Unidad 6

INTEGRALES. APLICACIONES

CONTENIDOS

0.- INTRODUCCIÓN

La integral es una herramienta matemática que nos va servir en este curso, para determinar áreas de recintos planos. Pero la integral no solo sirve para calcular áreas de figuras planas, sino que también nos permite calcular volúmenes de cuerpos en el espacio, longitudes de curvas, áreas de superficies de revolución, etc.

Otras aplicaciones de la integral son: cálculo de masas, velocidades, centros de masas, probabilidades (como veremos en la unidad de “Inferencia Estadística”), y un sinfín de aplicaciones más.

1.- PRIMITIVAS

Sean $F, f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones reales de variable real. Se dice que F es una **primitiva** de f cuando $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in D$.

Ejercicio 1. *Comprueba, en cada caso, que F es una primitiva de f:*

1) $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3$ $\qquad f(x) = x^3 - 2x^2$

2) $F(x) = \ln|x|$ $\qquad f(x) = \frac{1}{x} + 2$

3) $F(x) = \cos x$ $\qquad f(x) = -\operatorname{sen} x$

Ejercicio 2. *Calcula una primitiva de las siguientes funciones:*

1) $y = x^2$	5) $y = x$
2) $y = \text{sen } x$	6) $y = x^3$
3) $y = 5x^4 - 2$	7) $y = \dfrac{1}{x}$
4) $y = e^{2x}$	8) $y = x + k$ con $k \in \mathbb{R}$

Nótese que si una función f tiene una primitiva F también $F + k$ (siendo $k \in \mathbb{R}$) es una primitiva de f .

Al conjunto de todas las primitivas de una función dada f , lo representaremos por

$$\int f(x)\,dx = \{F : F \text{ es una primitiva de } f\} = \{F : F'(x) = f(x)\}$$

y se lee: **integral indefinida de *f***.

Las siguientes propiedades se deducen de las correspondientes propiedades de las derivadas.

Propiedades inmediatas:

(1) $\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

(2) $\int c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int f(x)\,dx$ con $c \in \mathbb{R}$

Estas dos propiedades se pueden resumir diciendo que la integral indefinida se comporta bien con la suma y el producto por escalares. También diremos que la integral indefinida es lineal.

2.- INTEGRALES INMEDIATAS SIMPLES. TABLA

La siguiente tabla de integrales inmediatas se obtiene calculando la correspondiente primitiva de la función, por lo que es muy importante no perder nunca de vista de dónde han salido esas integrales, esto es, el concepto de primitiva de una función. Ahora bien, como se suelen usar mucho y son la base para calcular otras integrales más complejas es conveniente memorizar dicha tabla.

TABLA DE INTEGRALES INMEDIATAS

TIPOS	
	Simple
Potencial $n \neq -1$	$\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + k$
Logarítmico	$\int \dfrac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + k$
Exponencial	$\int e^x dx = e^x + k$ $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + k$
Seno	$\int \cos x\,dx = \text{sen } x + k$

Coseno	$\int \text{sen}\, x dx = -\cos x + k$
Tangente	$\int \left(1+\text{tg}^2 x\right) dx = \text{tg}\, x + k$

Ejercicio 3. *Calcula las siguientes integrales indefinidas inmediatas:*

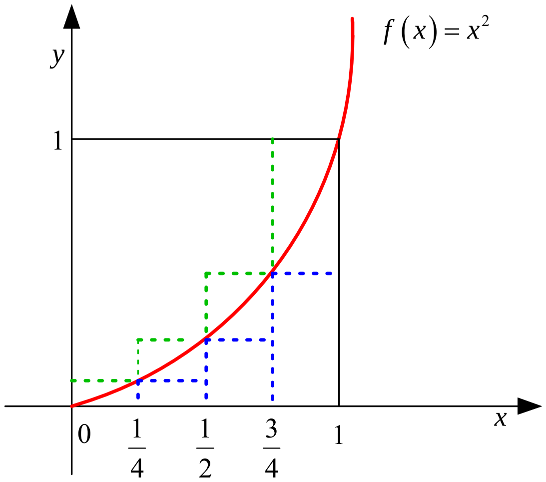
1) $\int 3dx$
2) $\int 7x^5 dx$
3) $\int \left(x^2-7\right) dx$
4) $\int \left(2x^3+3\right) dx$
5) $\int \left(x^4-12x^3-4x\right) dx$
6) $\int \left(x^2+3x+1\right) dx$
7) $\int (3x-1)(4x+2) dx$
8) $\int \left(5x^3+2x^2-4x+2\right) dx$
9) $\int \left(3x^5+4x^2-6\right) dx$
10) $\int \cos x\, dx$
11) $\int e^x dx$
12) $\int -\text{sen}x\, dx$
13) $\int 2^x 3^x dx$
14) $\int (x-3)(x+3) dx$
15) $\int \frac{2\cos x}{3} dx$
16) $\int \left(2^x - x^2\right) dx$
17) $\int \frac{2^x}{3^x} dx$
18) $\int \left(4x^2-7x+5\right) dx$
19) $\int \frac{1}{x^2} dx$
20) $\int \frac{x^3+x^2+x+1}{x} dx$
21) $\int \frac{x^3+2x^2-x+3}{4x^2} dx$
22) $\int \frac{2x^3-3x^2+4x-1}{2x} dx$
23) $\int \frac{x^5-4x^3+2x^2-3x+2}{3x^2} dx$
24) $\int \left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1\right) dx$
25) $\int \left(\frac{3}{x^4}-\frac{2}{4x^3}+\frac{1}{3x^2}-\frac{2}{3x}+\frac{1}{5}\right) dx$
26) $\int \left(\frac{2}{3x}-\frac{5}{4x^2}+\frac{3}{x^3}\right) dx$

3.- INTEGRAL DEFINIDA

El problema geométrico de la determinación del área de ciertas superficies planas es el origen y la base del Cálculo Integral. Se atribuye a Eudoxo (ca. 370 a.C.) la invención del ***método de exhaución***, una técnica para calcular el área de una región aproximando la por una sucesión de polígonos de forma que en cada paso se mejora la aproximación anterior. Arquímedes (287-212 a.C.) perfeccionó este método y, entre otros resultados, calculó el área de un segmento de parábola y el volumen de un segmento de paraboloide, así como el área y el volumen de una esfera.

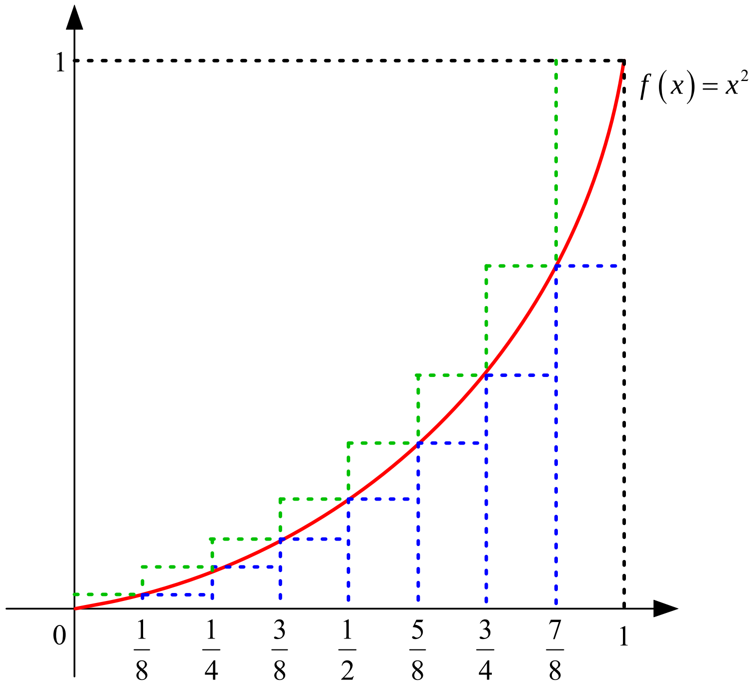
Las ideas expuestas por Arquímedes (en carta a Dositeo) son fundamentalmente las siguientes:

Se desea medir el área encerrada por el siguiente segmento parabólico (entre 0 y 1), que representaremos por *S*:



$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{4}\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\frac{9}{16}<S<\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{4}1^2$$

$$\frac{7}{32}<S<\frac{15}{32}\Leftrightarrow 0.22<S<0.47$$



$$\frac{1}{8}0^2+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{8}\right)^2+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{8}\left(\frac{3}{8}\right)^2+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{8}\left(\frac{5}{8}\right)^2+\frac{1}{8}\left(\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^2<S<$$

$$<\frac{1}{8}\left(\frac{1}{8}\right)^2+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{8}\left(\frac{3}{8}\right)^2+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{8}\left(\frac{5}{8}\right)^2+\frac{1}{8}\left(\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^2+\frac{1}{8}1^2$$

$$\frac{35}{128}<S<\frac{51}{128}\Leftrightarrow 0.27<S<0.40$$

Haciendo cada vez rectángulos de base más pequeña y aplicando la fórmula para sumar los primeros n cuadrados[1], se tiene que:

$$\frac{1}{n}\left(\frac{n(n-1)\frac{2n-1}{6}}{n^2}\right) < S < \frac{1}{n}\left(\frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^2}\right)$$

$$\frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3} < S < \frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3} \le S \le \lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3}$$

$$\frac{1}{3} \le S \le \frac{1}{3} \Rightarrow S = \frac{1}{3}$$

Como consecuencia de lo anterior, podemos dar la siguiente definición:

Representaremos por $\int_a^b f(t)\,dt$ el área del recinto limitado por la función $y = f(t)$ y las rectas verticales $t = a$ y $t = b$. Se lee **integral definida de *f* (*t*) entre *a* y *b***.

Si dejamos a fijo y hacemos que b sea variable, la expresión $\int_a^x f(t)\,dt$ para un x dado representa el área limitada por la función, la recta vertical $t = a$ y la vertical que pasa por x. Es por tanto, una función de x que llamaremos **función área**.

- **Propiedades inmediatas:**

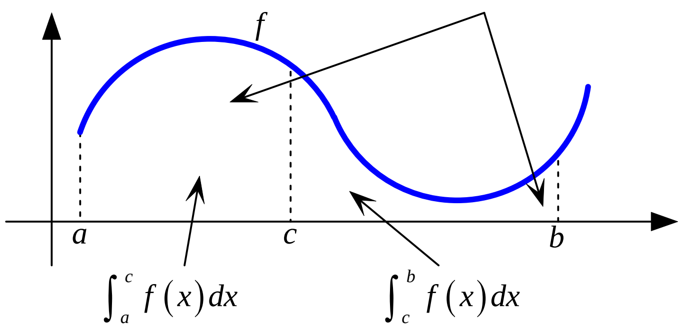
(1) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ (Es lo mismo que decir que un segmento tiene área cero)

(2) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$ (Para nosotros va a ser un simple convenio)

(3) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ para $a < c < b$

Si dividimos el área a calcular en dos trozos, el área total será igual a la suma de las áreas de cada uno de los trozos.

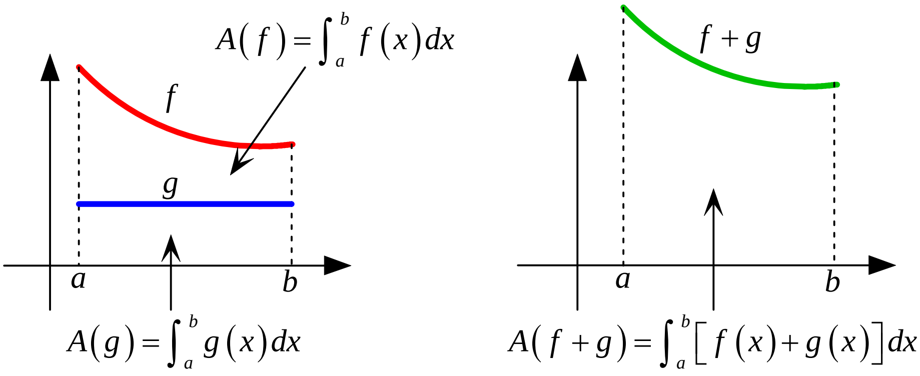
$$A(f) = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$



[1] La fórmula para sumar los n primeros cuadrados es: $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

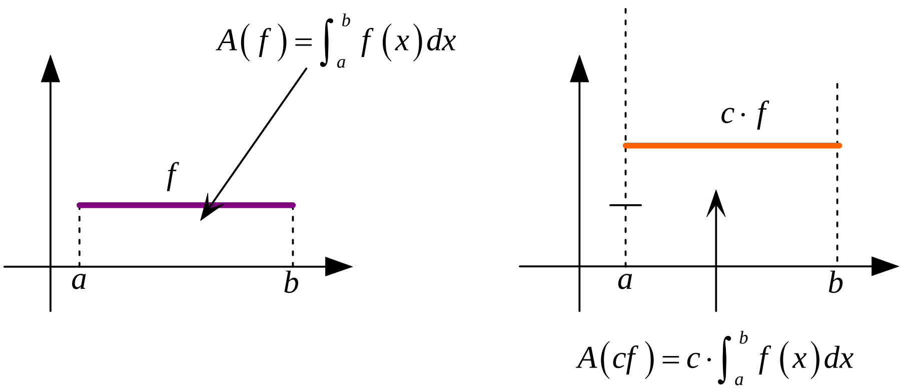
(4) $\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

La situación es la misma que en la propiedad 3, aunque un poco más delicada.



(5) $\int_a^b cf(x)\,dx = c\cdot\int_a^b f(x)\,dx$

La diferencia entre las gráficas de f y $c\cdot f$, es que cambiamos la escala de altura (en la segunda) en un factor c, y por tanto, el área también debe variar en dicho factor.



Teorema Fundamental del Cálculo[2]

$$\boxed{\text{Si } f(x) \text{ es continua en } [a,b] \text{ y } F(x)=\int_a^x f(t)\,dt, \text{ entonces } F'(x)=f(x)}$$

Una *consecuencia* importante del Teorema Fundamental del Cálculo es la siguiente:

> Toda función continua en un intervalo tiene primitivas en dicho intervalo.

Regla de BARROW[3]

> Si $f(x)$ es una función continua en $[a,b]$ y $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, entonces
> $$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b)-F(a)$$

Ejercicio 4. *Halla las siguientes integrales definidas:*

---

[2] Debido a Cauchy, muestra la estrecha relación entre dos partes del Cálculo (del Análisis), en principio tan distintas, como son el Cálculo Integral, con el vamos a calcular áreas, y el Cálculo Diferencial, que como hemos visto en la unidad anterior, sirve para calcular tangentes, extremos relativos de funciones…

[3] También se denomina Segundo Teorema Fundamental del Cálculo.

1) $\int_1^2 (x^2-5)\,dx$

2) $\int_2^5 (4x^5-7x^3+8x^2)\,dx$

3) $\int_4^9 (-5x^2+14x-24)\,dx$

4) $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$

5) $\int_2^3 2^x\,dx$

6) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \text{sen}\,x\,dx$

7) $\int_e^{2e} \frac{1}{x}\,dx$

8) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x dx$

9) $\int_0^5 (x^2+4x+4)dx$

10) $\int_1^e (x^{-1}+x-x^2)\,dx$

11) $\int_0^{\pi} \cos\frac{x}{2}\,dx$

12) $\int_{-2}^2 (4-x^2)\,dx$

4.- APLICACIÓN: CÁLCULO DE ÁREAS

Recinto Limitado por la curva *y = f (x)*, el eje OX y las rectas x = a y x = b

a) Si $f(x)\geq 0$ en todo el intervalo [a, b]

$$\boxed{S=\int_a^b f(x)\,dx}$$

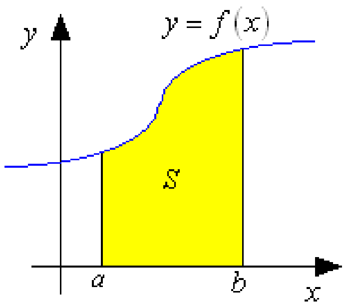
b) Si $f(x)\leq 0$ en todo el intervalo [a, b]

$$\boxed{S=-\int_a^b f(x)\,dx=\int_b^a f(x)\,dx}$$

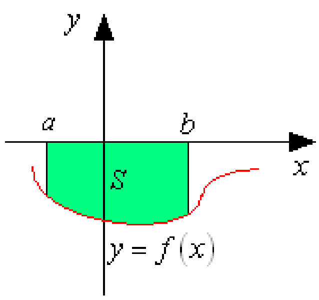
c) Si $f(x)$ corta al eje *OX* en el punto $c\in[a,b]$

$$\boxed{S=S_1+S_2=\int_a^c f(x)\,dx-\int_c^b f(x)\,dx}$$

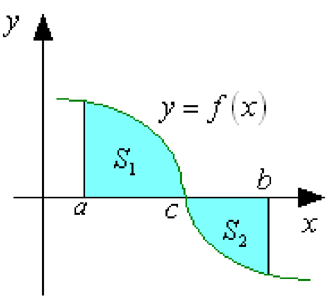
El punto *c* se halla resolviendo la ecuación $f(x)=0$.



(a)



(b)



(c)

Recinto limitado por dos curvas, *y = f (x)* e *y = g (x)*, en el intervalo [a, b]

a) Si $f(x)>g(x)$ en todo $[a,b]$

$$\boxed{S=\int_a^b \left(f(x)-g(x)\right)dx}$$

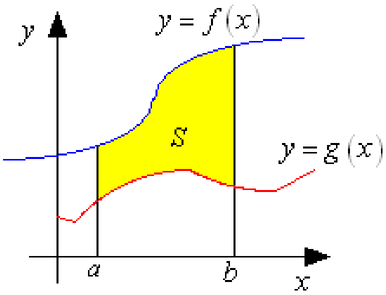
b) Si $f(x)$ y $g(x)$ se cortan en el intervalo [*a*, *b*] cuando *x* = *c*

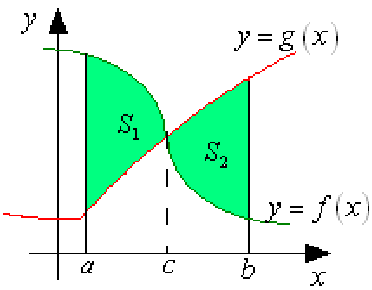
$$\boxed{S = S_1 + S_2 = \int_a^c \left(f(x) - g(x)\right)dx + \int_c^b \left(g(x) - f(x)\right)dx}$$

El valor c del punto de corte se halla resolviendo el sistema

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$$

También hay que determinar qué función está por encima en cada trozo.





(Usaremos el ordenador para las representaciones gráficas "más complejas")

<u>Ejercicio 5.</u> *Calcular el área encerrada por la función:* $f(x) = \dfrac{x-3}{2}$, *el eje OX, y las rectas x = 1 y x = 9.*

<u>Ejercicio 6.</u> *Calcular el área encerrada por la función:* $f(x) = x^2 - 3x + 4$, *el eje OX, y las rectas* $x = -1$ y $x = 4$.

<u>Ejercicio 7.</u> *Calcula el área limitada por la gráfica de la función* $y = \cos x$ *entre* $x = 0$, $x = \dfrac{3\pi}{2}$ *y el eje X. Realiza un esbozo del gráfico.*

<u>Ejercicio 8.</u> *Calcula el área de la región limitada por la función* $f(x) = x^2 - 4x + 3$, *las rectas* $x = 1$, $x = 3$ *y el eje X.*

<u>Ejercicio 9.</u> *Representa gráficamente la región limitada por las funciones* $y = x^2$ *e* $y = 2 - x^2$ *y obtén su área.*

<u>Ejercicio 10.</u> *Halla el área del recinto limitado por* $y = x^2 + 3$ e $y = x + 5$.

<u>Ejercicio 11.</u> *Halla, mediante técnicas de integración, el área del recinto limitado por* $y = 2x - 3$ *e* $y = -x + 6$ *y comprendido entre las abscisas* $x = 2, x = 4$ *y la ordenada* $y = 0$.

<u>Ejercicio 12.</u> *Representa la región limitada por las gráficas de las funciones* $f(x) = 4 - x^2$ y $g(x) = x + 2$ *y halla su área.*

<u>Ejercicio 13.</u> *Determina el área del recinto limitado por la parábola* $y = 2x - x^2$ *y la recta* $y + x = 0$.

<u>Ejercicio 14.</u> Calcula el área determinada por la gráfica de la curva $y = x^2 + ax + b$ *y las rectas* $x = -\frac{1}{2}$ *e* $y = 1$ *sabiendo que la función tiene un mínimo en* $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$.

<u>Ejercicio 15.</u> Halla el área de la figura comprendida entre la hipérbola $xy = 1$, *las rectas* $x = a \quad (a > 0)$, $x = 3a$ *y el eje X.*

<u>Ejercicio 16.</u> Se considera la función $f(x) = ax + b + \frac{8}{x}$. *Calcula* a y b *para que la gráfica de* f *pase por el punto* $(-2, -6)$ *y admita en dicho punto una tangente horizontal. Calcula también el área limitada por la gráfica de* f *y las rectas* $x = 1, x = 2$ e $y = 0$.

<u>5.- PROBLEMAS DE SELECTIVIDAD (P.A.U.)</u>

Reserva 2 de 2009 – Bloque 3 – A) Dada la función $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \le -4 \\ x^2 + 4x & \text{si} \quad -4 < x < 0 \\ x^2 - 3x & \text{si} \quad x \ge 0 \end{cases}$, se pide:

a) Dibuja su gráfica.
b) Estudia su continuidad en $x = -4$.
c) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función, el eje horizontal y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

Reserva 1 de 2009 – Bloque 3 – A) Dada la función $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \le -3 \\ (x+1)^2 & \text{si} \quad -3 < x < 1 \\ -4x + 8 & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$, se pide:

a) Dibuja su gráfica.
b) Estudia su continuidad en $x = -3$.
c) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función y el eje horizontal.

Septiembre de 2009 – Bloque 3 – A) Dada la función $f(x) = \begin{cases} -x - 2 & \text{si} \quad x \le -2 \\ \frac{x+2}{3} & \text{si} \quad -2 < x < 1 \\ -(x-2)^2 & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$, se pide:

a) Dibuja su gráfica.
b) Estudia su continuidad en $x = -2$.
c) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función, el eje OX y las rectas $x = 1$ y $x = 2$.

Junio de 2009 – Bloque 3 – A) Dada la función $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \le -2 \\ x^2 - 4 & \text{si} \quad -2 < x < 3 \\ (x-2)^2 & \text{si} \quad x \ge 3 \end{cases}$, se pide:

a) Dibuja su gráfica.

b) Estudia su continuidad en $x=-2$.
c) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función y el eje horizontal.

Reserva 2 de 2008 – Bloque 3 - A) Dada la función $f(x)=\begin{cases}-x^2+4 & \text{si } -2\le x<2\\ x-2 & \text{si } 2<x<3\\ (x-4)^2 & \text{si } x\ge 3\end{cases}$ **1)** Dibuja su gráfica. **2)** Estudia su continuidad. **3)** Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f los ejes de coordenadas y la recta $x = 3$.

Reserva 1 de 2008 – Bloque 3 - A) Dada la función $f(x)=\begin{cases}|x+1| & \text{si } x\le 0\\ (x-1)^2 & \text{si } x>0\end{cases}$ **1)** Dibuja su gráfica. **2)** Estudia su continuidad. **3)** Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función y el eje de abscisas.

Septiembre de 2008 – Bloque 3 - A) Dada la función $f(x)=\begin{cases}-x^2-2x+3 & \text{si } x\le 0\\ |x-3| & \text{si } x>0\end{cases}$ **1)** Dibuja su gráfica. **2)** Estudia su continuidad. **3)** Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función y el eje de abscisas.

Junio de 2008 – Bloque 3 - A) Dada la función $f(x)=\begin{cases}|x+2| & \text{si } x\le -1\\ k & \text{si } -1<x<1\\ (x-2)^2 & \text{si } x\ge 1\end{cases}$. **1)** Halla el valor de k para que la gráfica sea continua para $x=-1$. **2)** Para ese valor de k, dibuja la gráfica. **3)** Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas.

Reserva 2 de 2007 – Bloque 3 - A) Dada la función $f(x)=\begin{cases}x+2 & \text{si } x<-1\\ -x & \text{si } -1\le x\le 1\\ -(x-2)^2 & \text{si } x>1\end{cases}$. **1)** Dibuja su gráfica. **2)** Estudia su continuidad en el punto $x=1$. **3) C**alcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función y la parte positiva del eje OX.

Reserva 1 de 2007 – Bloque 3 - A) Dada la función $f(x)=\begin{cases}|x^2-2x| & \text{si } x\ge 0\\ 0 & \text{si } x<0\end{cases}$ **1)** Dibuja su gráfica. **2)** Estudia su continuidad en el punto $x = 0$ **3)** Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función y la parte positiva del eje OX

Septiembre de 2007 – Bloque 3 - A) Dada la función $f(x)=\begin{cases}x^2+4x+3 & si \quad x<0\\ (x-1)^2 & si \quad x\ge 0\end{cases}$ **1)** Dibuja su gráfica. **2)** Estudia su continuidad en el punto $x=0$. **3)** Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función y la parte negativa del eje OX.

Junio de 2007 – Bloque 3 - A) Dada la función $f(x)=\begin{cases}x^2-1 & si \quad x\le 0\\ (x-1)^2 & si \quad x>0\end{cases}$ **1)** Dibuja su gráfica. **2)** Estudia su continuidad en el punto x = 0 **3)** Calcula el área del recinto limitado por los ejes de coordenadas y la gráfica de la función.

Reserva 2 de 2006 Bloque 3 - A) Dada la función $f(x)=\begin{cases} -x+1 & si \quad x\le 1 \\ -x^2+6x-5 & si \quad 1<x<5 \\ x-5 & si \quad x\ge 5 \end{cases}$. **1)** Representa gráficamente **2)** Estudia su continuidad. **3)** Calcula el área del recinto limitado por el eje OX, la gráfica de $f(x)$ y las rectas $x=2$ y $x=6$

Reserva 1 de 2006 – Bloque 3 - A) Dada la función $f(x)=\begin{cases} 6 & si \quad x\le -4 \\ (x+2)^2 & si \quad -4<x\le -1 \\ 4 & si \quad x>-1 \end{cases}$ **1)** Representa gráficamente $f(x)$. **2)** Estudia su continuidad. **3)** Calcula el área del recinto limitado por el eje OX, la gráfica de $f(x)$ y las rectas $x=-3$ y $x=-1$.

Septiembre de 2006 – Bloque 3 - A) Dada la función $f(x)=\begin{cases} 2x+8 & si \quad x\le \text{-}3 \\ x^2-2 & si \quad \text{-}3<x<2 \\ 2x\text{-}2 & si \quad x\ge 2 \end{cases}$ **1)** Representa gráficamente $f(x)$. **2)** Estudia su continuidad. **3)** Calcula el área del recinto limitado por el eje OX, la gráfica de $f(x)$ y las rectas $x=0$ y $x=1$.

Junio de 2006 – Bloque 3 - A) Dada la función $f(x)=\begin{cases} x & si \quad x\le -1 \\ -x^2 & si \quad -1<x<1 \\ x^2-4x & si \quad x\ge 1 \end{cases}$ **1)** Representa gráficamente $f(x)$. **2)** Estudia su continuidad. **3)** Calcula el área del recinto limitado por el eje OX, la gráfica de $f(x)$ y las rectas $x=1$ y $x=3$.

Reserva 2 de 2005 - Bloque 3 - A) Dada la función $f(x)=\begin{cases} (x+1)^2 & si \quad x\le 0 \\ x^2-4x+1 & si \quad x>0 \end{cases}$ **1)** Representa gráficamente $f(x)$. **2)** Estudia su continuidad. **3)** Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x=1$ y $x=2$.

Reserva 1 de 2005 – Bloque 3 - A) Dada la función $f(x)=\begin{cases} 0 & si \quad x\le -1 \\ -x^2+2x+3 & si \quad -1<x\le 3 \\ -1 & si \quad x>3 \end{cases}$ **1)** Representa gráficamente $f(x)$. **2)** Estudia su continuidad. **3)** Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de $f(x)$, el eje de ordenadas, la parte positiva del eje de abscisas y la recta $x=2$.

Septiembre de 2005 – Bloque 3 - A) Dada la función $f\left(x\right)=\begin{cases} 3 & si & x\le -2 \\ x^2-x-2 & si & -2<x\le 2 \\ -x+2 & si & x>2 \end{cases}$ **1)** Representa gráficamente $f\left(x\right)$. **2)** Estudia su continuidad. **3)** Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de $f\left(x\right)$ y eje de abscisas.

Junio de 2005 - Bloque 3 - A) Dada la función $f(x)=\begin{cases} -x^2+4 & si & x\le -1 \\ \left|x-2\right| & si & x>-1 \end{cases}$ **1)** Representa gráficamente $f\left(x\right)$. **2)** Estudiar su continuidad. **3)** Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de $f\left(x\right)$ y eje de abscisas.

Reserva 2 de 2004 - Bloque 3 - A) Dada la función $f\left(x\right)=\begin{cases} -\left|x+2\right| & si & x\le 0 \\ x^2-2 & si & 0<x\le 3 \\ 4 & si & x>3 \end{cases}$. **1)** Representa gráficamente $f\left(x\right)$. **2)** Estudia su continuidad en los puntos x = 0 y x = 3. **3)** Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de $f\left(x\right)$, y el eje OX.

Reserva 1 de 2004 – Bloque 3 - A) Dada la función $f\left(x\right)=\begin{cases} x^2+4x+3 & si & x\le -1 \\ (x-2)^2 & si & x\ge 0 \end{cases}$. **1)** Representa gráficamente $f\left(x\right)$. **2)** Estudia su continuidad. **3)** Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de $f\left(x\right)$, el eje OX y el eje OY.

Septiembre de 2004 – Bloque 3 - A) Dada la función $f\left(x\right)=\begin{cases} x^2+3x+2 & si & x\le 0 \\ 2 & si & 0<x\le 1 \\ x^2-4x+5 & si & x>1 \end{cases}$. **1)** Representa gráficamente $f\left(x\right)$. **2)** Estudia su continuidad en los puntos $x=0$ y $x=1$. **3)** Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de $f\left(x\right)$, los ejes de coordenadas y la recta x = 2.

Junio de 2004 – Bloque 3 - A) Dada la función $f\left(x\right)=\begin{cases} -x^2-2x & si & x\le 0 \\ -1+2x & si & 0<x\le 1 \\ -x^2+2x & si & x>1 \end{cases}$. **1)** Representa gráficamente $f\left(x\right)$. **2)** Estudia su continuidad en los puntos x = 0 y x = 1. **3)** Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de $f\left(x\right)$, y las rectas $x=\frac{1}{2}$ y $x=\frac{3}{2}$

Reserva 2 de 2003 – Bloque 3 – B) Dada la función $f\left(x\right)=\begin{cases} \frac{-x+7}{3} & \text{si} & -5\le x\le -2 \\ -x^2+k & \text{si} & -2<x\le 2 \end{cases}$, se pide:

a) Calcula el valor de k para que la función sea continua en $x=-2$.
b) Representa la gráfica de f para el k obtenido en el apartado anterior.
c) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función, el eje OX y la recta $x=-5$.

Reserva 1 de 2003 – Bloque 2 – B) Dada la función $f(x)=\left|-\frac{1}{3}x^2+3\right|$. 1) Estudia la continuidad en $x=3$. b) Representa gráficamente f. c) Calcula el área del recinto limitado por el eje OX, la gráfica de f y la recta $x=2$.

Septiembre de 2003 – Bloque 3 – B) Dada la función $f(x)=\begin{cases}-x^2+5x-4 & \text{si} \quad x\le 3\\ x+k & \text{si} \quad x>3\end{cases}$, se pide:

a) Calcula el valor de k para que la función sea continua en $x=3$.
b) Representa la gráfica de f para el k obtenido en el apartado anterior.
c) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función, el eje OX y las rectas $x=1$ y $x=2$.

Junio de 2003 – Bloque 2 – B) Dada la función $f(x)=\begin{cases}-x^2+kx & \text{si} \quad 0\le x\le 2\\ x^2-6x+10 & \text{si} \quad x>2\end{cases}$, se pide:

a) Calcula el valor de k para que la función sea continua en $x=2$.
b) Representa la gráfica de f para el k obtenido en el apartado anterior.
c) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función, el eje OX y la recta $x=4$

Reserva 1 de 2002 – Bloque 2 – A) Dada la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1} & \text{si } 0\le x\le 1\\ x & \text{si } 1<x<3\\ 6-x & \text{si } 3\le x\le 4\end{cases}$

a) Estudia la continuidad de f.
b) Representación gráfica de f.
c) Calcula el área del recinto limitado por el eje OX, la gráfica de f y las rectas $x=2$ y $x=4$.

Septiembre de 2002 – Bloque 2 – A) Dada la función $f(x)=\begin{cases}3x & \text{si} \quad 0\le x<2\\ -x^2+10x-9 & \text{si} \quad 2\le x\le 9\end{cases}$, se pide:

a) Estudia la continuidad de f.
b) Representación gráfica de f.
c) Calcula el área del recinto limitado por el eje OX, la gráfica de f y las rectas $x=2$ y $x=3$.

Junio de 2002 – Bloque 2 – B) Determina el valor de a para que el área comprendida por la gráfica de la función $f(x)=ax^2+2$, el eje OX y las rectas $x=-1$ y $x=2$ sea 21 unidades de área.

Reserva 2 de 2001 – Bloque 1- B) Dada la función $f(x)=\begin{cases} |x+1| & si \quad x\le 0 \\ -x^2+1 & si \quad 0<x\le 2 \\ -2 & si \quad x>2 \end{cases}$.

Se pide: a) Estudia la continuidad de f. B) Representación gráfica de f. c) Calcula el área del recinto cerrado que delimita la gráfica de la función con el eje OX.

Reserva 1 de 2001 – Bloque 2 – A) Dada la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{-1}{x} & si \quad x<0 \\ x^2+1 & si \quad 0\le x<2 \\ 5x+15 & si \quad x\ge 2 \end{cases}$

Se pide: a) Estudiar la continuidad de f. b) Representación gráfica de f. c) Área del recinto limitado por la gráfica de $f(x)$, los ejes de coordenadas y la recta $x=2$.

Septiembre de 2001 – Bloque 3 – B) Dada la función $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & si \quad x\le 2 \\ \dfrac{6}{x} & si \quad x>2 \end{cases}$

Se pide: a) Estudiar la continuidad de f. b) Representación gráfica de f. c) Área del recinto cerrado que delimita la gráfica de $f(x)$ y el eje OX.

Junio de 2001 – Bloque 3 – B) Dada la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{-1}{x} & si \quad x<0 \\ x^2+1 & si \quad 0\le x<2 \\ 5x+15 & si \quad x\ge 2 \end{cases}$

Se pide: a) Hallar el valor de t para que la fusión sea continua en todos los números reales. b) Para el valor de t obtenido en el apartado anterior, representa gráficamente la función f. c) Para el valor de t obtenido en el apartado anterior, calcula el área del recinto limitado por la gráfica de $f(x)$ y el eje OX.

Reserva 2 de 2000 – Bloque 3 – B) Dada la función $f(x)=\begin{cases} x^2+a & si \quad x\le 0 \\ -x^2+(a-1)x+3 & si \quad x>0 \end{cases}$

Se pide: a) Determinar el valor de a para que f sea continua en $x=0$. b) Para el valor de a calculado en el apartado anterior, dibujar la gráfica de f. c) Calcular el área del recinto plano limitado por la gráfica de $f(x)$, el eje OX y las rectas $x=-1$ y $x=1$.

Septiembre de 2000 – Bloque 2 – B) Dada la función $f(x)=\begin{cases} 2 & si \quad x<-3 \\ |x+1| & si \quad -3\le x<0 \\ 2x^2-4x+3 & si \quad x\ge 0 \end{cases}$

Se pide: a) Estudiar la continuidad de la función. b) Representación gráfica de f. c) Calcular el área de la región del plano limitada por la gráfica de $f\left(x\right)$, el eje OX, el eje OY y la recta $x=3$.

Junio de 2000 – Bloque 1 – B) Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{3}{x} & si \quad x\leq\dfrac{-3}{2} \\ 2x+1 & si \quad \dfrac{-3}{2}\leq x<0 \\ x^2+1 & si \quad x\geq 0 \end{cases}$$

Se pide: a) Estudiar la continuidad de f. b) Representación gráfica de f. C) Calcular el área del recinto plano limitado por la gráfica de $f\left(x\right)$, el eje OX, el eje OY y la recta $x=3$.