¿Existe un único infinito?

CANTOR Y LOS ÁLEF (χ): LOS CARDINALES TRANSFINITOS

Se llama ***cardinal*** de un conjunto, al número de elementos de éste. Se representa por $card(\ \cdot\ )$.

El ***cardinal del conjunto de los números naturales*** (que es infinito), es $card(\mathbb{N}) = \chi_0$ álef-0

- ¿Cuántos números pares hay? Pues exactamente los mismos que naturales (¿pero no son la mitad?). Y, ¿cuál es el cardinal del conjunto de los números enteros? ¿Y el del conjunto de los números racionales? Pues, sorpresa, igual que el de los números naturales, esto es, hay tantos números naturales, como números pares, y tantos como números enteros (que parece que hay el doble), y tantos naturales como racionales:

$$card(\mathbb{N}) = \chi_0 = card(\{\text{números pares}\}) = card(\mathbb{Z}) = card(\mathbb{Q})$$

El ***cardinal del conjunto de los números reales*** (que también es infinito), es $card(\mathbb{R}) = c$.

Se tiene que $c = card(\wp(\mathbb{N}))$ donde $\wp(\mathbb{N})$ es el conjunto de todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$.

George Cantor, en 1878, formuló la siguiente **hipótesis**:

$$\boxed{\text{Hipótesis del continuo: Para cada subconjunto infinito } A \text{ de } \mathbb{R}\text{, o bien } card(A)=\chi_0\text{, o bien } card(A)=c}$$

Otra sorpresa: Gödel, en 1938 demostró que la hipótesis del continuo no es falsa, y Cohen, en 1964, demostró, que tampoco es verdadera.

Una historia de genialidad, incomprensión, incompetencia y locura

Los cardinales transfinitos:

Se definen los cardinales transfinitos regulares como sigue:

$$\chi_0 = card(\mathbb{N})$$

$$\chi_1 = 2^{\chi_0}$$

$$\chi_2 = 2^{\chi_1}$$

$$\ldots$$

Reformulación de la hipótesis del continuo: $\chi_1 = c$

Ejemplos:

El conjunto de todas funciones reales de variable real, $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$, tiene cardinal $\chi_2 : card(F(\mathbb{R},\mathbb{R})) = \chi_2$

El conjunto de todas las funciones reales continuas es $\chi_1 : card(C(\mathbb{R},\mathbb{R})) = \chi_1$

Cipri