿Entre qué horas el precio de la acción baja? **(c)** ¿A qué hora el precio de la acción alcanza un máximo relativo? ¿Cuál es este valor? **(d)** ¿A qué hora el precio de la acción alcanza un valor mínimo relativo? ¿Cuál es este valor? **(e)** ¿A qué hora el precio de la acción alcanza su valor más grande? ¿Cuál es ese valor?

SOL:
Inicio 10 h $\rightarrow t = 0$
Final $\rightarrow t = 7$

Calculamos la derivada primera y estudiamos su signo:

$$p'(t) = 120t^2 - 840t + 1200$$

$$p'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \begin{cases} 2 \\ 5 \end{cases}$$

signo de p': en $(0,2)$ la función es creciente, en $(2,5)$ la función es decreciente y en $(5,7)$ la función vuelve a ser creciente.

Así, entre las 10 de la mañana y las 12, sube el precio de a acción. Entre las 12 y las 15 horas de la tarde, el precio de la acción baja, para volver a subir desde las 15 horas has la hora de cierre (17 horas).

Para ver los máximos y los mínimos, calculamos la derivada segunda y evaluamos en los puntos críticos.

$$p''(t) = 240t - 840$$

$$p''(2) < 0 \rightarrow t = 2 \text{ es un máximo relativo}$$

$$p''(5) > 0 \rightarrow t = 5 \text{ es un mínimo relativo}$$

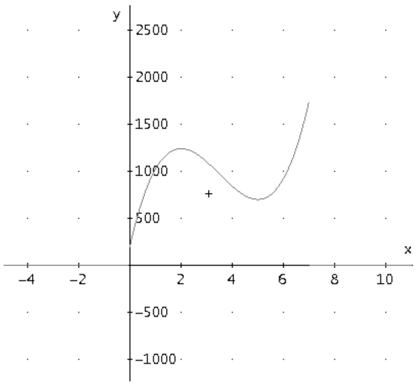
Por tanto, a las 12 se alcanza un máximo en el precio de la acción, y ese valor es:

$$p(2) = 1\ 240 \text{ ptas}$$

y a las 15 h, se alcanza un mínimo en el precio de la acción, siendo ese valor

$$p(5) = 700 \text{ ptas}$$

Hay que tener en cuenta que el máximo absoluto de la función se alcanza para $t = 7$, y que el valor de la acción en ese momento es:



$$p(7) = 1\ 740 \text{ ptas}$$

y que el mínimo absoluto de la función se alcanza al comienzo de la sesión ($t = 0$), siendo en ese momento el valor de la acción:

$$p(0) = 200 \text{ ptas}$$

Aunque no hace falta, y no se pida, incluimos la representación gráfica de la función.

$\boxed{22.}$ **[Septiembre de 2001] B)** Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si} \quad x \le 2 \\ \dfrac{6}{x} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$.

Se pide: (a) Estudia la continuidad de f. (b) Representación gráfica de f. (c) Área del recinto que delimita la gráfica de *f* y el eje OX.

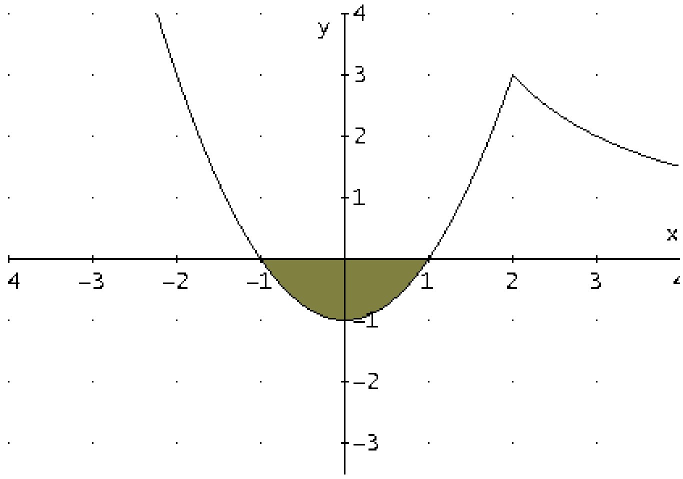
SOL:

Cada una de las funciones componentes de $f(x)$ es continua en su dominio de definición. Estudiemos la continuidad en el punto de unión:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2-}\left(x^2-1\right)=3\\ \lim\limits_{x\to 2+}\dfrac{6}{x}=3\end{array}\right\}\Rightarrow \exists \lim_{x\to 2} f(x)=3=f(2)$$

Luego $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$

Representación gráfica:



Los límites de integración son los puntos donde la función corta al eje OX. En nuestro caso:

$$x^2-1=0\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm\sqrt{1}=\pm 1$$

(ten en cuenta que $\dfrac{6}{x}\neq 0$ ya que una fracción es cero sólo cuando el numerador lo es)

El área pedida es:

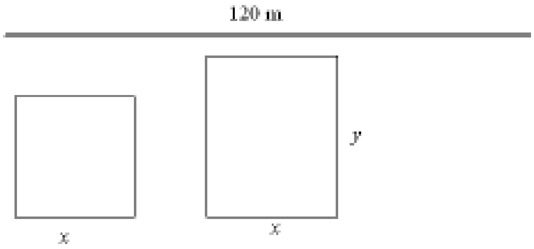
$$A=-\int_{-1}^{1}\left(x^2-1\right)dx+\int_{1}^{2}\left(x^2-1\right)dx=-\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Bigg]_{-1}^{1}+\frac{x^3}{3}-x\Bigg]_{1}^{2}=-\frac{x^3}{3}+x\Bigg]_{-1}^{1}+\frac{x^3}{3}-x\Bigg]_{1}^{2}=$$

$$=-\left(-\frac{4}{3}\right)+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}\,\mathrm{u}^2$$

23. **[Reserva 1 de 2001] A)** Una cuerda de 120 metros de longitud se divide en dos trozos. Con el primero de ellos se forma un cuadrado de lado "*x*" y con el segundo trozo se forma un rectángulo de base "*x*" y de altura "*y*". Halla los valores de "*x*" e "*y*" para que la suma del área del cuadrado y el doble del área del rectángulo sea lo mayor posible y calcula este valor máximo.

SOL:

$$\left.\begin{array}{l} A = x^2 + xy \\ 4x + 2x + 2y = 120 \to y = 60 - 3x \end{array}\right\} \Rightarrow A(x) = x^2 + x(60 - 3x) = -2x^2 + 60x$$



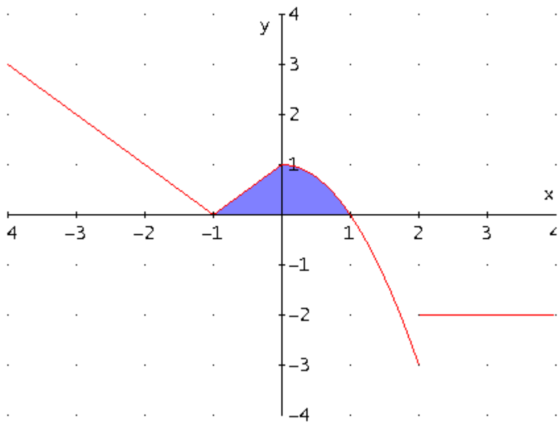
$$A'(x) = -4x + 60$$
$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 15$$
$$A''(x) = -4$$
$$A''(15) < 0 \to x = 15 \text{ es un máx. rel.}$$

Por tanto, el área del cuadrado es $15^2 = 225 \text{ m}^2$ y el área del rectángulo es $\left(\begin{cases} x = 15 \\ y = 15 \end{cases}\right)$ $15^2 = 225 \text{ m}^2$, esto es, el rectángulo también es un cuadrado.

$\boxed{24.}$ **[Reserva 1 de 2001] B)** Dada la función $f(x) = \begin{cases} |x+1| & \text{si} \quad x \le 0 \\ -x^2 + 1 & \text{si} \quad 0 < x \le 2 \\ -2 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$.

Se pide: **(a)** Estudia la continuidad de f. **(b)** Representación gráfica de f. **(c)** Calcula el área del recinto cerrado que delimita la gráfica de la función con el eje OX.

SOL:



Los límites de integración son los puntos de corte de la función con el eje OX:

$$|x+1| = 0 \Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$-x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1} = \pm 1 \Rightarrow$ sólo nos vale $x = 1$, ya que $x = -1$ está fuera del dominio

$-2 = 0$ nunca

Así, los límites de integración son $x = -1$ y $x = 1$

El área pedida es:

$$A = \int_{-1}^{0} |x+1|\, dx + \int_{1}^{1} \left(-x^2 + 1\right) dx = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} \text{ u}^2$$

$\boxed{25.}$ **[Reserva 2 de 2001] A)** Dada la función: $f(x)=\begin{cases} \dfrac{-1}{x} & \text{si } x<0 \\ x^2+1 & \text{si } 0\le x<2 \\ -5x+15 & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$. Se pide: **(a)** Estudiar la continuidad de f. **(b)** Representación gráfica de f. **(c)** Área del recinto limitado por la gráfica de f, los ejes de coordenadas y la recta $x = 2$.

SOL:

Cada una de las funciones componentes de $f(x)$ son continuas en su dominio de definición. Estudiemos la continuidad en los puntos de unión.

Continuidad en $x=0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{-1}{x}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to 0+}\left(x^2+1\right)=1 \end{array}\right\}\Rightarrow \nexists \lim_{x\to 0} f(x)$$

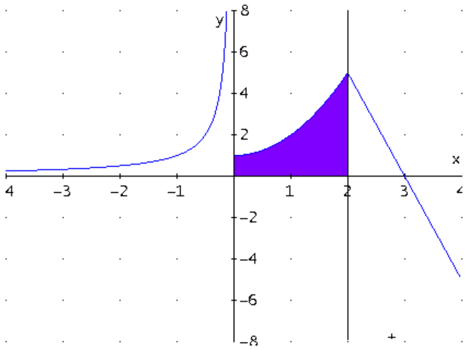
y por tanto, la función presenta una discontinuidad de salto infinito en $x=0$.

Continuidad en $x=2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2-}\left(x^2+1\right)=5 \\ \lim\limits_{x\to 2+}\left(-5x+15\right)=5 \end{array}\right\}\Rightarrow \exists \lim_{x\to 2} f(x)=5=f(2)$$

y como consecuencia, la función es continua en $x=2$.

Resumen: $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$.



$$A=\int_0^2\left(x^2+1\right)dx=\left.\frac{x^3}{3}+x\right|_0^2=$$

$$\frac{8}{3}+2=\frac{14}{3}\ \text{u}^2$$

$\boxed{26.}$ **[Reserva 2 de 2001] B)** Se considera la función $f(x)=3x^4+4x^3-12x^2+1$. Se pide: **(a)** Pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = -1$. **(b)** Escribe los intervalos en donde la función sea creciente y en donde sea decreciente. **(c)** Determina los valores de x en los que la función alcanza máximos y mínimos relativos. **(d)** Valor máximo que toma la función en el intervalo [–1,2].

SOL:

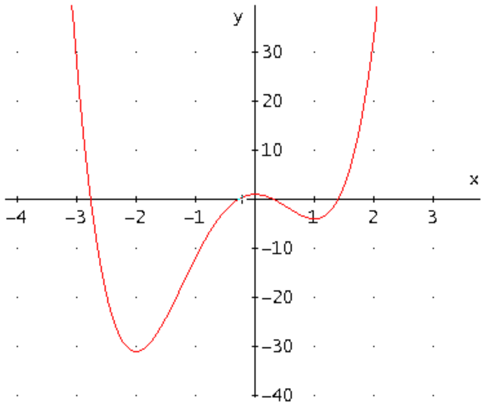
(1) Calculamos la pendiente pedida:

$$f'(x)=12x^3+12x^2-24x$$

$$f'(-1)=24 \text{ es la pendiente pedida}$$

(2) Estudiamos el signo de f':

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\begin{cases}-2\\0\\1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(-\infty,-2) \text{ la función es decreciente}\\(-2,0) \text{ la función es creciente}\\(0,1) \text{ la función es decreciente}\\(1,+\infty) \text{ la función es creciente}\end{cases}$$



(3) Para determinar los extremos relativos, calculamos la derivada segunda y evaluamos.

$f''(x)=36x^2+24x-24$

$f''(-2)>0 \Rightarrow x=-2$ es un mínimo relativo

$f''(0)<0 \Rightarrow x=0$ es un máximo relativo

$f''(1)>0 \Rightarrow x=1$ es un mínimo relativo

(4) Para estudiar los extremos absolutos, calculamos el valor de la función en los extremos del intervalo:

$f(-1)=-12$

$f(2)=33$

es decir, en $x=-1$ la función tiene un mínimo absoluto, y en $x=2$ tiene un máximo absoluto.

$\boxed{27.}$ **[Junio de 2002] A)** Dada la función $f(x)=\begin{cases}16-x^2 & \text{si} \quad -2\le x\le 2\\ x^2 & \text{si} \quad 2\le x\le 3\end{cases}$

a) Estudiar la continuidad de f.
b) Representar gráficamente f.
c) Calcular la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en $x = 1$.
d) Determinar los valores de x en los que la función alcanza su máximo y su mínimo absolutos.

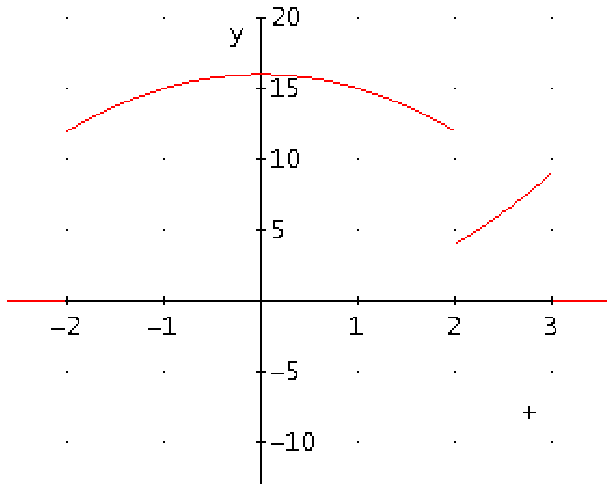
SOL:
a) Los trozos de la función son continuos en todo $\mathbb{R}$, por ser funciones polinómicas. Estudiemos la continuidad en el punto de unión: $x=2$

$$¿\, f(2)=\lim_{x\to 2} f(x)\ ?$$

$f(2)=4$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2-}\left(16-x^2\right)=12\\ \lim\limits_{x\to 2+} x^2=4\end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 2} f(x)$$

Por tanto, la función presenta una discontinuidad de salto 8.
b) La representación gráfica es:



c) $f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } -2 < x < 2 \\ 2x & \text{si } 2 < x < 3 \end{cases}$

$m = f'(1) = -2$

d) Máximo absoluto en el vértice de la parábola: $(0,16)$

Mínimo absoluto en $(2,4)$.

$\boxed{28.}$ **[Junio de 2002] B)** Determinar el valor de "a" para que el área comprendida por la gráfica de la función f(x)=a x^2+ 2, el eje OX y las rectas x = –1 y x = 2 sea 21 unidades de área.

SOL: En este caso, los límites de integración nos vienen dados por las rectas $x = -1$ y $x = 2$. Así, tenemos la siguiente integral:

$$A = \int_{-1}^{2} (ax^2 + 2)\,dx = 21 \Leftrightarrow \left. a\frac{x^3}{3} + 2x \right]_{-1}^{2} = 21 \Leftrightarrow a\frac{8}{3} + 4 - \left(-a\frac{1}{3} - 2\right) = 21 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{8a}{3} + \frac{12}{3} + \frac{a}{3} + \frac{6}{3} = 21 \Leftrightarrow 9a + 18 = 63 \Leftrightarrow a = \frac{63-18}{9} \Leftrightarrow a = \frac{45}{9} \Leftrightarrow a = 5$$

Por tanto, la función es $f(x) = 5x^2 + 2$

$\boxed{29.}$ **[Septiembre de 2002] A)** Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si} \quad 0 \le x < 2 \\ -x^2 + 10x - 9 & \text{si} \quad 2 \le x \le 9 \end{cases}$$

a) Estudiar la continuidad de f.
b) Representar gráficamente f.
c) Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de f, el eje OX y las rectas $x = 2$ y $x = 3$.

SOL:

a) Cada una de las funciones componentes de $f(x)$ son continuas en su dominio de definición. Estudiemos la continuidad en el punto de unión.

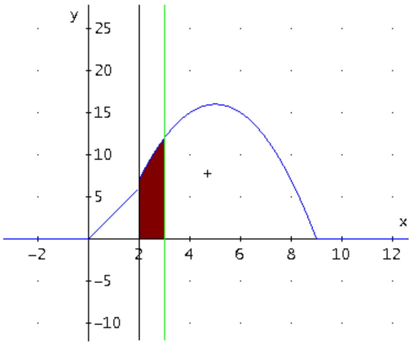
Continuidad en $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2-} 3x=6 \\ \lim\limits_{x\to 2+}\left(-x^2+10x-9\right)=7\end{array}\right\}\Rightarrow \nexists \lim_{x\to 2} f(x)$$

luego la función presenta una discontinuidad de salto 1 en dicho punto.

Conclusión: La función es continua en $[0,9]-\{2\}$

b) Representación gráfica:



c) Área:

$$A=\int_2^3\left(-x^2+10x-9\right)dx=\boxed{\frac{29}{3}\text{ u}^2}$$

$\boxed{30.}$ **[Septiembre de 2002] B)** Supongamos que le momento actual corresponde al valor *x* = 0 de la variable tiempo y que las pérdidas o ganancias (y) de una empresa que acaba de fundarse siguen una función del tipo $y=(x-1)^2-1$. Basándote en la representación gráfica de esa función, determinar:

a) Los intervalos de tiempo en que la empresa tiene pérdidas y en cuáles tiene ganancias.

b) En qué momento tiene la mayor pérdida.

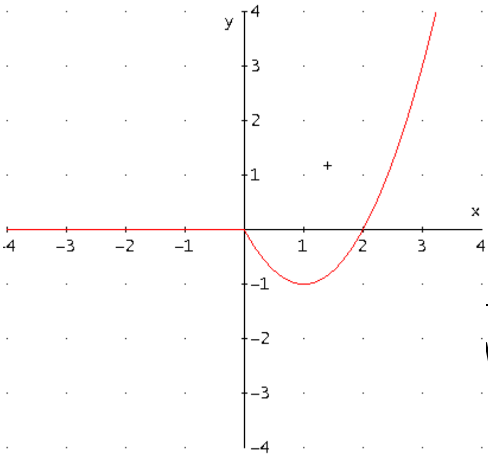
c) En qué momentos no tiene pérdidas ni ganancias.

SOL:

$$y'=2(x-1)=2x-2$$

(1) $$y'=0\Leftrightarrow x=1\Rightarrow\begin{cases}\text{en } (0,1) \text{ la función es decreciente}\\ \text{en } (1,2) \text{ la función es creciente}\\ \text{en } (2,+\infty) \text{ la función es creciente}\end{cases}$$

Es decir, la empresa tiene pérdidas desde la hora de apertura hasta transcurrida una hora. En la siguiente hora tiene ganancias, y a partir de ahí también.



(2) $$y''=2$$
$$y''>0\Rightarrow x=1 \text{ es un mínimo relativo}$$

La mayor pérdida la tiene precisamente cuando transcurre una hora desde la apertura, siendo esta pérdida – 1.

(3) No tiene pérdidas ni ganancias cuando $y=0$, es decir, cuando $x=\begin{cases}0\\2\end{cases}$, esto es, a la hora de apertura y las dos horas de haber abierto.

$\boxed{31.}$ **[Reserva 1 de 2002] A)** Dada la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1} & si \quad 0\le x\le 1\\ x & si \quad 1<x<3\\ 6-x & si \quad 3\le x\le 4\end{cases}$

a) Estudia la continuidad de f.
b) Representación gráfica de f.
c) Área del recinto limitado por la gráfica de f, el eje OX y las rectas $x=2$ y $x=4$.

SOL:
a) Las funciones componentes son continuas en sus dominios de definición. Estudiemos la continuidad en los puntos de unión.
Continuidad en $x=1$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{2}\\ \lim\limits_{x\to 1+} x=1\end{array}\right\}\Rightarrow \nexists \lim_{x\to 1} f(x)$$

y por tanto, la función tiene una discontinuidad de salto en $x=1$.

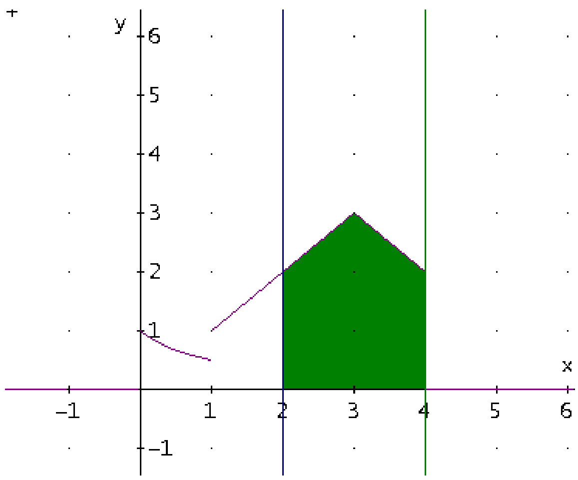
Continuidad en $x=3$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3-} x=3\\ \lim\limits_{x\to 3+}(6-x)=3\end{array}\right\}\Rightarrow \exists \lim_{x\to 3} f(x)=3=f(3)$$

y así, la función es continua en $x=3$.

Conclusión: La función es continua en $[0,4]-\{1\}$

b) La gráfica de la función es:



Ojo, aunque los límites de integración son $x=2$ y $x=4$, en ese intervalo hay dos funciones que están por encima, luego hay que calcular el punto de corte de ambas funciones (sólo nos interesa la coordenada *x*), para dividir el intervalo en dos intervalos:

$$x=6-x\Rightarrow 2x=6\Rightarrow x=\frac{6}{2}=3$$

Por tanto, tenemos que calcular dos integrales:

1ª) Integral de la función $f_1(x)=x$ en el intervalo $[2,\ 3]$

2ª) Integral de la función $f_2(x)=6-x$ en el intervalo $[3,\ 4]$

El área pedida vale:

$$A=\int_2^3 xdx+\int_3^4(6-x)dx=\left.\frac{x^2}{2}\right]_2^3+\left.6x-\frac{x^2}{2}\right]_3^4=\frac{9}{2}-\frac{4}{2}+24-\frac{16}{2}-\left(18-\frac{9}{2}\right)=\frac{14}{2}-2=$$

$$=5\text{ u}^2$$

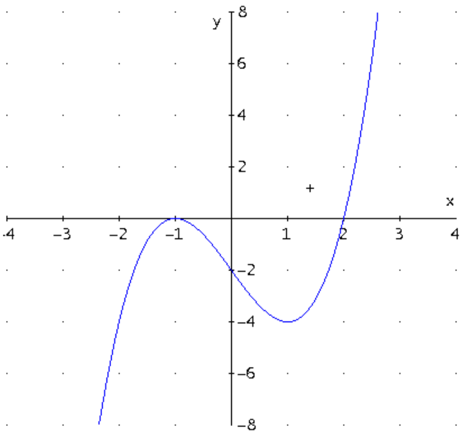
32. **[Reserva 1 de 2002]** **B)** Se considera la función $f(x)=x^3-3x-2$. Se pide:

a) Pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=-1/2$.

b) Escribe los intervalos en donde la función sea creciente y en donde sea decreciente.

c) Determina los valores de *x* en los que la función alcanza máximos y mínimos relativos.

SOL:



a) Pendiente de la recta tangente:

$f'(x)=3x^2-3$

$f'\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{9}{4}$ es la pendiente pedida

b) Estudiamos el signo de la derivada primera:

$f'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2-3=0\Leftrightarrow x=\pm1$

En $\begin{cases}(-\infty,-1)\cup(1,+\infty) \text{ la función es creciente}\\ (-1,1) \text{ la función es decreciente}\end{cases}$

c) Calculamos la derivada segunda y evaluamos en los puntos críticos.

$f''(x)=6x$

$f''(-1)<0\rightarrow x=-1$ es un máximo relativo rel.

$f''(1)>0\rightarrow x=1$ es un mínimo relativo

33. **[Reserva Septiembre 2002]** Determinar los valores de "*a*" y de "*b*" en la ecuación de la parábola $y=ax^2+bx+2$ sabiendo que tiene el punto $(1,-2)$ común con la recta $y=-2x$, y que dicha recta es tangente a la parábola en ese punto.

SOL:

Que el punto $(1,-2)$ sea común a las dos curvas quiere decir, que sus coordenadas cumplen las dos ecuaciones y por tanto:

$$-2 = a + b + 2 \rightarrow a + b = -4$$

Que $y = -2x$ sea tangente a la parábola en ese punto quiere decir $y'(1) = -2$, es decir:

$$y' = 2ax + b = -2 \rightarrow y'(1) = 2a = -2 \rightarrow a = -1$$

Sustituyendo en la ecuación anterior se obtiene que $b = -3$.

Por tanto, la parábola queda en la forma $y = -x^2 - 3x + 2$.

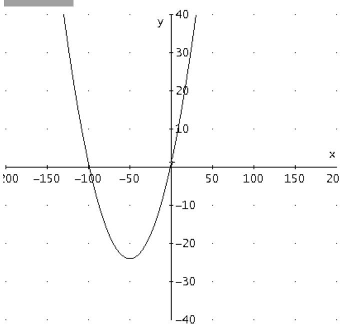
$\boxed{34.}$ **[Reserva 2 de 2002] A)** En un estudio sobre el coste de producción de una empresa de ordenadores, se ha concluido que producir "*x*" unidades de un determinado componente tiene un coste expresado por la función $f(x) = 0{,}01x^2 + x + 1$. La venta de x unidades de es componente proporciona unos ingresos que vienen determinados por la función $g(x) = (6 + 0{,}25\,x)\,x$, siendo x el número de unidades producidas.

a) Calcular el número de unidades que deben producir para que los costes sean mínimos.

b) Hallar la expresión, en función de x, de los beneficios, suponiendo que se venden todas las unidades que se producen.

c) Calcular el número de unidades que deben producir y vender para que los beneficios sean máximos.

SOL:



a) Hay que minimizar $f(x) =$ coste .

$$f'(x) = 0.02x + 1$$

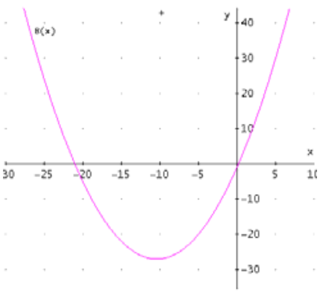
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{0.02} = -50$$

Que no está dentro del dominio de la función. Por, el coste es mínimo cuando se fabrican 0 unidades.

b) Beneficio:

$$B(x) = g(x) - f(x) = (6 + 0.25x)x - (0.01x^2 + x + 1) = \frac{6x^2 + 125x - 25}{25}$$

c) Nos piden maximizar $B(x)$:



$$B'(x) = \frac{12x + 125}{12}$$

$$B'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{125}{12}$$

$$B''(x) = \frac{12}{25}$$

$$B''\left(-\frac{125}{12}\right) > 0 \Rightarrow x = -\frac{125}{12} \text{ es un mínimo relativo}$$

Es decir, la función no tiene máximo (cosa que se puede apreciar en la gráfica).

35. **[Junio de 2003] A)** El número de personas que utiliza las instalaciones de una piscina de verano viene expresado por la función $f(t) = 10t3 - 120t2 + 450t$, en donde *t* expresa el tiempo transcurrido desde la apertura de la piscina, 12 de la mañana (instante *t* = *0*), hasta el cierre de la piscina que se produce a las 19 de la tarde.
a) ¿Cuántas personas quedan a la hora de cerrar la piscina?
b) ¿A qué hora el número de personas es mayor? ¿Cuántas personas hay en ese momento?
c) ¿A qué hora el número de personas es menor? ¿Cuántas personas hay en ese momento?
d) Periodos en los que el número de personas crece o decrece.

SOL:

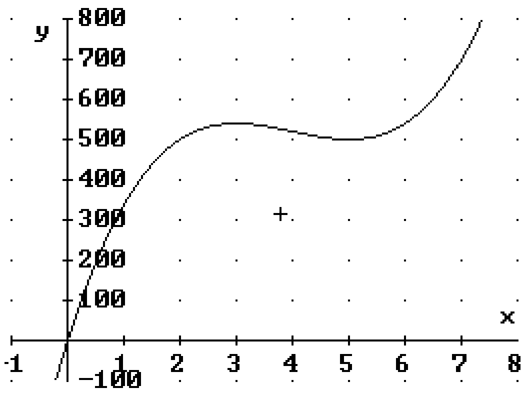
a) $f(7) = 10{\cdot}73 - 120{\cdot}72 + 450{\cdot}t = $ $= 3\ 430 - 5\ 880 + 3\ 150 =$ = 700 personas.

b) y c) Hallamos los máximos y mínimos, derivando e igualando a cero.

$f'(t) = 30\,t^2 - 240\,t + 450$, igualando a cero se obtiene:

$$30\,t^2 - 240\,t + 450 = 0$$

$t^2 - 8\,t + 15 = 0$ de sol: $x_1 = 3$; $x_2 = 5$



En $x = 3$ hay un máximo y en $x = 5$ hay un mínimo; siendo en horas las 15 y 17 horas.
$f(3) = 540$ personas, máximo relativo a las 15 h.
$f(5) = 500$ personas, mínimo a las 17 h.

d) crece desde las 12 h. Hasta las 15 h, decrece de 15 h a 17 h. Y vuelve a crecer desde las 17 h hasta la hora de cierre (19 h, $x = 7$) donde se produce el mayor número de personas con 700 personas.

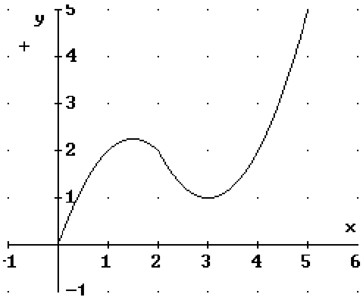
36. **[Junio de 2003] B)** Dada la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 + kx & \text{si} \quad 0 \le x \le 2 \\ x^2 - 6x + 10 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

a) Calcula el valor de k para que la función sea continua en $x = 2$
b) Representa gráficamente f para el valor de k hallado en el apartado anterior.
c) Calcula el área del recinto limitado por el eje OX, la gráfica de f y la recta $x = 4$.

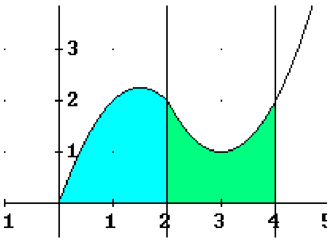
SOL: a) Imponemos que $f(x)$ sea continua en $x = 2$: $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 2-}\left(-x^2 + kx\right) = -4 + 2k \\ \lim_{x\to 2+}\left(x^2 - 6x + 10\right) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow -4 + 2k = 2 \Rightarrow k = 3$$

b) Representación gráfica.



c) Cálculo del área pedida.



$$A=\int_0^2\left(-x^2+3x\right)dx+\int_2^4\left(x^2-6x+10\right)dx=$$

$$-\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\Bigg|_0^2+\frac{x^3}{3}-\frac{6x^2}{2}+10x\Bigg|_2^4=$$

$$=\frac{10}{3}+\frac{8}{3}=\frac{18}{3}=6\ \text{u}^2$$

$\boxed{37.}$ **[Septiembre de 2003] A)** El precio en euros de cada acción de una empresa viene determinado, en el transcurso de una sesión bursátil, por la función f(t)= $t^3 - 6t^2 + 9t + 1$ en donde t expresa el tiempo transcurrido desde el inicio de la sesión. Suponiendo que ésta comienza a las 10 horas (instante t = 0) y finaliza, por problemas técnicos, tres horas y media después. Se pide: **1)** El precio de la acción al cabo de dos horas. **2)** Hora en que la acción adquiere su valor máximo. ¿Cuál es este valor? **3)** Horas en que la acción adquiere su valor mínimo. ¿Cuál es este valor? **4)** Periodos en los que el precio de la acción sea creciente o decreciente.

SOL:

La function es: $f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t + 1$

1) El precio de la acción al cabo de dos horas es:

$f(2) = 23 - 6·22 + 9·2 + 1 = 3$ €.

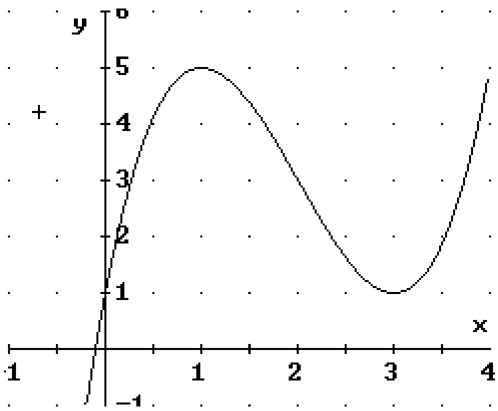
Hallamos máximos y mínimos derivando e igualando a cero.

$$f'(t) = 3t^2 - 12t + 9$$

si igualamos a cero, obtenemos: $x_1 = 1$; $x_2 = 3$

$$f''(t) = 6t - 12$$

que probando se obtiene: en t = 1 hay un máximo, y en t = 3 hay un mínimo.



2) El máximo se produce cuando t = 1 que equivale a las 11 horas con un valor de $f(1) = 5$ €.

3) Y el valor mínimo se obtiene en t = 3 que equivale a las 13 horas con un valor de 1 €.

4) La acción crece desde el comienzo de la sesión 10 h. hasta las 11 h, que decrece hasta las 13 h. y que vuelve a subir hasta el cierre a las 13 : 30' con un valor 1'875 €

38. **[Septiembre de 2003] B)** Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} -x^2+5x-4 & \text{si} \quad x \le 3 \\ x+k & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

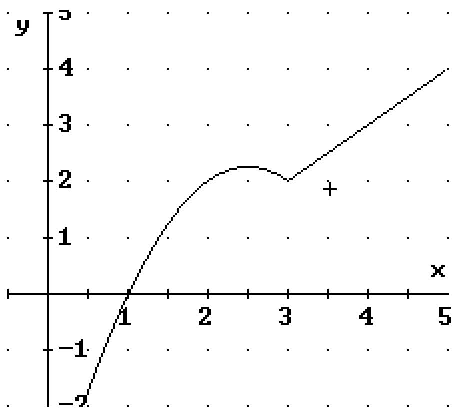
1) Calcula el valor de k para que la función sea continua en $x = 3$.
2) Representa gráficamente f para el valor de k hallado en el apartado anterior.
3) Calcula el área del recinto limitado por el eje OX, la gráfica de f y las rectas x=1 y x=2.

SOL:

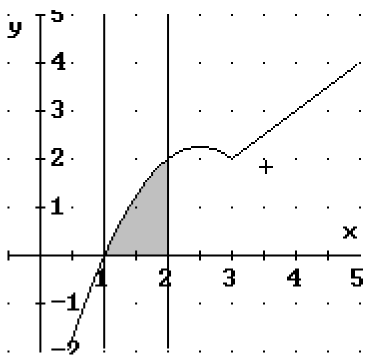
a) Imponemos que la función es continua en $x=3$: $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = f(3)$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3-}\left(-x^2+5x-4\right)=2 \\ \lim\limits_{x\to 3+}\left(x+k\right)=3+k \end{array}\right\} \Rightarrow 2=3+k \Rightarrow k=-1$$

b) La representación gráfica es:



c) Calculamos el área pedida.



$$A = \int_1^2 \left(-x^2+5x-4\right)dx = -\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}-4x\Big|_1^2 =$$

$$=\frac{7}{6}\ \mathrm{u}^2$$

39. **[Reserva 1de 2003] A)** El producto de dos números reales positivos es 18. Hallar dichos números de forma que la suma de tres veces el cuadrado del primero más nueve veces el segundo sea lo más pequeña posible.

SOL:

Sean los números buscados.

Se tiene que:

$$\begin{cases} xy = 18 \to y = \dfrac{18}{x} \\ \text{Minimizar } 3x^2 + 9y = 3x^2 + \dfrac{162}{x} \end{cases}$$

Llamamos $f(x) = 3x^2 + \dfrac{162}{x}$.

Calculamos la derivada primera e igualamos a cero.

$$f'(x) = 6x - \frac{162}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

Calculamos la derivada segunda y evaluamos en el punto crítico:

$$f''(x) = 6 + \frac{324}{x^3}$$

$f''(3) > 0 \to x = 3$ es un mínimo relativo de la función

Por tanto, el número buscado es: 39

40. **[Reserva 1de 2003] B)** Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x+7}{3} & \text{si} \quad -5 \le x \le -2 \\ -x^2 + k & \text{si} \quad -2 \le x \le 2 \end{cases}$

a) Calcula el valor de k para que la función sea continua en $x = -2$.

b) Representa la gráfica de f para el k obtenido en el apartado anterior.

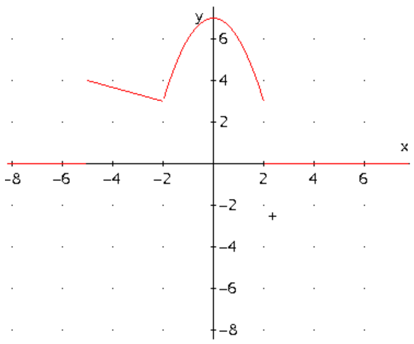
c) Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de f, el eje OX, el eje OY y la recta $x = -5$.

SOL:

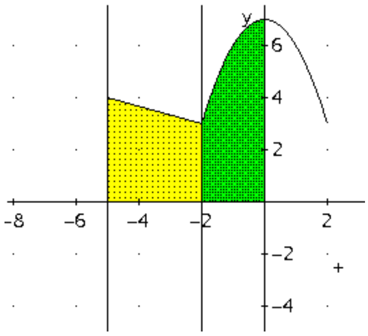
a) Imponemos que la función sea continua en $x = 2 : \lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2-} \dfrac{-x+7}{3} = 3 \\ \lim\limits_{x\to 2+} \left(-x^2 + k\right) = -4 + k \end{array}\right\} \Rightarrow 3 = -4 + k \Rightarrow k = 7$$

b) La representación gráfica es:



c) Calculamos el área pedida.



$$A=\int_{-5}^{-2}\frac{-x+7}{3}dx+\int_{-2}^{0}\left(-x^2+7\right)dx=$$

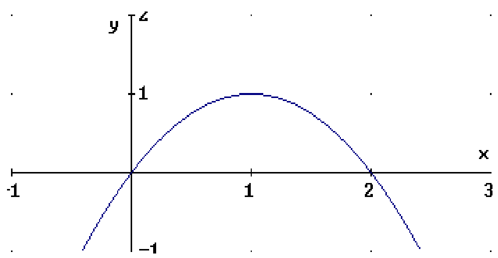
$$=-\frac{x^2}{6}+\frac{7}{3}x\Big|_{-5}^{-2}+\left(-\frac{x^3}{3}+7x\right)\Big|_{-2}^{0}=$$

$$=\frac{21}{2}+\frac{34}{3}=\frac{131}{6}\ \text{u}^2$$

$\boxed{41.}$ **[Reserva 2 de 2003] A)** La temperatura T de una reacción química en un laboratorio de productos agrícolas viene dada, en función del tiempo t en horas, por la expresión $T(t)=2t-t^2$ para $0 \le t \le 2$.

a) ¿Qué temperatura habrá a los quince minutos?
b) ¿En qué momento volverá a alcanzarse esta misma temperatura?
c) Halla la temperatura máxima y mínima alcanzadas y los momentos en que se producen.

SOL:
15 minutos equivalen a 0'25 horas
a) $T(0'25)=2\cdot 0'25-0'25^2=0'50-0'0625=0'4375$



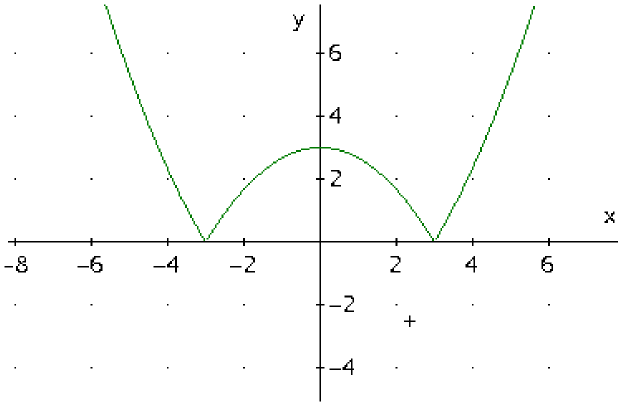
b) $2t-t^2=0'4375$ es de 2º grado, cuyas soluciones son: x_1 = 0'25 y x_2 = 1'75; la x_1 ya la sabíamos. Por tanto se repite al cabo de 1 hora y ¾ de hora.
c) Hallamos los máximos y mínimos de la función $T(t)$ y hallamos un máximo en t = 1 y no tiene mínimos pero observando la gráfica y el problema, tenemos mínimos en t = 0 y t = 2 horas

La temperatura máxima se alcanza cuando t = 1 hora con un valor de $T(1)=2\cdot 1-1^2=1$ unidad de temperatura

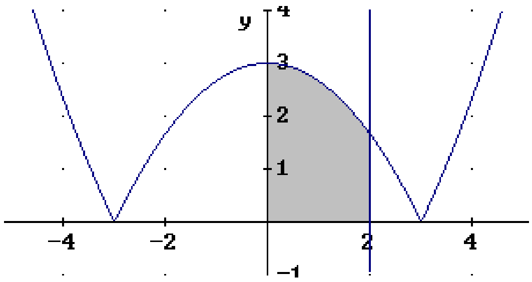
La temperatura mínima se alcanza cuando t = 0 y cuando t = 2 horas con un valor de CERO grados.

42. **[Reserva 2 de 2003] B)** Dada la función $f(x)=\left|\frac{-1}{3}x^2+3\right|$. **1)** Estudia su continuidad en $x = 3$. **2)** Representa gráficamente f. **3)** Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f, el eje OX, el eje OY y la recta $x = 2$.

SOL: (1) Es continua en todo $\Re$ por ser valor absoluto de un parábola que es continua.
2) Su gráfica es:



3) Calculamos los límites de integración (puntos de corte con el eje OX):



$$f(x)=\left|-\frac{1}{3}x^2+3\right|=0\Rightarrow -\frac{1}{3}x^2+3=0\Rightarrow -\frac{1}{3}x^2=-3\Rightarrow x^2=\frac{-3}{-\frac{1}{3}}=9\Rightarrow x=\pm\sqrt{9}=\pm 3$$

Ahora bien, el segundo límite de integración es $x = 2$, que es la recta que nos dan.
El área pedida es el área sombreada:

$$A=\int_0^2\left(-\frac{1}{3}x^2+3\right)dx=-\frac{1}{3}\frac{x^3}{3}+3x\Big]_0^2=\frac{46}{9}\text{u}^2$$

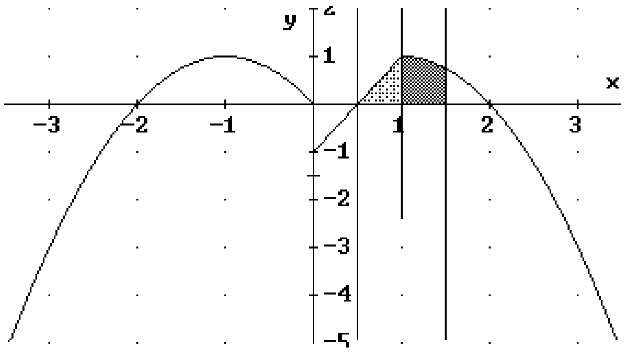
43. **[Junio de 2004] A)** Dada la función $f(x)=\begin{cases}-x^2-2x & \text{si} \quad x\le 0\\ -1+2x & \text{si} \quad 0<x\le 1\\ -x^2+2x & \text{si} \quad x>1\end{cases}$.

1) Representa gráficamente f. **2)** Estudia su continuidad en los puntos $x = 0$ y $x = 1$. **3)** Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f, y las rectas $x=\frac{1}{2}$ y $x=\frac{3}{2}$

SOL: 1) Véase figura

2) Como vemos no es continua en $x = 0$ y si es continua en $x = 1$.

3) El área es la suma de las dos partes marcadas.



$$A = \int_0^1 (-1+2x)\,dx + \int_1^{\frac{3}{2}} (-x^2+2x)\,dx =$$

$$\int_0^1 (-1+2x)\,dx = -x+x^2\Big]_0^2 = \left(-2+2^2\right)-0 = \boxed{2\ \text{u}^2}$$

$$\int_1^{\frac{3}{2}} (-x^2+2x)\,dx = -\frac{x^3}{3}+x^2\Big]_1^{3/2} = \left(-\frac{(3/2)^3}{3}+(3/2)^2\right)-\left(-\frac{1^3}{3}+1^2\right) = \frac{9}{8}-\frac{2}{3} = \boxed{\frac{11}{24}\ \text{u}^2}$$

$\boxed{44.}$ **[Junio de 2004] B)** Una compañía de autobuses interurbanos ha comprobado que el número de viajeros (N) diarios depende del precio del billete (p) según la expresión: $N(p) = 300 - 6p$.

1) Dar la expresión que nos proporciona los ingresos diarios (I) de esa compañía en función del precio del billete. **2)** ¿Qué ingreso diario se obtiene si el precio del billete es 15 euros? **3)** ¿Cuál es el precio del billete que hace máximo los ingresos diarios? **4)** ¿Cuáles son esos ingresos máximos?

SOL: 1) Ingresos = Número de viajeros "por" el precio $\boxed{I(p) = (300 - 6\cdot p)\cdot p}$

2) Si p = 15 € $\Rightarrow$ I (15) = (300 – 6·15)·15 = $\boxed{3.150\ €}$.

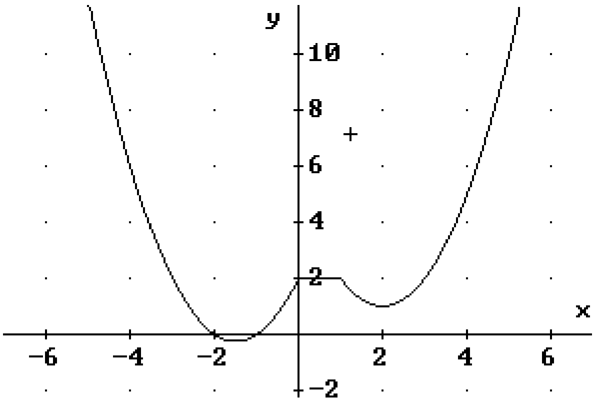
3) Hallamos el máximo de la función I(p) = 300 p – 6 p^2 . Derivamos e igualamos a cero y obtenemos: I´(p) = 300 – 12p ; igualando a cero 300 – 12p = 0 $\Rightarrow$ $\boxed{p = 25\ €}$, y es un máximo.

4) Los ingresos máximos serán cuando el precio del billete sea de: p = 25 €; $\Rightarrow$ obteniendo unos ingresos máximos de I(25) = (300 – 6·25)·25 = $\boxed{3.750\ €}$

$\boxed{45.}$ **[Septiembre de 2004] A)** Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2+3x+2 & \text{si} \quad x \le 0 \\ 2 & \text{si} \quad 0 < x \le 1 \\ x^2-4x+5 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$.

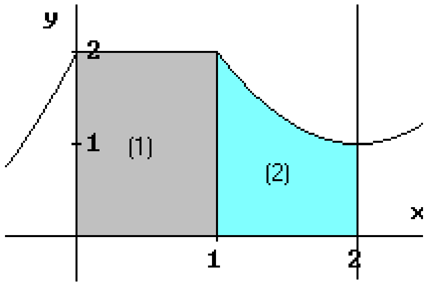
1) Representa gráficamente f. **2)** Estudia su continuidad en los puntos $x = 0$ y $x = 1$. **3)** Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f, los ejes de coordenadas y la recta $x = 2$.

SOL: Véase la gráfica:



2) Como vemos es continua en 0 y en 1

3) El área es la suma del área del rectángulo (1) más el área de la figura (2)



Área (1) = 1·2 = 2 unidades cuadradas.

Área (2) = $\int_1^2 (x^2 - 4x + 5)\, dx \;=\; \left.\dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 5x\right]_1^2 = \dfrac{14}{3} - \dfrac{10}{3} = \dfrac{4}{3}$ unidades cuadradas

$$\text{Área total} = 2 + \frac{4}{3} = \boxed{\frac{10}{3}\ \text{u}^2}$$

$\boxed{46.}$ **[Septiembre de 2004] B)** La altura en metros, H, que alcanza una pelota lanzada verticalmente hacia arriba, viene dada en función del tiempo en segundos por la expresión: $H(t) = 20\,t - 2\,t^2$. **1)** ¿Qué altura habrá alcanzado a los tres segundos? **2)** ¿En qué momentos alcanzará 32 m de altura? **3)** ¿Cuál es la altura máxima que alcanza? ¿Dónde?

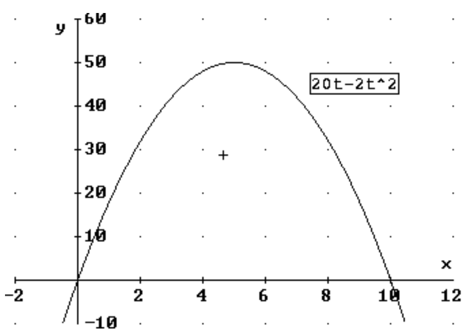
SOL: 1) $H(3) = 20 \cdot 3 - 2 \cdot 3^2 = \boxed{42\text{ m.}}$

2) $H(t) = 32 = 20\,t - 2\,t^2$, es una ecuación de segundo grado que tiene por soluciones:

$x_1 = 2$ $x_2 = 8$ Luego los 32 metros se $\boxed{\text{alcanzan dos veces a los 2 y 8 segundos.}}$

3) Hallamos el máximo de la función H(t), derivando e igualando a cero.

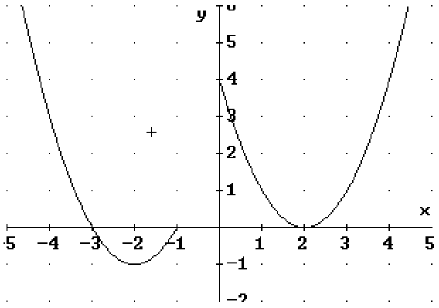
$H'(t) = 20 - 4t$, que igualando a cero se obtiene el valor de t = 5; luego la altura máxima se alcanza $\boxed{\text{a los 5 segundos}}$ y a los $H(5) = 20 \cdot 5 - 2 \cdot 5^2 = \boxed{50\text{ metros.}}$



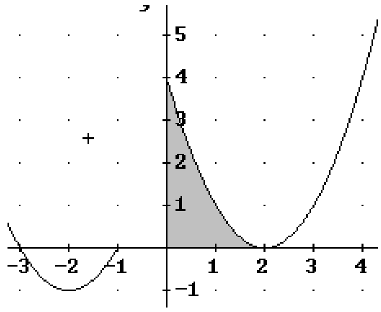
47. **[Reserva 1 de 2004] A)** Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2+4x+3 & \text{si} \quad x \le -1 \\ (x-2)^2 & \text{si} \quad x \ge 0 \end{cases}$.

1) Representa gráficamente f. **2)** Estudia su continuidad. **3)** Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f, el eje OX y el eje OY.

SOL: 1) Véase figura:



2) Es discontinua en $x = -1$ y $x = 0$



3) El área es la marcada;

$$A = \int_0^2 (x-2)^2 \, dx =$$

$$\left.\frac{(x-2)^3}{3}\right]_0^2 = \left(\frac{(2-2)^3}{3}\right) - \left(\frac{(0-2)^3}{3}\right) = 0 - \frac{-8}{3} = \boxed{\frac{8}{3}\ u^2}$$

48. **[Reserva 1 de 2004] B)** El beneficio (B) mensual, en miles de euros, de una fábrica de camiones viene dado en función del número de camiones (x) fabricados en un mes por la expresión:

$$B(x) = 1,2\,x - (0,1\,x)^3$$

1) ¿Qué beneficio mensual obtiene si fabrica 10 camiones en ese mes? **2)** ¿Cuántos camiones tiene que fabricar en un mes para que el beneficio de ese mes sea máximo? **3)** ¿Cuál es ese beneficio máximo?

SOL:

1) B(10) = 1'2·10 – $(0'1\cdot 10)^3$ = $\boxed{11\ 000\ €}$.

2) Hallamos el máximo, derivando e igualando a cero.

B'(x) = 1'2 – 3·0'1 x^2 = 1'2 – 0'003 x^2; si igualamos cero tenemos:

$1'2 - 0'003x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \dfrac{1'2}{0'003} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\dfrac{1'2}{0'003}} = \pm\sqrt{400} = \pm 20$; como x son camiones desechamos la respuesta $x = -20$. $\boxed{\text{Debe fabricar 20 camiones.}}$

3) Y los beneficios máximos son: B(20) = 1'2·20 – $(0'1\cdot 20)^3$ = $\boxed{16\ 000\ €.}$

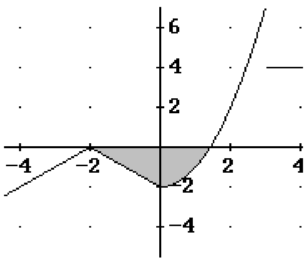
49. **[Reserva 2 de 2004] A)** Dada la función $f(x) = \begin{cases} -|x+2| & \text{si} \quad x \le 0 \\ x^2-2 & \text{si} \quad 0 < x \le 3 \\ 4 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$.

1) Representa gráficamente f. **2)** Estudia su continuidad en los puntos $x = 0$ y $x = 3$. **3)** Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f, y el eje OX.

SOL:

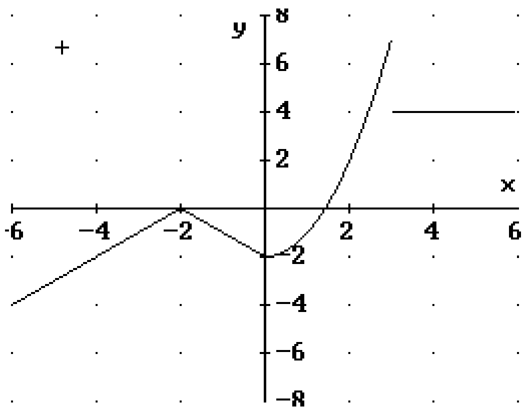
1) Véase la figura:

2) Como vemos es continua en $x = 0$ y no lo es en $x = 3$.



3) El área es la suma de las áreas (1) y (2)

Para hallar el área (2) necesitamos donde corta al eje X, se produce en $\sqrt{2}$



(1) = Área del triángulo = $\frac{2\cdot 2}{2} = 2\ \text{u}^2$

$$(2) = \int_0^{\sqrt{2}} (x^2 - 2)\,dx = \int_0^{\sqrt{2}} (x^2 - 4x + 4)\,dx = \left.\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x\right]_0^{\sqrt{2}} =$$

$$= \left(\frac{\left(\sqrt{2}\right)^3}{3} - 2\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2 + 4\cdot\sqrt{2}\right) - (0) = \frac{14\sqrt{2}}{3} - 4\ \text{u}^2 ....$$

Y el área total es: $2 + \frac{14\sqrt{2}}{3} - 4 = \boxed{\frac{14\sqrt{2}}{3} - 2\ \text{u}^2}$

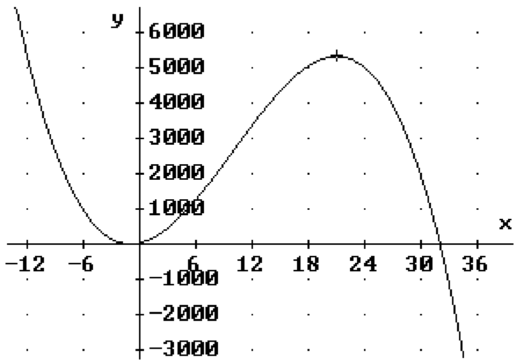
50. **[Reserva 2 de 2004]** **B)** La producción (P) en kg. de cierta hortaliza en un invernadero depende de la temperatura (t) de éste en grados centígrados y viene dada por la expresión:

$$P(t) = (t + 1)^2\,(32 - t).$$

1) ¿Qué producción se obtiene si la temperatura es de 18ºC? **2)** ¿A qué temperatura se produce la máxima producción? **3)** ¿Cuál es esa máxima producción?

SOL: $P(t) = (t+1)^2\cdot(32 - t)$

1) $P(18) = (18+1)^2\cdot(32 - 18) = \boxed{5\,054\text{ kg}}$



2) Hallamos máximos y mínimos, derivando e igualando a cero.

$P'(t) = 2\cdot(t + 1)\cdot(32 - t) + (t + 1)2\cdot(-1)$

$P'(t) = (2t + 2)\cdot(32 - t) - (t^2 + 2t + 1)$

$P'(t) = 64t - 2t^2 + 64 - 2t - t^2 - 2t - 1$

$P'(t) = -3t^2 + 60t + 63$; igualando a cero

$-3t^2 + 60t + 63 = 0$

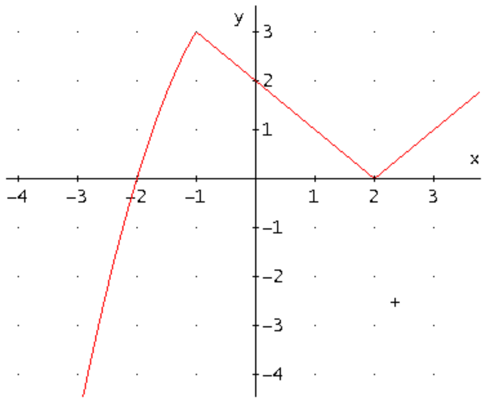
Se obtiene: $x_1 = -1$ $x_2 = 21$, (-1 la desechamos). Y es máximo como vemos en la figura.

A 21 grados se produce la máxima producción

3) Y la máxima producción es: $P(21) = (21 + 1)^2 \cdot (32 - 21) = \boxed{5\ 324 \text{ kg}}$

$\boxed{51.}$ **[Junio de 2005]** Dada la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4 & \text{si} \quad x \le -1 \\ |x-2| & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}$ **1)** Representa gráficamente f. **2)** Estudiar su continuidad. **3)** Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y eje de abscisas.

SOL:
1) Representación gráfica.



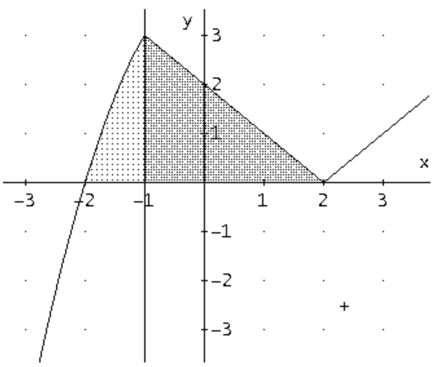
2) Las funciones componentes son continuas, luego sólo hay que ver la continuidad en el punto de unión.
En la representación gráfica se observa que la función es continua en todo $\mathbb{R}$. Estudiemos de todas formas la continuidad en $x = -1$.

$$\lim_{x \to -1} f(x) = f(-1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1-} \left(-x^2 + 4\right) = 3 \\ \lim\limits_{x \to -1+} |x-2| = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \exists \lim_{x \to -1} f(x) = 3 = f(-1)$$

y por tanto, la función es continua en $x = -1$.

3) Calculamos el área pedida.



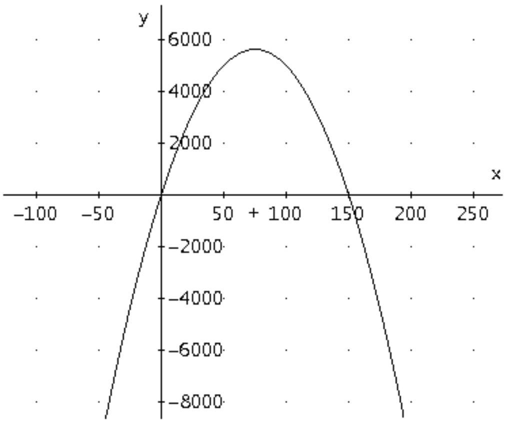
$$A = \int_{-2}^{-1} \left(-x^2 + 4\right) dx + \int_{-1}^{2} |x-2|\, dx =$$

$$= -\frac{x^3}{3} + 4x \Bigg|_{-2}^{-1} + \frac{9}{2} = \frac{5}{3} + \frac{9}{2} =$$

$$= \frac{37}{6} \text{ u}^2$$

$\boxed{52.}$ **[Junio de 2005]** Si la relación funcional entre la superficie de un cuadro y su base viene dada por S = 150 x – x^2 siendo x la base en cm. **1)** ¿Cuál es la superficie de un cuadro que tiene de base 25 cm.? **2)** ¿Qué dimensión ha de tener la base de un cuadro para tener una superficie máxima? **3)** ¿Cuál es esa superficie máxima?

SOL:



1) Hay que calcular $S(25)$:

$$S(25) = 150 \cdot 25 - 25^2 = 3125$$

Por tanto, la superficie del cuadro es 3 125 cm^2.

2) Maximizamos $S(x)$:

$$S'(x) = 150 - 2x$$
$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 75$$
$$S''(x) = -2$$
$$S''(75) < 0 \rightarrow x = 75 \text{ es un máximo rel.}$$

3) Hay que evaluar la función en el máximo obtenido.

$S(75) = 150 \cdot 75 - 75^2 = 5625$

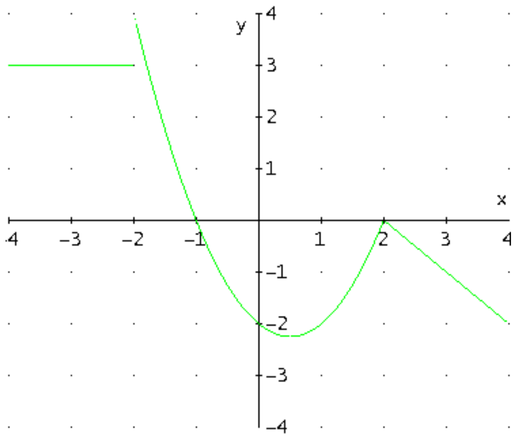
Así, la superficie máxima es de 5 625 cm^2.

$\boxed{53.}$ **[Septiembre de 2005]** Dada la función f(x) = $\begin{cases} 3 & \text{si} \quad x \le -2 \\ x^2 - x - 2 & \text{si} \quad -2 < x \le 2 \\ -x + 2 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

1) Representa gráficamente f. **2)** Estudia su continuidad. **3)** Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y eje de abscisas.

SOL:

1) Representación gráfica.

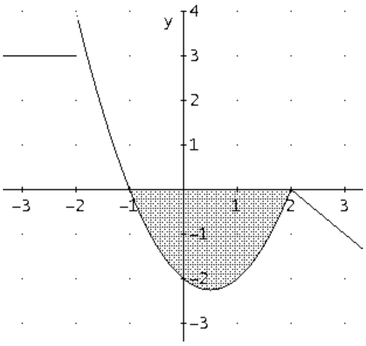


2) A la vista de la gráfica, observamos que la función no es continua en $x = -2$. Lo estudiamos analíticamente.

$$\lim_{x \to -2} f(x) = f(-2)$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -2-} 3 = 3 \\ \lim\limits_{x\to -2+}\left(x^2-x-2\right)=4\end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to -2} f(x)$$

y por tanto, la función presenta una discontinuidad de salto 1 en $x=-2$.



3) Calculamos el área pedida.

$$A=-\int_{-1}^{2}\left(x^2-x-2\right)dx = -\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\Big|_{-1}^{2} =$$

$$=\frac{9}{2}\ \text{u}^2$$

$\boxed{54.}$ **[Septiembre de 2005]** Cierta entidad financiera lanza al mercado un plan de inversión cuya rentabilidad, R en euros viene dada por:

$$R = -0{,}01\ x^2 + 5\ x + 2500$$

siendo x la cantidad que se invierte. **1)** ¿Qué rentabilidad obtiene un inversor que invierte 1000 euros? **2)** ¿Cuánto ha de invertir si quiere obtener una rentabilidad máxima? **3)** Calcula esa rentabilidad máxima.

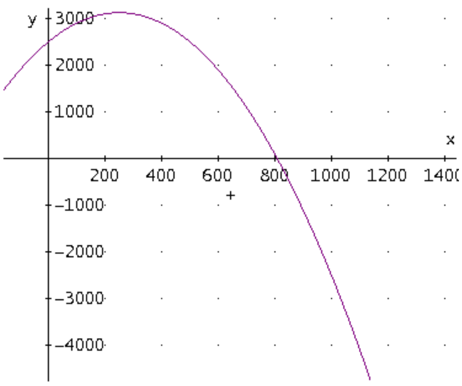
SOL:

1) Hay que calcular $R(1000)$:

$$R(1000) = -0{,}01\cdot 1000^2 + 5\cdot 1000 + 2500 = -2500$$

Por tanto, no hay beneficios, sino pérdidas.

2) Maximizamos la función.



$R'(x) = -0.02x+5$

$R'(x)=0 \Leftrightarrow x = 250$

$R''(x) = -0.02$

$R''(250)<0 \to x=250$ es un máx. rel.

Por tanto, para que la rentabilidad sea máxima tiene que invertir 250 euros.

3) La rentabilidad máxima es $R(250)$:

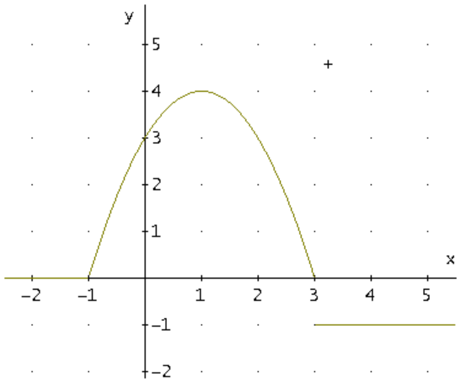
$$R(250) = -0.01\cdot 250^2 + 5\cdot 250 + 2500 = 3125$$

La rentabilidad máxima es de 3125 euros.

$\boxed{55.}$ **[Reserva 1 de 2005]** Dada la función f(x) = $\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x\le -1 \\ -x^2+2x+3 & \text{si} \quad -1<x\le 3 \\ -1 & \text{si} \quad x>3 \end{cases}$

1) Representa gráficamente f. **2)** Estudia su continuidad. **3)** Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f, el eje de ordenadas, la parte positiva del eje de abscisas y la recta x = 2.

SOL:
1) Representación gráfica.



2) A la vista de la gráfica, se observa que la función no es continua en $x=3$. Estudiemos de todas formas la continuidad en $x=-1$ y en $x=3$.

Continuidad en $x=-1$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1-} 0 = 0 \\ \lim\limits_{x\to -1+} \left(-x^2+2x+3\right)=0\end{array}\right\} \Rightarrow \exists \lim_{x\to -1} f\left(x\right)=0=f\left(-1\right)$$

y por tanto, la función es continua en $x=-1$.

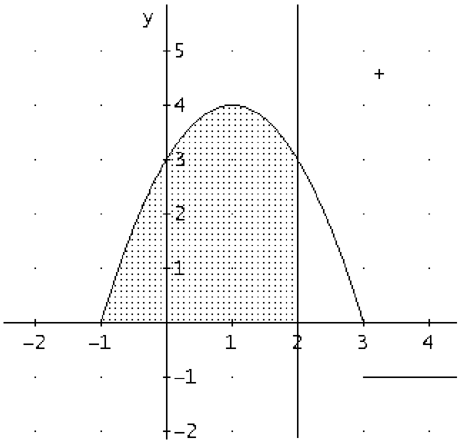
Continuidad en $x=3$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3-} \left(-x^2+2x+3\right)=0 \\ \lim\limits_{x\to 3+} \left(-1\right)=-1\end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 3} f\left(x\right)$$

esto es, la función presenta en $x=3$ una discontinuidad de salto 1.

Conclusión: $y=f\left(x\right)$ es continua en $\mathbb{R}-\{3\}$

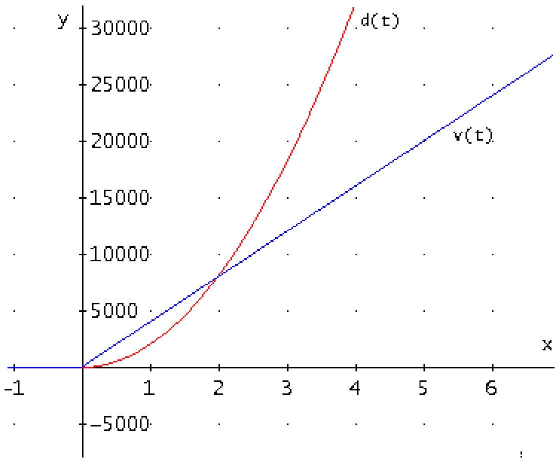
3) Calculamos el área pedida:



$$A=\int_{-1}^{2}\left(-x^2+2x+3\right)dx=-\frac{x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}+3x\Big|_{-1}^{2}=$$

$$=\frac{22}{3}-\left(-\frac{5}{3}\right)=\frac{27}{3}=9\ \text{u}^2$$

$\boxed{56.}$ **[Reserva 1 de 2005]** Un cohete se desplaza según la función d = 100 t +2000 t^2, en la que d es la distancia recorrida en km. y t el tiempo en horas. **1)** ¿A qué distancia del punto de salida estará cuando haya transcurrido 1 hora?, ¿y cuando hayan transcurrido 3 horas? **2)** Sabiendo que la función velocidad se obtiene derivando la función distancia, ¿cuál es la expresión de la función velocidad? **3)** ¿Qué velocidad ha alcanzado cuando han pasado 3 horas?



SOL:

1) $d(1) = 100 + 2000 = 2100$

El cohete se encuentra a 2 100 km cuando ha transcurrido una hora.

$d(3) = 100 \cdot 3 + 2000 \cdot 3^2 = 18300$

Cuando han transcurrido 3 horas, el cohete se encontrará a 18 300 km.

2) $v(t) = \frac{d}{dt} d(t)$

$v(t) = 100 + 4000t$

3) $v(3) = 100 + 4000 \cdot 3 = 12\ 100$

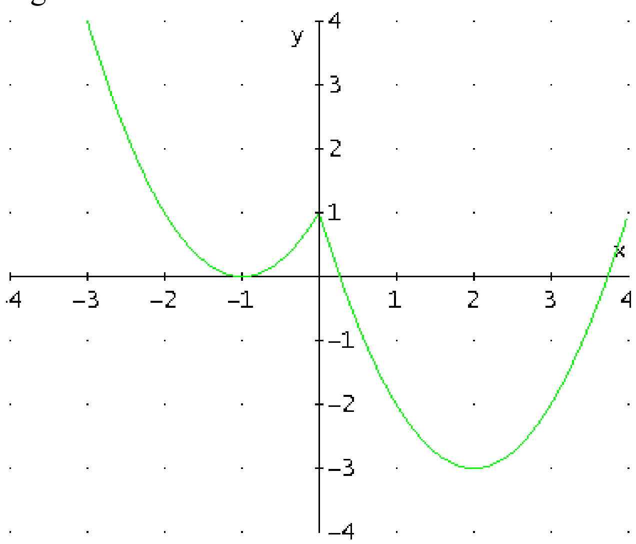
Al cabo de 3 horas, la velocidad del cohete es de 12 100 km/h.

$\boxed{57.}$ **[Reserva 2 de 2005]** Dada la función $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x^2 - 4x + 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

1) Representa gráficamente f. **2)** Estudia su continuidad **3)** Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f, el eje de abscisas y las rectas x = 1 y x = 2.

SOL:

1) Representación gráfica.

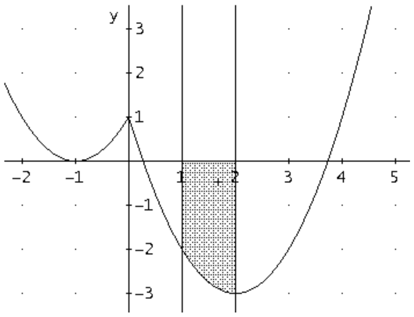


2) A la vista de su representación gráfica, resulta que la función es continua en todo $\mathbb{R}$.
Estudio analítico de la continuidad.
Cada una de las funciones componentes son continuas en todo $\mathbb{R}$, por ser funciones polinómicas. Veamos que la función también es continua en el punto de unión.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0-}(x+1)^2=1\\ \lim\limits_{x\to 0+}(x^2-4x+1)=1\end{array}\right\}\Rightarrow \exists \lim_{x\to 0} f(x)=1=f(0)$$

es decir, la función es continua en el origen, y por tanto, en todo $\mathbb{R}$.

3) Cálculo del área pedida.



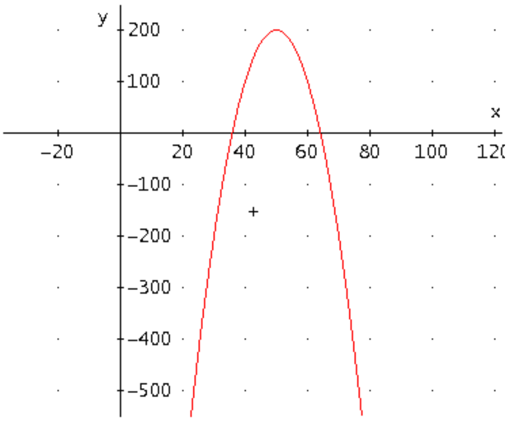
$$A=-\int_1^2 (x^2-4x+1)\,dx=-\left(\frac{x^3}{3}-\frac{4x^2}{2}+x\right)\Bigg|_1^2=$$

$$=-\left[-\frac{10}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)\right]=\frac{8}{3}\text{ u}^2$$

$\boxed{58.}$ **[Reserva 2 de 2005]** El técnico de un Hipermercado observa que si el precio al que venden la botella de agua es x céntimos de euro, sus beneficios vendrán dados por la expresión B = $-x^2 + 100x - 2300$ en euros al día. **1)** ¿Qué beneficio obtienen si venden la botella a 40 céntimos? **2)** ¿Qué precio deben poner a la botella para obtener un beneficio máximo? **3)** ¿Cuál será ese beneficio máximo?

SOL:

1) $B(40)=-40^2+100\cdot 40-2300=100$ €



2) Hay que maximizar $B(x)$:

$$B'(x)=-2x+100$$
$$B'(x)=0\Leftrightarrow x=50$$
$$B''(x)=-2$$
$$B''(50)<0\rightarrow x=50 \text{ es un máximo rel.}$$

Para que el beneficio sea máximo, tienen que vender cada botella a 50 céntimos.

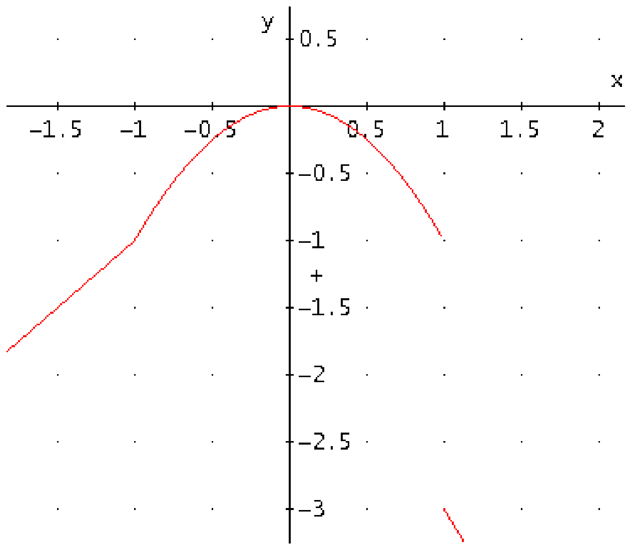
3) El beneficio máximo es:

$$B(50)=-50^2+100\cdot 50-2300=200 \text{ €}$$

$\boxed{59.}$ **[Junio de 2006] A)** Dada la función $f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x\le -1\\ -x^2 & \text{si } -1<x<1\\ x^2-4x & \text{si } x\ge 1\end{cases}$

1) Representa gráficamente f. **2)** Estudia su continuidad. **3)** Calcula el área del recinto limitado por el eje OX, la gráfica de f y las rectas x = 1 y x = 3

SOL:
1) Representación gráfica.



2) A la vista de la representación gráfica la función es continua en $\mathbb{R}-\{1\}$

Estudiemos analíticamente la continuidad.
Cada una de las funciones componentes son continuas en su dominio de definición, por se funciones polinómicas. Falta por estudiar la continuidad en los puntos de unión.

Continuidad en $x=-1$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1-} x=-1\\ \lim\limits_{x\to -1+}\left(-x^2\right)=-1\end{array}\right\}\Rightarrow \exists \lim_{x\to -1} f\left(x\right)=-1=f\left(-1\right)$$

y por tanto, la función es continua en $x=-1$.

Continuidad en $x=1$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1-}\left(-x^2\right)=-1\\ \lim\limits_{x\to 1+}\left(x^2-4x\right)=-3\end{array}\right\}\Rightarrow \nexists \lim_{x\to 1} f\left(x\right)$$

esto es, la función presenta una discontinuidad de salto 2 en $x=1$.

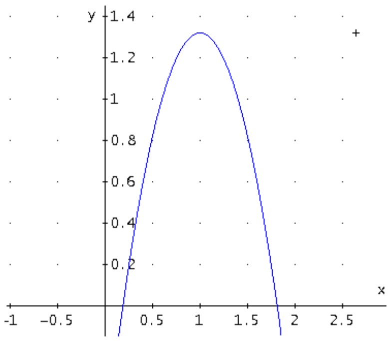
Resumen: La función dada es continua en $\mathbb{R}-\{1\}$.

$\boxed{60.}$ **[Junio de 2006] B)** El beneficio en euros por kilogramo de un alimento perecedero se estima que viene dado por la función

$$B(x) = 4x - 2x^2 - 0'68$$

donde x es el precio en euros de cada kilogramo del alimento. **1)** ¿Entre qué precios por kilogramo se obtienen beneficios? **2)** ¿A qué precio se obtiene el máximo beneficio? **3)** Si en un comercio se tienen 1000 kilogramos de ese alimento ¿Qué beneficio máximo puede obtener?

SOL:
1) Hay que estudiar el signo de la función.



$$B(x)=0 \Leftrightarrow x=\begin{cases} 1+\dfrac{\sqrt{66}}{10}\simeq 1.8124 \\ 1-\dfrac{\sqrt{66}}{10}\simeq 0.1876 \end{cases}$$

Por tanto, se tienen beneficios para precios en el intervalo $\left(1-\dfrac{\sqrt{66}}{10},\ 1+\dfrac{\sqrt{66}}{10}\right)\simeq(0.19,\ 1.81)$.

2) Hay que maximizar la función.

$B'(x)=4-4x$

$B'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$

$B''(x)=-4$

$B''(1)<0 \rightarrow x=1$ es un máximo relativo

Para que el beneficio sea máximo tienen que vender el kilogramo a 1 €.

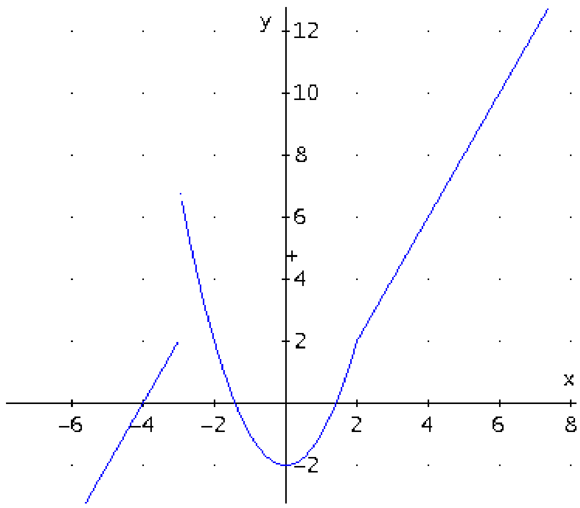
3) Si el comercio dispone de 1000 kg, y los vende a 1 €, el beneficio que obtienen es de 1000 €.

$\boxed{61.}$ **[Septiembre de 2006] A)** Dada la función $f(x)=\begin{cases} 2x+8 & \text{si} \quad x\le -3 \\ x^2-2 & \text{si} \quad -3<x<2 \\ 2x-2 & \text{si} \quad x\ge 2 \end{cases}$

1) Representa gráficamente f. **2)** Estudia su continuidad **3)** Calcula el área del recinto limitado por el eje OX, la gráfica de f y las rectas x = 0 y x = 1

SOL:

1) Representación gráfica.



2) A la vista de la representación gráfica, observamos que la función es continua en $\mathbb{R}-\{-3\}$.

Estudio analítico de la continuidad.

Continuidad en $x=-3$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-3-}(2x+8)=2\\ \lim\limits_{x\to-3+}(x^2-2)=7\end{array}\right\}\Rightarrow \nexists \lim_{x\to-3} f(x)$$

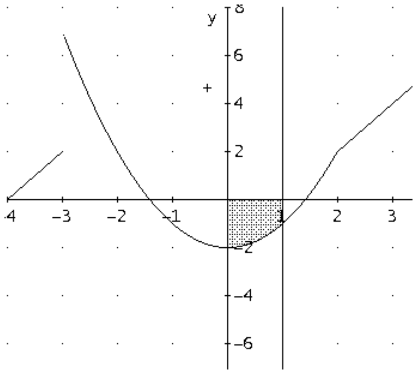
Esto es la función presenta en $x=-3$ una discontinuidad de salto 5.

Continuidad en $x=2$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to2-}(x^2-2)=2\\ \lim\limits_{x\to2+}(2x-2)=2\end{array}\right\}\Rightarrow \exists\lim_{x\to2} f(x)=2=f(2)$$

y así, la función es continua en $x=2$.

Resumen: La función dada es continua en $\mathbb{R}-\{-3\}$.



3) Calculamos el área pedida.

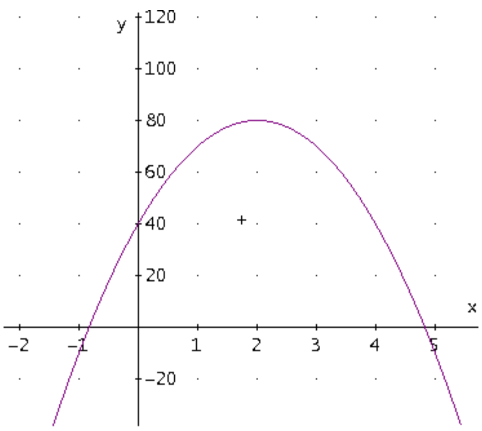
$$A=-\int_0^1(x^2-2)\,dx=-\left(\frac{x^3}{3}-2x\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=-\left(-\frac{5}{3}\right)=\frac{5}{3}\ \text{u}^2$$

$\boxed{62.}$ **[Septiembre de 2006] B)** La atención ante un anuncio de televisión (en una escala del 0 a 100) de 3 minutos de duración se comporta según la función

$A(t) = -10\ t^2 +40\ t +40$ con $0\le t \le 3$.

1) ¿A cuantos minutos de comenzar el anuncio se presta la máxima atención? **2)** Cuando finaliza el anuncio, ¿en qué punto de la escala de atención se está? **3)** ¿En qué punto de la escala de atención se está transcurrido 90 segundos?



SOL:

1) Hay que maximizar la función dada.

$A'(t)=-20t+40$

$A'(t)=0 \Leftrightarrow t=2$

$A''(t)=-20$

$A''(2)<0\to t=2$ es un máx. rel.

2) $A(3)=70$

Se encuentra en el punto 70 de la escala de atención.

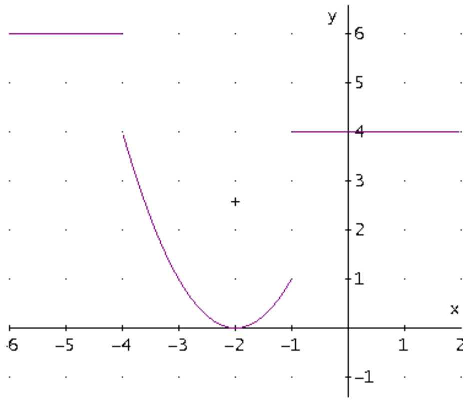
3) $A(1.5)=\dfrac{155}{2}=77.5$

Transcurridos 90 segundos se encuentra en el punto 77.5 de la escala de atención.

63. **[Reserva 1 de 2006] A)** Dada la función $f(x)=\begin{cases} 6 & \text{si} \quad x \le -4 \\ (x+2)^2 & \text{si} \quad -4 < x \le -1 \\ 4 & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}$

1) Representa gráficamente f. **2)** Estudia su continuidad **3)** Calcula el área del recinto limitado por el eje OX, la gráfica de f y las rectas x = -3 y x = -1

SOL:
1) Representación gráfica de la función:



2) A la vista de la gráfica la función es continua en $\mathbb{R}-\{-4,-1\}$.

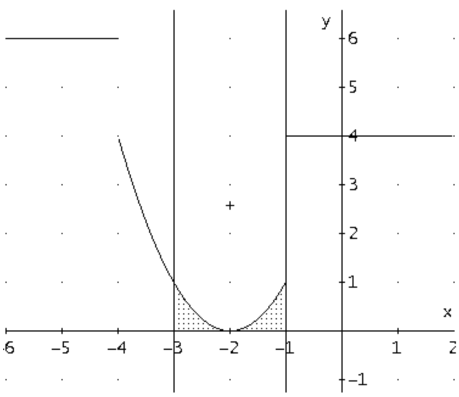
Estudio analítico de la continuidad.

Continuidad en $x=-4$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -4-} 6 = 6 \\ \lim\limits_{x\to -4+} (x+2)^2 = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to -4} f(x)$$

y por tanto, la función presenta en $x=-4$ una discontinuidad de salto 2.

Continuidad en $x=-1$:



$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1-} (x+2)^2 = 1 \\ \lim\limits_{x\to -1+} 4 = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to -1} f(x)$$

y así, la función presenta en dicho punto una discontinuidad de salto 3.

Resumen: La función es continua en $\mathbb{R}-\{-4,-1\}$.

3) Calculamos el área pedida:

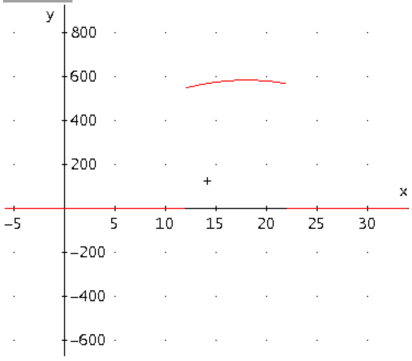
$$A=\int_{-3}^{-1}(x+2)^2\,dx = \left.\frac{x^2}{2}+2x\right|_{-3}^{-1} = \frac{1}{2}-2-\left(\frac{9}{2}-6\right) = \frac{2}{3}\ \mathrm{u}^2$$

64. **[Reserva 1 de 2006] B)** Unos grandes almacenes abren a las 10 horas y cierran a las 22 horas. Se ha comprobado que el número de visitantes puede representarse, en función de la hora del día, como:

$N(t) = -t^2 + 36t + 260$ con $10 \le t \le 22$

1) ¿Cuántos clientes han pasado por los almacenes a las 12 de la mañana? **2)** ¿A qué hora hay la máxima afluencia de clientes? **3)** ¿Cuál es el máximo número de clientes que registran? **4)** ¿Cuántos clientes quedan a la hora de cerrar?

SOL:



1) $N(12) = -12^2 + 36 \cdot 2 + 260 = 548$

A las 12 de la mañana hay en los grandes almacenes 548 personas.

2) Hay que maximizar $N(t)$:

$N'(t) = -2t + 36$

$N'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 18$

$N''(t) = -2$

$N''(18) < 0 \rightarrow x = 18$ es un máx. rel.

La hora de máxima afluencia son las 18 horas.

3) El número máximo de clientes a las 18 horas es: $N(18) = 584$.

4) Para ver el número de clientes que quedan a la hora de cerrar, hay que calcular $N(22)$:

$$N(22) = -22^2 + 36 \cdot 22 + 260 = 568$$

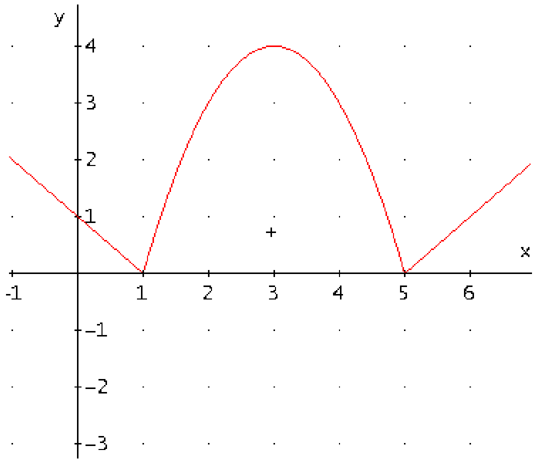
Esto es, a esa hora hay 568 clientes en los grandes almacenes.

$\boxed{65.}$ **[Reserva 2 de 2006] A)** Dada la función $f(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{si} \quad x \le 1 \\ -x^2+6x-5 & \text{si} \quad 1 < x < 5 \\ x-5 & \text{si} \quad x \ge 5 \end{cases}$

1) Representa gráficamente f. **2)** Estudia su continuidad **3)** Calcula el área del recinto limitado por el eje OX, la gráfica de f y las rectas x = 2 y x = 6

SOL:

1) Representación gráfica.



2) A la vista de la representación gráfica, observamos que la función es continua en $\mathbb{R}$.

Estudio analítico de la continuidad:

Cada una de las funciones componentes son continuas en su dominio de definición, luego falta por ver la continuidad en los puntos de unión.

Continuidad en $x=1$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1-}\left(-x+1\right)=0\\ \lim\limits_{x\to 1+}\left(-x^2+6x-5\right)=0\end{array}\right\}\Rightarrow \exists \lim_{x\to 1} f\left(x\right)=0=f\left(1\right)$$

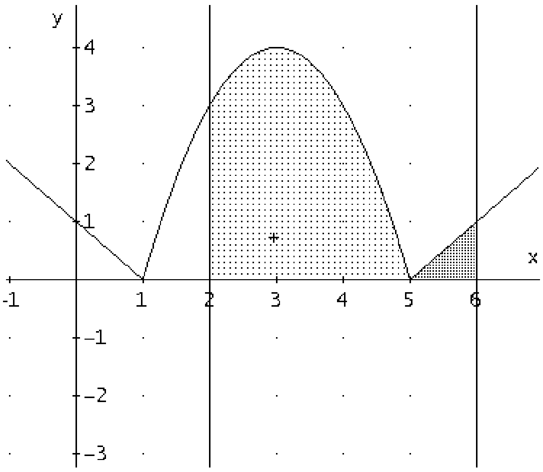
esto es, la función es continua en dicho punto.

Continuidad en $x=5$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 5-}\left(-x^2+6x-5\right)=0\\ \lim\limits_{x\to 5+}\left(x-5\right)=0\end{array}\right\}\Rightarrow \exists \lim_{x\to 5} f\left(x\right)=0=f\left(5\right)$$

y así, la función es continua en $x=5$.

Resumen: La función dada es continua en $\mathbb{R}$.



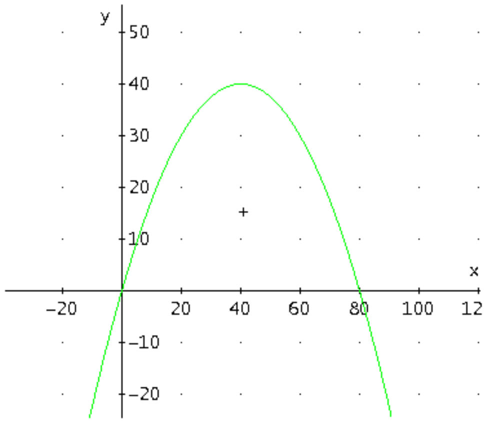
3) Calculamos el área pedida:

$$A=\int_2^5\left(-x^2+6x-5\right)dx+\int_5^6\left(x-5\right)dx=$$

$$=-\frac{x^3}{3}+\frac{6x^2}{2}-5x\Big|_2^5+\frac{x^2}{2}-5x\Big|_5^6=$$

$$=9+\frac{1}{2}=\frac{19}{2}\text{ u}^2$$

$\boxed{66.}$ **[Reserva 1 de 2006] B)** La trayectoria de una bala, medida en metros, viene dada por la función f(x) = (1/40)(-x^2 + 80x), donde x expresa el tiempo en segundos. **1)** ¿Cuántos metros recorre la bala transcurridos 39 segundos? **2)** ¿Cuántos segundos han de transcurrir para que la bala empiece a descender? **3)** ¿A qué altura máxima llega antes de comenzar a descender? **4)** ¿En qué momentos alcanza una altura de 30 m.?



SOL:

1) $f\left(39\right)=\dfrac{1599}{40}=39{,}975$ m

2) y 3) Hay que calcular el máximo de la función, o equivalentemente el punto donde la función decrece.

$$f'(x)=\frac{40-x}{20}$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=40$$

$$f''(x)=-\frac{1}{20}$$

$f''(40)<0 \rightarrow x=40$ es un máx. rel.

Por tanto, han de transcurrir 40 segundos para que la bala empiece a descender.

La altura máxima que alcanza es: $f(40)=40$ m.

4) $f(x)=30 \Leftrightarrow -x^2+80x=1200 \Leftrightarrow x=\begin{cases}20\\60\end{cases}$

Por tanto, la bala alcanza una altura de 30 m, a los 20 segundos y a los 60 segundos.