UNIDAD 6: FUNCIONES ELEMENTALES

0. INTRODUCCIÓN

Puesto que la gráfica $G_f = \{(x, y) : y = f(x)\}$ de una función real de variable real es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$, su representación gráfica en un plano cartesiano será un recurso útil para el análisis de las funciones, por lo que uno de los objetivos fundamentales de la unidad es saber representar las funciones elementales.

1. FUNCIONES POLINÓMICAS

1.1. FUNCIONES AFINES

Las ***funciones afines*** son funciones de la forma

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = mx + n$$

donde a y b son números reales no nulos.

Si $n = 0$ y $m \neq 0$, entonces la función

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = mx$$

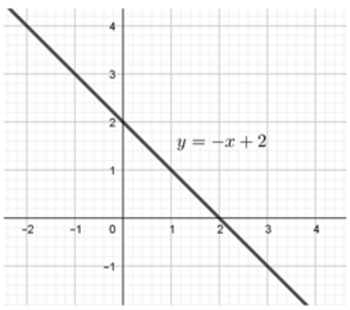
recibe el nombre de ***función lineal***.

Por último, la función

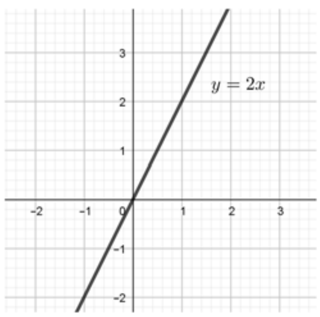
$$f : \mathbb{R} \to \{n\}$$
$$f(x) = n$$

recibe el nombre de ***función constante***.

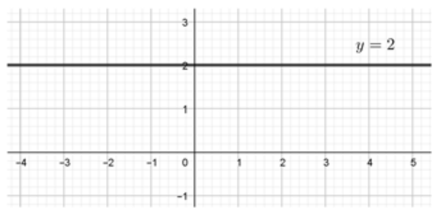
Geométricamente estos tres tipos de funciones representan rectas en el plano. Para dibujarlas, basta con construir una tabla de valores (con dos valores).



$f(x) = -x + 2$



$f(x) = 2x$



$f(x) = 2$

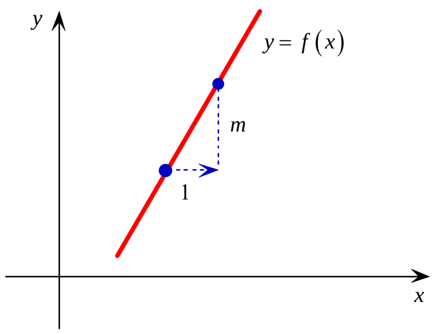
Recuerda también que todas las funciones lineales pasan por el origen de coordenadas.

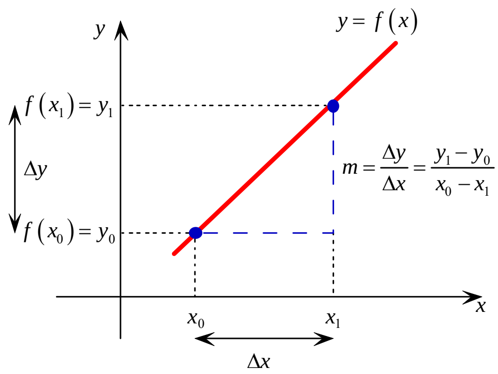
Algunas **propiedades** de las funciones afines, lineales y constantes son:

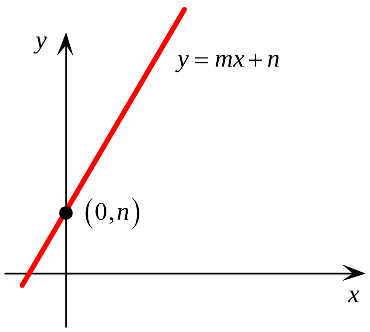
- Dominio: $(-\infty,+\infty)$
- Imagen o recorrido: $\begin{cases} -\text{ Afines y lineales: } (-\infty,+\infty) \\ -\text{ Constantes: } \{n\} \end{cases}$
- Monotonía[1]: $\begin{cases} -\text{ Afines y lineales: } \nearrow\nearrow \text{ si } m>0 \text{ y } \searrow\searrow \text{ si } m<0 \\ -\text{ Constantes: como su nombre indica son constantes} \end{cases}$
- Extremos relativos: No tienen

El número m se denomina ***pendiente*** (indica la inclinación de la recta respecto del eje de abscisas) y el número n, ***ordenada en el origen*** (coordenada y del punto donde la recta corta al eje ordenadas).

La **interpretación geométrica de la pendiente y de la ordenada en el origen** es la siguiente:







1.2. FUNCIONES CUADRÁTICAS

Son funciones de la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

donde $a,c,b \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$.

Geométricamente representan parábolas, para cuya representación seguiremos los siguientes pasos:

1) Se calcula el vértice:

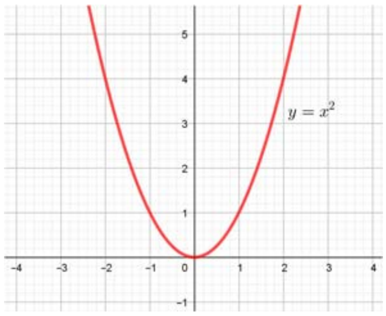
$$V(x_v, y_v) \text{ donde } \begin{cases} x_v = \dfrac{-b}{2a} \\ y_v = f(x_v) = \text{ sustituir la } x \text{ anterior en la función} \end{cases}$$

---

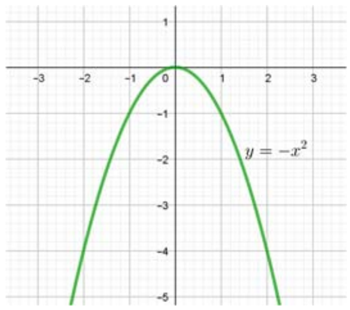
[1] $\nearrow\nearrow$ indica que la función es estrictamente creciente y $\searrow\searrow$ que es estrictamente decreciente.

2) Se calculan los puntos de corte con el eje OX, si los hay, para lo que hay que resolver la ecuación $ax^2+bx+c=0$. Si queremos que la gráfica sea aún más precisa, calcularemos también el punto de corte con el eje OY.
3) Solo se aplica si no hemos podido usar 2). Se construye una tabla de valores con dos valores a la izquierda del vértice y otros dos a la derecha de este.

Recuerda que la parábola está abierta hacia arriba (es convexa) cuando $a>0$, y está abierta hacia abajo (es cóncava) cuando $a<0$.



$y=x^2$



$y=-x^2$

Cuando la función está escrita en la forma

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

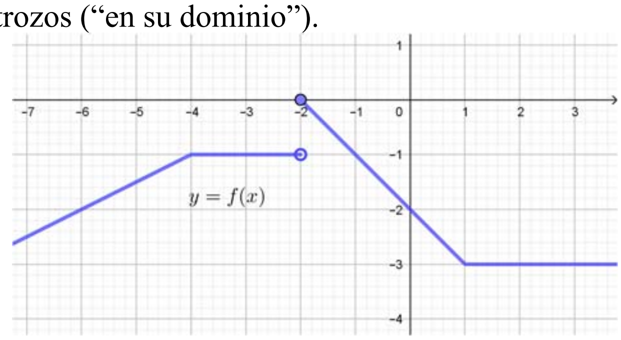
se dice que está en forma polinómica o general, pero también se puede escribir de las siguientes dos formas:

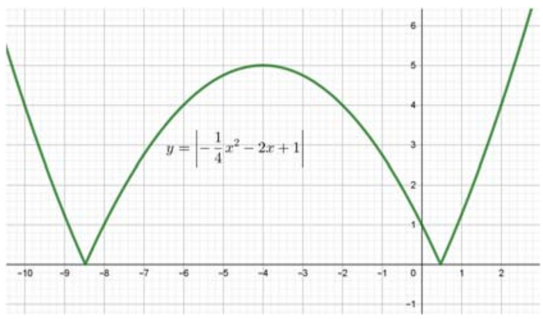
- Forma canónica: $f(x)=a(x-x_v)^2+y_v$ donde (x_v,y_v) es el vértice
- Forma factorizada: $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$ donde x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación $f(x)=0$.

2. FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS

2.1. FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS GENERALES

Para su representación gráfica basta con hacer la correspondiente representación de cada uno de los trozos ("en su dominio").





2.2. FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO

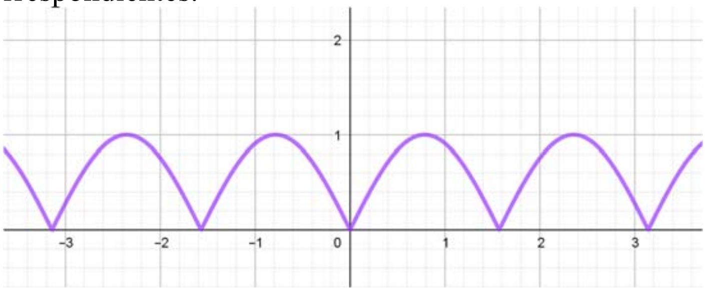
La **función valor absoluto** de una función $f(x)$, se define por:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{si} \quad f(x) < 0 \end{cases}$$

Para su **representación gráfica** usaremos cualquiera de los siguientes dos procedimientos:

(1) Representar $f(x)$ y los trozos de curva que estén en la parte negativa del eje OY ponerlos positivos (mediante sus simétricos)

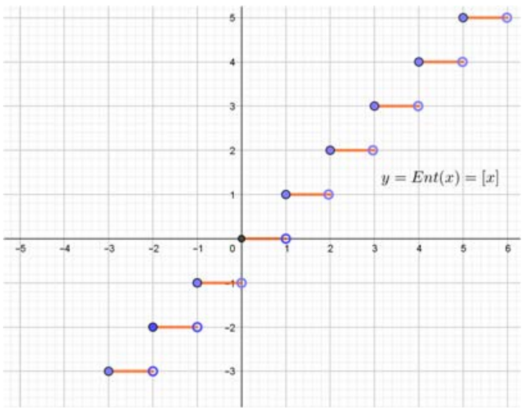
(2) Escribir la función $y = |f(x)|$ como una función definida a trozos, y representar cada uno de los trozos correspondientes.



2.3. <u>FUNCIÓN PARTE ENTERA</u>

La **<u>función parte entera</u>** es la función que a cada número real le hace corresponder el mayor número entero que es menos o igual que él.

Se designa por $f(x) = E[x]$ y su representación gráfica es:



<u>3. APLICACIÓN: FUNCIONES DE OFERTA Y DEMANDA</u>

La *función o curva de demanda* del mercado muestra la relación entre la cantidad demandada de un bien por todos los individuos y su precio, manteniendo constantes otros factores (gustos, renta, precio de bienes relacionados…)

La **función de demanda**, $f_d(p)$, para cualquier bien o producto, es la función que nos da el número de unidades de producto en función del precio, p, de cada unidad que los consumidores están dispuestos a comprar.

En su expresión matemática más simple la función de demanda puede ser:

– Lineal: $f_d(p) = mp + n$ con $m < 0$
– Cuadrática: $f_d(p) = ap^2 + bp + c$ con $a < 0$

La *función o curva de oferta* del mercado muestra la relación entre la cantidad ofrecida de un bien por todos los productos y su precio, manteniendo constante otros factores (tecnología, precio de factores productivos…).

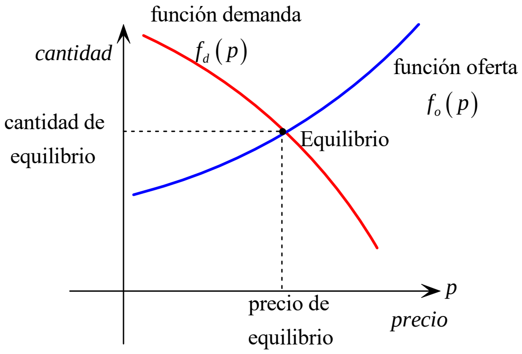
La **función de oferta**, $f_o(p)$, para cualquier bien o producto, es la función que nos da el número de unidades que los fabricantes están dispuestos a producir en función del precio unitario del producto.

En su expresión matemática más simple la función de oferta puede ser:
– Lineal: $f_o(p) = mp + n$ con $m > 0$
– Cuadrática: $f_o(p) = ap^2 + bp + c$ con $a > 0$

Cuando se ponen en contacto consumidores y productores con sus respectivas funciones de demanda y oferta, podemos analizar cómo se lleva a cabo la coordinación de ambos tipos de agentes. Para ello debemos realizar un estudio conjunto de las gráficas de ambas funciones.

La **cantidad de equilibrio** es el número de unidades del producto que se debe fabricar para que la oferta y la demanda sean iguales.

El precio correspondiente a la cantidad de equilibrio, es decir, aquel precio en el que coinciden los planes de los demandantes o consumidores y de los ofertantes o productores se llama **precio de equilibrio**.



4. FUNCIONES RACIONALES

4.1. FUNCIONES DE PROPORCIONALIDAD INVERSA

Son funciones de la forma

$$f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\}$$
$$f(x) = \frac{k}{x}$$

donde k es un número real no nulo.

Geométricamente representan hipérbolas equiláteras cuyas asíntotas son los ejes coordenados.

4.2. FUNCIONES RACIONALES ESPECIALES

Son funciones de la forma

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$$

Para su **representación gráfica** (que es una hipérbola) construiremos una tabla de valores y a partir de ella deduciremos sus **propiedades**.

Estas gráficas poseen las siguientes asíntotas:

* Asíntota horizontal: $y=\frac{a}{c}$

* Asíntota vertical: $cx+d=0 \Leftrightarrow x=-\frac{d}{c}$

5. TRANSFORMACIONES DE FUNCIONES

Este es un procedimiento para representar de forma rápida muchas funciones, conociendo la gráfica de algunas funciones básicas $\left(y=x,\ y=x^2,\ y=\frac{1}{x},...\right)$

5.1. Traslaciones

Sea $c>0$. Las traslaciones horizontal y vertical de la gráfica de $y=f(x)$ se representan como sigue:

a) Traslación vertical de c unidades hacia arriba: $f(x)+c$

b) Traslación vertical de c unidades hacia abajo: $f(x)-c$

c) Traslación horizontal de c unidades hacia la derecha: $f(x-c)$

d) Traslación horizontal de c unidades hacia la izquierda: $f(x+c)$

5.2. Reflexiones

Las reflexiones (imágenes en el espejo) con respecto a los ejes de coordenadas de la gráfica de $y=f(x)$ se representan por:

a) Reflexión con respecto al eje OX : $-f(x)$

b) Reflexión con respecto al eje OY : $f(-x)$

5.3. Procedimiento

Seguiremos los siguientes **pasos**:

Partimos de la función básica $\left(y=x,\ y=x^2,\ y=\frac{1}{x},...\right)$ que notaremos por $f(x)$ y queremos representar la función $-f(x+k)+h$:

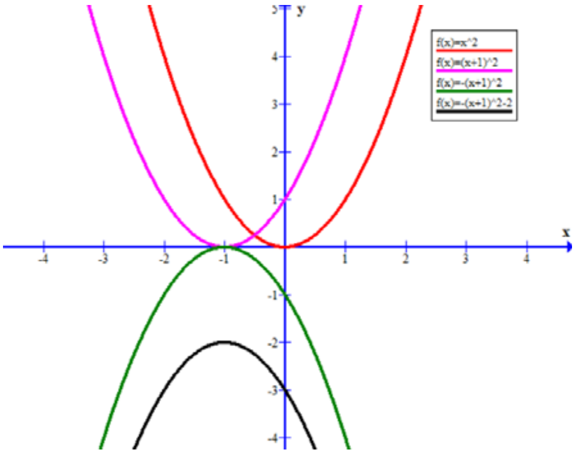
(1º) Se representa la función básica $f(x)$.

(2º) Traslaciones horizontales: representamos $f(x+k)$

(3º) Reflexiones: representamos $-f(x+k)$

(4º) Traslaciones verticales: representamos $-f(x+k)+h$

Ejemplo: Representar $y=-(x+1)^2-2$



Pasos:

1º) $y=x^2$

2º) $y=(x+1)^2$

3º) $y=-(x+1)^2$

4º) $y=-(x+1)^2-2$

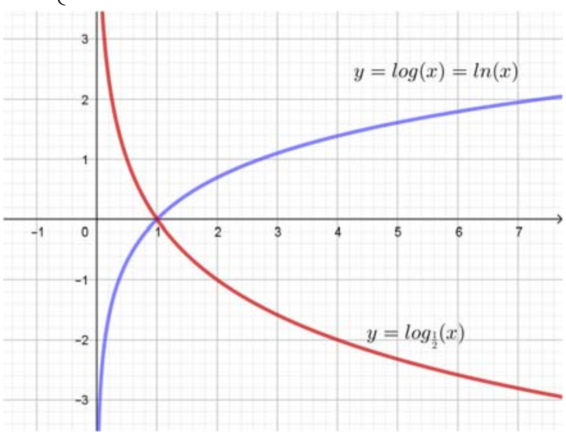
6. FUNCIONES LOGARÍTMICAS

■ **Función logaritmo de base** $a(>0 \text{ y } \neq 1)$

$$\begin{aligned} \log_a : (0,+\infty) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \log_a x \end{aligned}$$

Propiedades:

1) $\mathrm{Dom}(\log_a) = (0,+\infty)$
2) $\mathrm{Img}(\log_a) = \mathbb{R}$
3) Continua y estrictamente monótona (creciente si $a>1$ y decreciente si $a<1$)
4) Tiene inversa que es la función exponencial de base a.
5) $$\text{Si } a>1 \begin{cases} \lim_{x\to 0+} \log_a x = -\infty \\ \lim_{x\to +\infty} \log_a x = +\infty \end{cases}$$
$$\text{Si } a<1 \begin{cases} \lim_{x\to 0+} \log_a x = +\infty \\ \lim_{x\to +\infty} \log_a x = -\infty \end{cases}$$
6) Curvatura: $f(x)$ es $\begin{cases} \text{convexa si } a<e \\ \text{cóncava si } a \geq e \end{cases}$

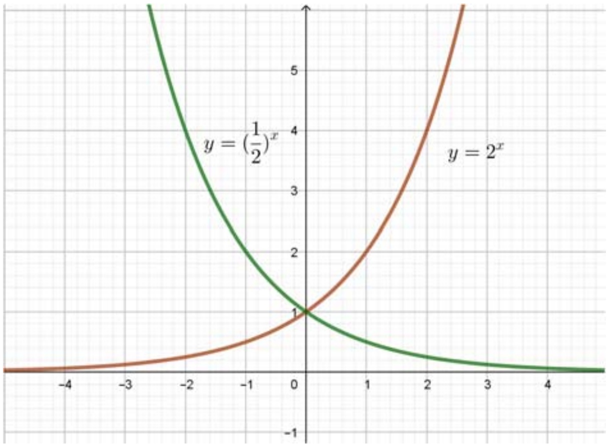


7. FUNCIONES EXPONENCIALES

■ **Dos funciones exponenciales**

$$f(x)=2^x$$

$$g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$$



Propiedades de $f(x)$:

1) $\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}$
2) $\mathrm{Img}(f)=\mathbb{R}^+$
3) f está acotada inferiormente, pero no superiormente
4) f no es par ni impar
5) f es continua
6) f es estrictamente creciente
7) Tiene inversa
8) f no tiene extremos relativos
9) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ y $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
10) $f^{-1}(x)=\log_2(x)$

Propiedades de $g(x)$:

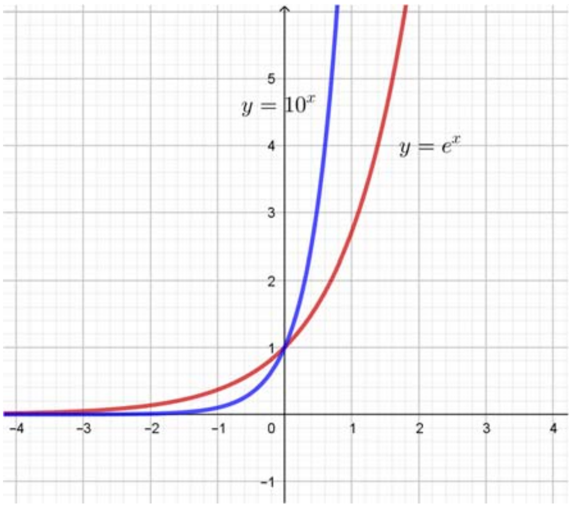
1) $\mathrm{Dom}(g)=\mathbb{R}$
2) $\mathrm{Img}(g)=\mathbb{R}^+$
3) g está acotada inferiormente pero no superiormente
4) g no es par ni impar
5) g es continua
6) g es estrictamente decreciente y por tanto inyectiva
7) Tiene inversa
8) g no tiene extremos relativos
9) $\lim_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$ y $\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$

10) $g^{-1}(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x)$

■ Dos funciones exponenciales especiales

$f(x)=e^{x}$ ($\ln^{-1}=f: e^{x}=y \Leftrightarrow x=\ln y$)

$g(x)=10^{x}$



Propiedades:

1) $\text{Dom}(f)=\text{Dom}(g)=\mathbb{R}$
2) $\text{Img}(f)=\text{Img}(g)=\mathbb{R}^{+}$
3) f y g son estrictamente crecientes
4) f y g tienen inversas
5) f y g están acotadas inferiormente pero no superiormente
6) f y g son continuas
7) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$
8) $f^{-1}(x)=\ln x$ y $g^{-1}(x)=\log x$

■ Función Exponencial

$f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$

$f(x)=a^{x}:=e^{x\ln a}$ con $a>0$ y $a\neq 1$

Propiedades:

1) $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}$
2) $\text{Im}\, g(f)=\mathbb{R}^{+}$
3) $f(0)=1$ y $f(1)=a$
4) $f(x+y)=f(x)\,f(y)\Leftrightarrow a^{x+y}=a^{x}a^{y}$
5) f es continua
6) f es estrictamente $\begin{cases}\text{creciente si } a>1\\ \text{decreciente si } 0<a<1\end{cases}$

7) $\begin{cases} \text{Para } 0<a<1 \text{ se tiene que } \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \end{cases} \\ \text{Para } a>1 \text{ se tiene que } \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0 \end{cases} \end{cases}$

8) Curvatura: $f(x)$ es convexa

8. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

■ **Función seno**

$$\begin{aligned} \text{sen}: \mathbb{R} &\to [-1,1] \\ x &\mapsto \text{sen}\, x \end{aligned}$$

Propiedades:

1) La función seno es impar: $\text{sen}(-x)=-\text{sen}\,x$
2) Es continua
3) $|\text{sen}\,x|\le 1 \quad \forall x\in\mathbb{R}$, es decir, está acotada
4) Es $2\pi-$periódica: $\text{sen}(x+2\pi)=\text{sen}\,x$
5) sen es estrictamente $\begin{cases} \text{creciente en } \left(\dfrac{3\pi}{2}+2\pi(k-1), \dfrac{\pi}{2}+2\pi k\right) \\ \text{decreciente en } \left(\dfrac{\pi}{2}+2\pi k, \dfrac{3\pi}{2}+2\pi k\right) \end{cases}$
6) Tiene máximos relativos en $\left(\dfrac{\pi}{2}+2\pi k, 1\right)$ y mínimos relativos en $\left(\dfrac{3\pi}{2}+2\pi k, -1\right)$.
7) Cortes con el eje OX: $x=\pi k$ con $k\in\mathbb{Z}$
8) $\text{sen}:\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$ biyectiva

$\Rightarrow \exists\, \text{sen}^{-1}=\text{arcsen}:[-1,1]\to\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$

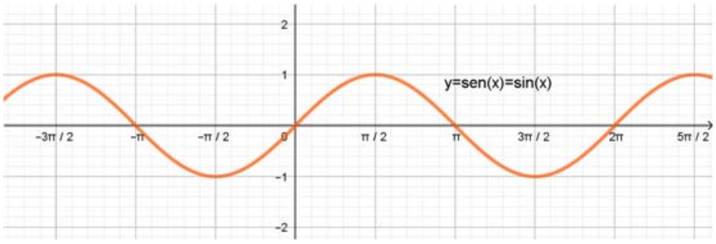
tal que

$$\text{sen}(\text{arcsen}\,x)=x=\text{arcsen}(\text{sen}\,x)$$

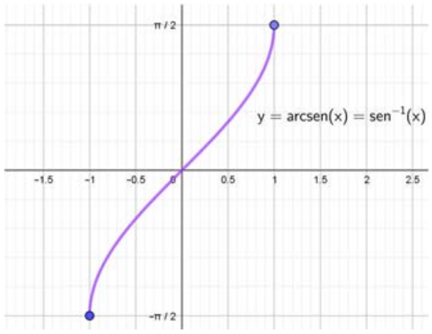
Ahora bien:

$$\text{sen}(\text{arcsen}\,x)=x \text{ si } -\frac{\pi}{2}\le \text{arcsen}\,x\le\frac{\pi}{2}$$

$$\text{arcsen}(\text{sen}\,x)=x \text{ si } -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$$



Función seno



Función arcoseno

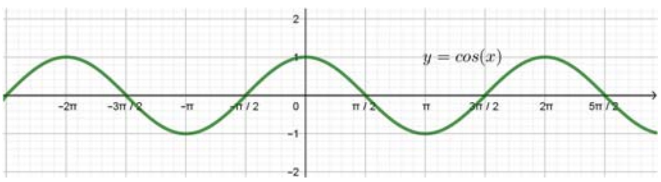
■ **Función coseno**

$$\cos : \mathbb{R} \to [-1,1]$$
$$x \mapsto \cos x$$

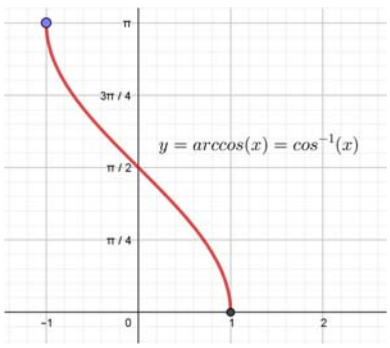
Propiedades:

1) La función coseno es par: $\cos(-x) = \cos x$
2) Es continua
3) $|\cos x| \le 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, es decir, está acotada
4) Es $2\pi-$periódica: $\cos(x+2\pi) = \cos x$
5) cos es estrictamente $\begin{cases} \text{creciente en } (\pi(2k-1), 2\pi k) \\ \text{decreciente en } (2\pi k, \pi(2k+1)) \end{cases}$
6) Tiene máximos relativos en $(2\pi k, 1)$ y mínimos relativos en $(\pi(2k+1), -1)$.
7) Cortes con el eje OX: $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$ con $k \in \mathbb{Z}$
8) $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ biyectiva
   $\Rightarrow \exists \cos^{-1} = \arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$ tal que
$$\cos(\arccos x) = x = \arccos(\cos x)$$

Ahora bien:
$$\cos(\arccos x) = x \text{ si } 0 \le \arccos x \le \pi$$
$$\arccos(\cos x) = x \text{ si } 0 \le x \le \pi$$



Función coseno



Función arcocoseno

■ **Función tangente**

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} : \mathbb{R} - \left\{ k\pi + \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z} \right\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \operatorname{tg} x \end{aligned}$$

<u>Propiedades:</u>

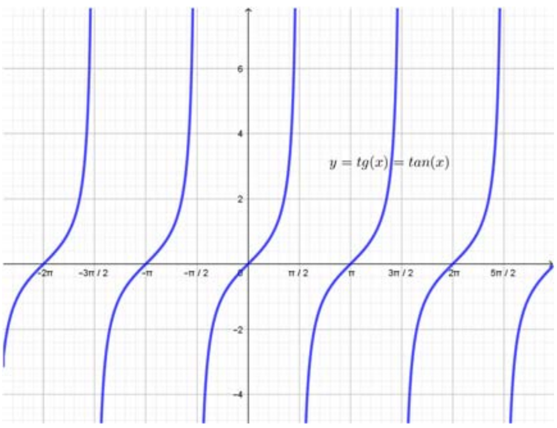
1) La función tangente es impar: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$
2) Es continua
3) No está acotada ni superior ni inferiormente
4) Es $\pi -$ periódica: $\operatorname{tg}(x+\pi) = \operatorname{tg} x$
5) Cortes con el eje OX: $x = \pi k$ con $k \in \mathbb{Z}$
6) tg es estrictamente creciente
7) No tiene extremos relativos
8) $\begin{aligned} \operatorname{tg} : \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[&\to \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \operatorname{tg} x \end{aligned}$ biyectiva $\Rightarrow \exists \operatorname{tg}^{-1} = \operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ tal que

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$$

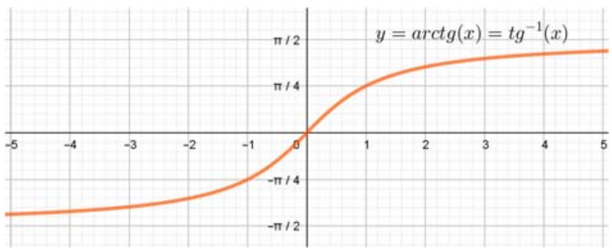
Ahora bien:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x \text{ si } -\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x \text{ si } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$



Función tangente



Función arcotangente

9. EJERCICIOS

Funciones polinómicas, racionales y radicales

1. Representa las siguientes funciones lineales:

a) $y = x+1$ b) $y = 2x+3$ c) $y = -\frac{1}{2}x-2$

2. Representa la función $y=-2x+7$ en el intervalo $(1,4]$.

3. Una función afín f cumple: $f(3)=5$, $f(7)=-4$ y $Dom(f)=[0,10]$. ¿Cuál es su expresión analítica? Represéntala.

4. Representa las parábolas:

a) $y = x^2-2x+3$ b) $y=-x^2-2x-3$ c) $y=x^2-6x+5$

d) $y=2x^2-10x+8$ e) $y=\frac{1}{3}x^2-x+3$ f) $y=\frac{1}{4}x^2+x-2$

5. Representa $y=x^2$. A partir de ella, representa:

a) $y=x^2+5$ b) $y=x^2-2$ c) $y=(x-2)^2$

d) $y=(x+3)^2$ e) $y=(x-1)^2-2$ f) $y=(x+2)^2+3$

g) $y=-x^2$ h) $y=-(x+2)^2+3$ i) $y=-(x-3)^2-2$

6. Representa:

a) $y=\frac{4}{x}$ b) $y=-\frac{4}{x}$ c) $y=\frac{4}{x-3}$

d) $y=\frac{4}{x-3}+2$ e) $y=\frac{4}{x+2}-2$ f) $y=\frac{4x+3}{x+1}$

7. Representa las siguientes funciones:

a) $y=\sqrt{x}$ b) $y=\sqrt{x}-1$ c) $y=\sqrt{x-2}$

d) $y=\sqrt{x+1}-2$ e) $y=-\sqrt{x-2}+3$ f) $y=-\sqrt{x+4}-4$

g) $y=\sqrt[3]{x}$ h) $y=-\sqrt[3]{x}$ i) $y=\sqrt[3]{-x}$

Función valor absoluto y funciones definidas a trozos

8. Representa:

a) $y=|x|$ b) $y=|x|+2$ c) $y=|x-1|$

d) $y=-|x|$ e) $y=-|x-2|+2$ f) $y=-|x+2|-3$

g) $y=|-x^2+4x+5|$ h) $y=\left|\frac{x}{3}-3\right|$ i) $y=\left|\frac{x-3}{2}\right|$

j) $y=|3x+6|$ k) $y=|x^2-4|$ l) $y=|x^2+2x-2|$

m) $y=\left|-\frac{x^2}{2}+2\right|$ n) $y=\left|x^2-2x-4\right|$ ñ) $y=\left|\frac{1}{x}\right|$

9. Representa gráficamente las siguientes funciones definidas a trozos:

a) $f(x)=\begin{cases} 0 & si \quad x<0 \\ 3x-x^2 & si \quad 0\le x<3 \\ x-3 & si \quad 3\le x<6 \\ 0 & si \quad x\ge 6 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} -1 & si \quad x\le -1 \\ \left|x^2-x-2\right| & si \quad -1<x\le 2 \\ -x+2 & si \quad x>2 \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & si \quad x<\frac{-1}{2} \\ -x^2+3x & si \quad \frac{-1}{2}\le x\le 3 \\ \left|x+3\right| & si \quad x>3 \end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases} 2 & si \quad x<-3 \\ \left|x+1\right| & si \quad -3\le x<0 \\ 2x^2-4x+3 & si \quad x\ge 0 \end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases} \left|2x-1\right| & si \quad x\le 0 \\ -2 & si \quad 0<x\le 1 \\ -x^2+3x & si \quad x>1 \end{cases}$

f) $f(x)=\begin{cases} \left|x+1\right| & si \quad x\le 0 \\ -x^2+1 & si \quad 0<x\le 2 \\ -2 & si \quad x>2 \end{cases}$

g) $f(x)=\begin{cases} 16-x^2 & \text{si} \quad -2\le x<2 \\ x^2 & \text{si} \quad 2\le x\le 3 \end{cases}$

h) $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x+1} & \text{si } 0\le x\le 1 \\ x & \text{si } 1<x<3 \\ 6-x & \text{si } 3\le x\le 4 \end{cases}$

i) $f(x)=\left|-\frac{1}{3}x^2+3\right|$

j) $f(x)=\begin{cases} -x^2-2x & \text{si} \quad x\le 0 \\ -1+2x & \text{si} \quad 0<x\le 1 \\ -x^2+2x & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$

Problemas

10. El consumo de gasolina por cada 100 km de un automóvil es, dependiendo de la velocidad, 7,2 litros a 90 km/h y 10,8 litros a 110 km/h. Estima el consumo cuando la velocidad es de 100 km/h.

11. La factura del gas de una familia, en enero, ha sido 24,82 euros por 12 m^3, y en febrero 43,81 por 42 m^3. ¿Cuánto pagarán si consumen 28 m^3?

12. El precio del billete de una línea de cercanías depende de los kilómetros recorridos. Por 57 km he pagado 2,85 euros y por 168 km, 13,4 euros. Calcula el precio de un billete para una distancia de 100 km.

13. Un rectángulo tiene 20 cm de perímetro. Escribe la función que da el área de ese rectángulo en función de su base *x*. ¿Cuál es el dominio de esa función?

14. Los gastos fijos mensuales de una empresa por la fabricación de *x* televisores son

$$G = 2000 + 25x$$

en miles de euros, y los ingresos mensuales son $I = 60x - 0{,}01x^2$, también en miles de euros. ¿Cuántos televisores deben fabricarse para que el beneficio (ingresos menos gastos) sea máximo?

15. Midiendo la temperatura a diferentes alturas, se ha observado que por cada 180 m de ascenso el termómetro baja 1 °C. Si en la base de una montaña de 800 m estamos a 10 °C, ¿cuál será la temperatura en la cima? Representa gráficamente la función *altura-temperatura* y busca su expresión analítica.

16. Una pelota es lanzada verticalmente hacia arriba desde lo alto de un edificio. La altura que alcanza viene dada por la fórmula $h = 80 + 64t - 16t^2$ (t en segundos y h en metros).

a) Dibuja la gráfica en el intervalo [0, 5].
b) Halla la altura del edificio.
c) ¿En qué instante alcanza su máxima altura?

17. El coste de producción de x unidades de un producto es igual a $\frac{1}{4}x^2 + 35x + 25$ euros y el precio de venta de una unidad es $50 - \frac{x}{4}$ euros.

a) Escribe la función que nos da el beneficio total si se venden las x unidades producidas.
b) Halla el número de unidades que deben venderse para que el beneficio sea máximo.

18. Elena va a visitar a su amiga Ana y tarda 20 minutos en llegar a su casa, que está a 1 km de distancia. Está allí media hora y en el camino de vuelta emplea el mismo tiempo que en el de ida.

a) Representa la función *tiempo-distancia*.
b) Busca su expresión analítica.

Funciones de oferta y demanda

19. Las cantidades de oferta y demanda de un determinado producto son:

$$f_o(p) = -50 + 1{,}5p\,, \quad f_d(p) = 600 - p$$

Calcula:

a) El precio y la cantidad de equilibrio.
b) A qué precio se produciría una escasez de 100 unidades.

20. Los ingresos y los costes, en millones, de una empresa vienen dados por las funciones $I(x) = 50x - 4x^2$ y $C(x) = 100 + 5x$, donde x son miles de unidades producidas y vendidas, esto es, $x = 1$ significa 1 000 unidades.

Halla:

a) Los puntos de equilibrio: en donde la empresa ni gana ni pierde.
b) La función que da el beneficio y la región donde ese beneficio es positivo.

21. El coste de instalación y los equipos de una empresa es de 5 000 000 €. La producción de cada unidad le supone un coste adicional de 3 000 €. Halla:

a) El coste de fabricación de 100, de 1 000 y de x unidades.
b) El coste por unidad en cada uno de los supuestos anteriores.

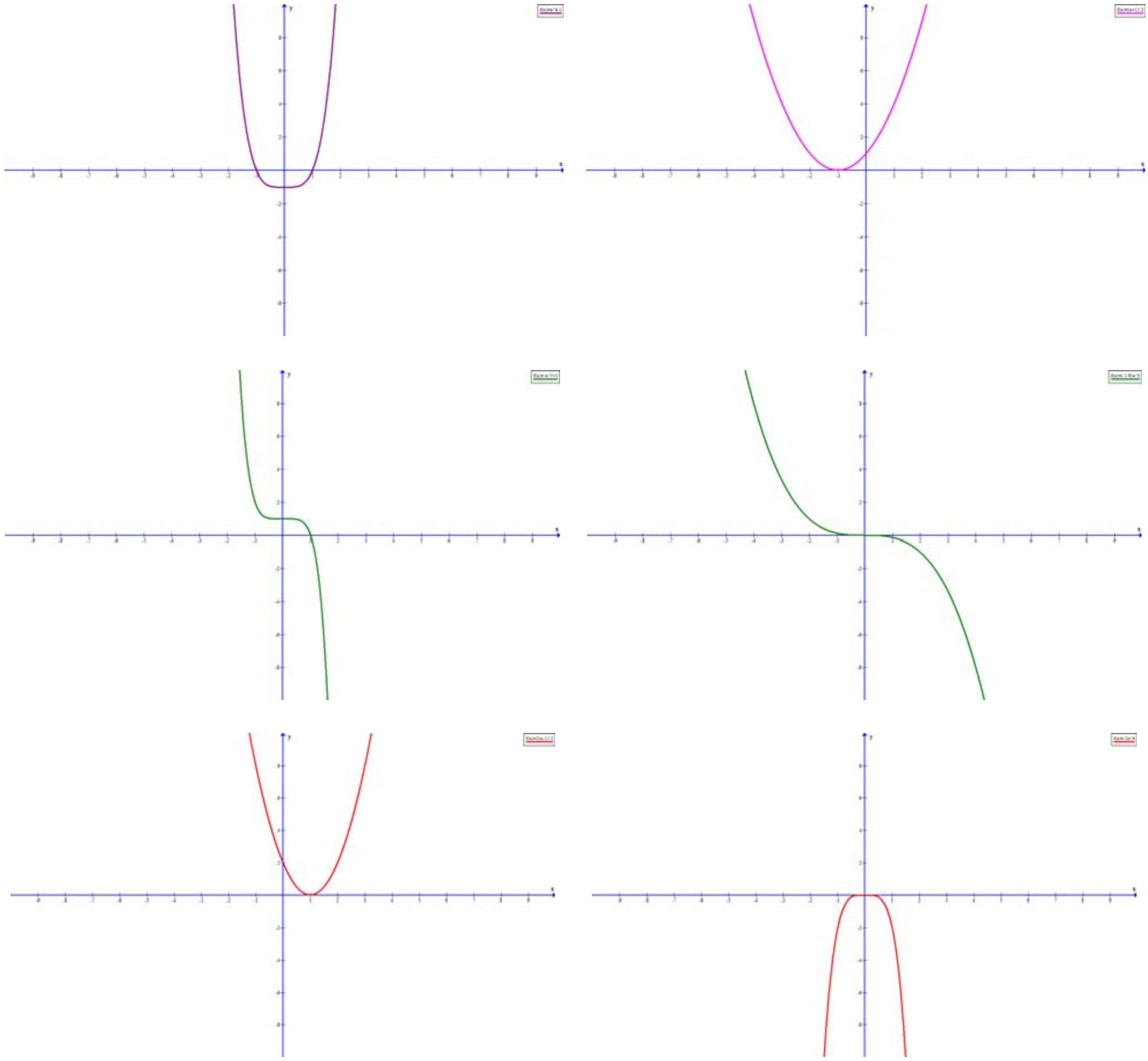
22. El fabricante anterior vende cada unidad producida a 5 000 €. Halla cuántas debe vender para:

a) Igualar gastos.

b) Ganar 1 000 000 de euros.

Transformaciones de funciones

23. Asocia cada gráfica a su expresión algebraica.



a) $y=-\frac{1}{8}x^3$ c) $y=2(x-1)^2$ e) $y=(x+1)^2$

b) $y=-2x^4$ d) x^4-1 f) $y=-x^5+1$

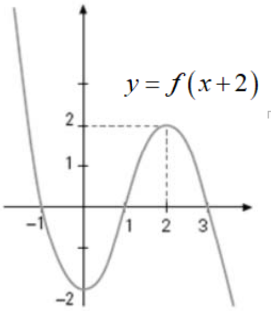
24. A partir de la gráfica de $y=f(x+2)$ adjunta, dibuja las gráficas de las funciones:

a) $y=f(x)$

b) $y=f(x)-5$

c) $y=-f(x)$

d) $y=|f(x)|$



Funciones exponenciales y logarítmicas

25. La mitosis es un proceso de duplicación celular. Una de las bacterias de más rápido crecimiento es la *escherichia coli*, pues en determinadas condiciones puede duplicarse cada 20 minutos. La expresión $y = 2^{3t}$ da el número de células al cabo de *t* horas. ¿Cuántas células hay al cabo de 12 horas? ¿Y de 24?

26. El número de personas afectadas por una enfermedad contagiosa viene dado por la función

$$C(t) = \frac{1\,000}{1 + 99e^{-2,1t}}$$

donde *t* indica el tiempo en días.

a) ¿Cuántas personas estarán contagiadas pasados 1, 2 y 7 días?
b) Representa gráficamente la evolución de la enfermedad.

27. Admitamos que el número de partículas contaminantes por metro cúbico de aire viene dado por $N(t) = \dfrac{5\,000}{1 + 249e^{-0,1t}}$, donde el tiempo *t* viene dado en semanas.

En el supuesto de que no se aplique ninguna medida correctora:

a) ¿Cuántas partículas contaminantes hay por metro cúbico en el momento inicial? ¿Y a las dos, cinco y diez semanas?
b) Si el máximo admisible para personas con problemas respiratorios es de 2000 partículas por metro cúbico, ¿al cabo de cuántas semanas se plantearán problemas de salud para esas personas?

28. El *radio* se descompone radiactivamente. La cantidad de él existente en una muestra después de *t* años viene dada por $C(t) = C_0 e^{-0,00041\cdot t}$, siendo C_0 la cantidad inicial.

a) ¿Qué cantidad de radio queda de una muestra de 10 g al cabo de 1 500 años?
b) ¿Cuál es la vida media (en años) del radio?

29. Para un hueso se calculó que se había desintegrado el 20 % del carbono-14. Si el porcentaje de carbono-14 es restos fósiles viene dado por la fórmula $p(t) = 100e^{-0,00012\cdot t}$, halla:

a) La edad aproximada de ese hueso.
b) ¿Cuántos años deben pasar para que en ese hueso quede sólo el 5 % del carbono-14?

30. Thomas Malthus enunció en su obra “Ensayo sobre el principio de la población”, publicada en 1798, que el crecimiento de la población sería de tipo exponencial, mientras que los alimentos crecerían de forma lineal. Sin embargo, algunos analistas de mediados del siglo XX opinaban que la población mundial tenía un crecimiento logístico, y desde 1960 se ajustaba, a la función $P(t) = \dfrac{36\,000}{1 + 11e^{-0,02123t}}$, siendo *t* los años transcurridos desde 1960 y $P(t)$ la población mundial en millones de personas.

a) ¿Cuántos habitantes había en 2000 según este modelo?
b) ¿En qué año la población era de 5000 millones de habitantes?
c) Según este modelo, ¿cuál es la población límite del planeta?

(Para comprobar: a) En el año 2000 la población era de 6 070 581 000 personas; b) En el año 1985 era de 4 830 978 000 personas, y en 1990 la población era de 5 263 593 000 personas)

31. En determinadas condiciones, una población de mosquitos crece ajustándose a la función

$$f(x)=2+0{,}5\,e^{0{,}4x}$$

donde $f(x)$ es el número de mosquitos en miles y x el tiempo en días desde el momento presente. Se pide:

(a) ¿Cuánto tiempo, en días, tardará en duplicarse la población inicial?

(b) Dibuja la gráfica que da la evolución del número de mosquitos, y comprueba sobre ella el resultado obtenido anteriormente.

32. Debido a la presión ambiental, la población de conejos considerada en el problema anterior se ajustará más bien a la función

$$P(t)=\frac{20\,000}{1+199e^{-0{,}42\,t}}$$

(a) ¿Cuántos conejos habrá al cabo de 10 años?

(b) ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que su número sea de 15 000?

Funciones periódicas

33. Si admitimos que el número medio de horas de sol en una ciudad es un fenómeno periódico, dibuja dos ciclos completos para las ciudades que se indican en las tablas:

Meses	E	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
Gijón	90	104	133	158	175	184	201	203	140	130	65	81
Castellón	165	170	207	239	279	296	328	297	229	203	161	160
Almería	179	185	230	248	312	331	356	327	271	246	189	168

34. Supongamos que el número de linces en cierta región del Canadá se puede representar por la función

$$F(x)=40\ 000+35\,\text{sen}(0{,}6x)$$

donde x es el tiempo en años desde la fecha de partida.

El estudio de las fluctuaciones de su principal presa, la liebre, también varía sinusoidalmente con el mismo período. Se observó, sin embargo, que las liebres alcanzaban un máximo de 110 000 individuos dos años antes que los linces alcanzaran el suyo, siendo el mínimo estimado de liebres $10\ 000$.

a) Halla la función $f(x)$ que describa el número de liebres.

b) Representa las funciones $F(x)$ y $f(x)$ e indica en el gráfico el momento en que ambas poblaciones son iguales.

35. La incidencia de los rayos del sol y la temperatura del agua en el mar Cantábrico se ajustan al siguiente ciclo:

a) La incidencia del sol alcanza el máximo en junio y julio; el mínimo, en diciembre y enero.

b) La temperatura alcanza el máximo en agosto y septiembre; el mínimo, en febrero y marzo.

Dibuja dos ciclos anuales, en la misma figura, que ilustren los fenómenos descritos.

36. Si admitimos que la precipitación media es un fenómeno casi periódico, dibuja dos ciclos completos de precipitación para las estaciones meteorológicas que se indican:

Meses	E	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
Santa Cruz	36	39	28	13	6	0	0	0	3	31	45	51
Las Palmas	19	19	13	6	2	2	1	1	5	16	31	26
Pamplona	110	80	79	79	91	87	48	45	78	122	111	148

37. La temperatura del aire, *T*, en grados centígrados, en una cierta ciudad, en un día de primavera, viene dada por la función $T(t)=15+6\,\mathrm{sen}\left[\pi\dfrac{t-8}{12}\right]$, donde t es el tiempo medio en horas desde la medianoche.

a) ¿Cuál es la temperatura a las 8 h, a las 12 horas y a las 6 de la tarde?

b) Representa gráficamente esta función.

38. El consumo de energía eléctrica de una familia, en kilovatios hora (kWh), viene dado por la función $E(x)=600+450\cos\left(\dfrac{2\pi}{12}(x-1)\right)$, donde x indica los meses del año (enero = 1).

a) ¿Cuál es el consumo en enero, en julio y en octubre?

b) ¿Qué período tiene $E(x)$?

c) Representa dos ciclos de $E(x)$.