UNIDAD 5: FUNCIONES. CARACTERÍSTICAS

1. CONCEPTO DE FUNCIÓN

Una función real de variable real es una correspondencia de un conjunto $D \subseteq \mathbb{R}$ en el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, es decir, una ley que a cada valor del conjunto D asigna un único número real.

La función f de $D \subseteq \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ se simboliza así:

$$\begin{aligned} f : D &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

El conjunto D recibe el nombre de dominio de la función, y se representa por $Dom(f)$, y el conjunto de los transformados mediante f recibe el nombre de recorrido o imagen de la función, y se representa por $\mathrm{Img}(f)$:

$$\mathrm{Dom}(f) = \{x : f(x) \text{ tiene sentido}\}$$

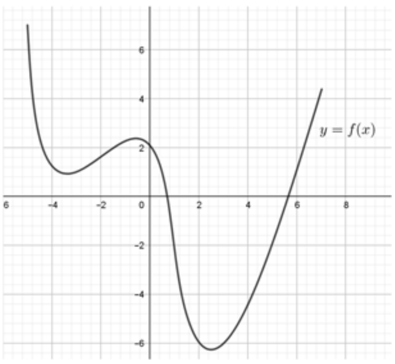
$$\mathrm{Img}(f) = \{\text{valores que toma la función}\} = \{y \in \mathbb{R} / \text{ existe al menos un } x \in D : y = f(x)\}$$

Las funciones también se suelen escribir en la forma $y = f(x)$, y se dice que x es la variable independiente e y la variable dependiente o función.

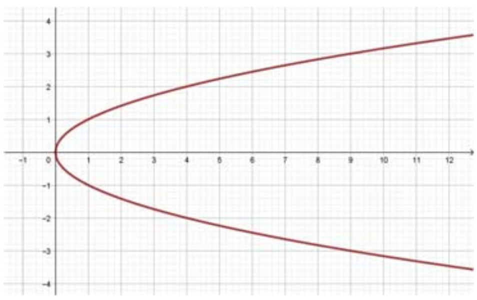
Dos funciones f y g son iguales, $f = g$, cuando $\mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Dom}(g)$ y

$$f(x) = g(x) \ \ \forall x \in \mathrm{Dom}(f).$$

Geométricamente, una correspondencia es una función cuando la gráfica de la correspondencia corta a cada recta vertical en un único punto.



Correspondencia que es función



Correspondencia que no es función

2. FUNCIONES ALGEBRAICAS

- Funciones polinómicas

Son del tipo $f(x)=A(x)$ donde $A(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1 x + a_0$ es un polinomio.

Se tiene que: $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}$

- Funciones racionales

  Son de la forma $f(x)=\dfrac{A(x)}{B(x)}$ donde $A(x)$ y $B(x)\neq 0$ son polinomios.

  Se tiene que: $\text{Dom}(f)=\{x : B(x)\neq 0\}=\mathbb{R}-\{x : B(x)=0\}$

- Funciones irracionales

  Son funciones en las que normalmente su expresión algebraica viene dada por una raíz. Si $f(x)=\sqrt[k]{g(x)}$

  Se tiene que: $\text{Dom}(f)=\begin{cases}\{x :\ g(x)\geq 0\} & \text{si el índice es par}\\ \text{Dom}(g) & \text{si el índice es impar}\end{cases}$

- Funciones definidas a trozos

  Cuando una función se define utilizando más de una expresión algebraica, se dice que está definida a trozos.

  Su dominio variará dependiendo de las expresiones algebraicas de los trozos.

La imagen o recorrido de una función la estudiaremos teniendo en cuenta su representación gráfica.

3. OPERACIONES CON FUNCIONES

■ Función suma

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x) \quad \forall x\in Dom(f)\cap Dom(g)$$

■ Función producto

$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x) \quad \forall x\in Dom(f)\cap Dom(g)$$

■ Función cociente

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)} \quad \forall x : g(x)\neq 0$$

■ Función compuesta

$(f\circ g)(x)=f(g(x))$ (se lee g compuesta[1] con f)

Propiedad:

Elemento simétrico: Es una función que, si existe, se representa por f^{-1} y verifica:

$$(f\circ f^{-1})(x)=(f^{-1}\circ f)(x)=I(x)$$

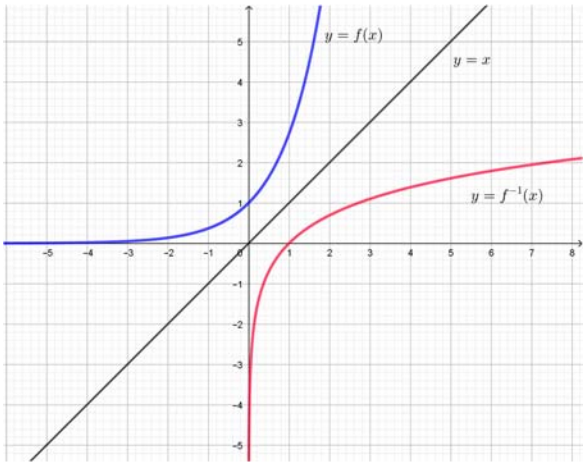
[1] Se lee al revés de como se escribe, ya que primero aplicamos g y luego f.

La función f^{-1} recibe el nombre de función inversa[2] de f.

■ Función inversa

- Cálculo de la función inversa:
  a) Expresar la variable y en función de la variable x.
  b) Despejar la variable x de la igualdad anterior con el fin de hallar la expresión de x en función de y.
  c) Intercambiar las variables, ya que cualquier función se expresa siempre a partir de la variable x.
  d) Realizar la comprobación.

Geométricamente, si existe la función inversa, su gráfica se obtiene tomando la simétrica de la gráfica de la función respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrantes.



4. CARACTERÍSTICAS DE LAS FUNCIONES

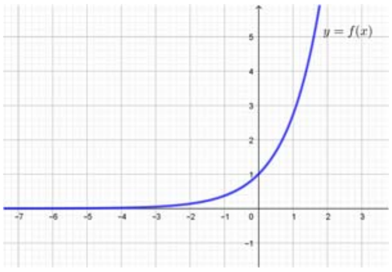
4.1.- MONOTONÍA (crecimiento, decrecimiento), máximos y mínimos relativos.

Sea $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función e $I \subseteq D$ un intervalo. Se dice que f es

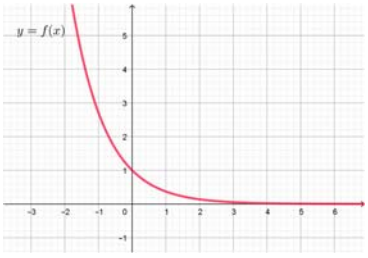
a) estrictamente creciente en I si $\forall x_0, x_1 \in D: x_0 < x_1$ se tiene que $f(x_0) < f(x_1)$
b) creciente en I si $\forall x_0, x_1 \in D: x_0 < x_1$ se tiene que $f(x_0) < f(x_1)$
c) estrictamente decreciente en I si $\forall x_0, x_1 \in D: x_0 < x_1$ se tiene que $f(x_0) > f(x_1)$
d) decreciente en I si $\forall x_0, x_1 \in D: x_0 < x_1$ se tiene que $f(x_0) \geq f(x_1)$
e) constante en I si $\forall x_0, x_1 \in D: x_0 < x_1$ se tiene que $f(x_0) = f(x_1)$

Una función es estrictamente monótona si es estrictamente creciente o estrictamente decreciente, y es monótona si es creciente o decreciente.

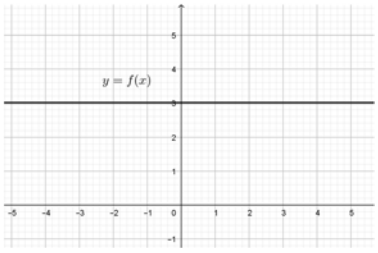
[2] ¡Alerta! $f^{-1} \neq \frac{1}{f}$ (la función $\frac{1}{f}$ recibe el nombre de función recíproca de f, aunque también es "usual" en la bibliografía que llamen función recíproca a f^{-1})



Estrictamente creciente

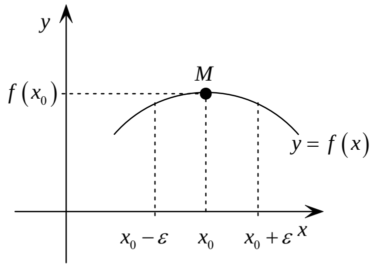


Estrictamente decreciente

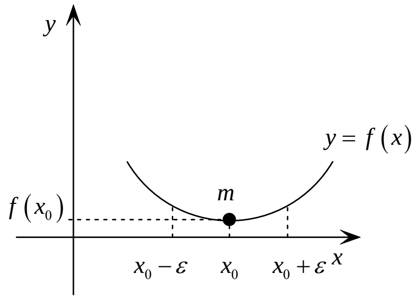


Función constante

Diremos que f tiene un máximo relativo en $x_0 \in D$ si existe un entorno abierto[3] de x_0, $E(x_0)$ tal que $f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in D \cap E(x_0)$.



Diremos que f tiene un mínimo relativo en $x_0 \in D$ si existe un entorno abierto de x_0, $E(x_0)$ tal que $f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in D \cap E(x_0)$.



Geométricamente una función tiene un máximo relativo cuando en ese punto la función pasa de ser creciente a ser decreciente y tiene un mínimo relativo cuando pasa de ser decreciente a ser creciente.

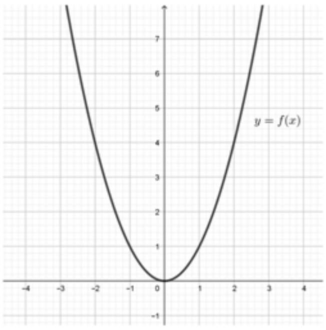
4.2.- SIMETRÍAS (funciones pares e impares)

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es

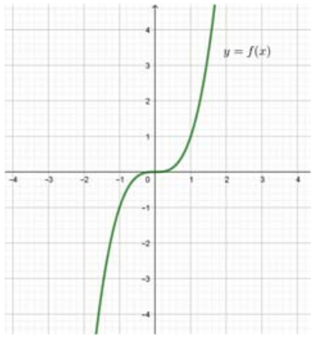
a) par o simétrica respecto del eje OY cuando $-x \in D$ y $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in D$

b) impar o simétrica respecto del origen de coordenadas si $-x \in D$ y $f(-x) = -f(x)$ $\forall x \in D$.

[3] Un entorno abierto de x_0 es un intervalo de la forma $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ para algún $\varepsilon > 0$. Lo representaremos por $E(x_0)$ o $E(x_0, \varepsilon)$ si necesitamos precisar el radio, ε, que tiene.



Función par



Función impar

Geométricamente una función es:

a) par si al doblar la gráfica respecto del eje OY las ramas positiva y negativa de la función coinciden.

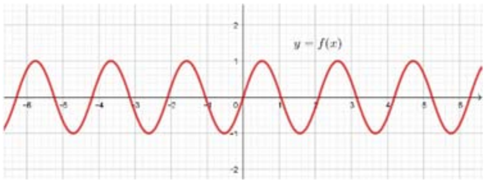
b) es impar si al girarla 180º vuelve a coincidir con ella misma.

4.3.- PERIODICIDAD

Una función $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es periódica de período $T > 0$ si se cumplen las siguientes dos condiciones:

1) $f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in D$

2) $T > 0$ es el menor de los números que cumple 1).



4.4.- CONTINUIDAD (funciones continuas)

Definición no rigurosa[4]: Diremos que una función $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en un punto $x_0 \in D$ si en un entorno de dicho punto los puntos próximos a x_0 tienen imágenes próximas a $f(x_0)$ en otro entorno de dicho punto.

En el caso de que f sea continua en todos los puntos de un subconjunto $S \subseteq D$, se dice que f es continua en S.

Cuando una función no sea continua en un punto, se dice que es discontinua en dicho punto. Sin embargo, hay que tener **cuidado**, ya que, si una función no está definida en un punto, no tiene sentido estudiar la continuidad de la función en dicho punto.

La clasificación de las discontinuidades de una función se hará en el tema correspondiente.

4.5.- ACOTACIÓN (funciones acotadas). Máximo y mínimo absoluto.

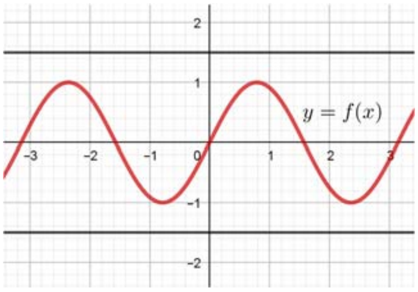
Una función $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está:

a) acotada si $\exists M > 0 : |f(x)| \leq M \quad \forall x \in D$

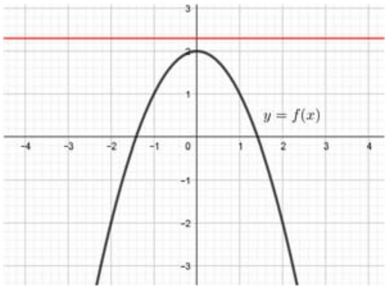
b) acotada superiormente si $\exists K \in \mathbb{R} \; : f(x) \leq K \quad \forall x \in D$

c) acotada inferiormente si $\exists k \in \mathbb{R} \; : k \leq f(x) \quad \forall x \in D$

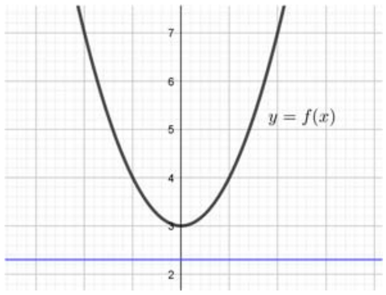
[4] En el tema de Límites y Continuidad daremos una definición rigurosa de función continua, que involucra límites.



Función acotada



Función acotada superiormente

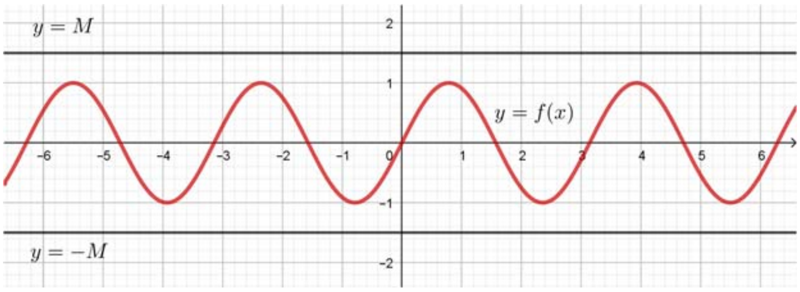


Función acotada inferiormente

Como consecuencia de lo anterior se tiene la siguiente **caracterización**:

f acotada $\Leftrightarrow$ f acotada superior e inferiormente

Geométricamente, el hecho de que una función esté acotada (por un número $M>0$), se traduce en que su gráfica está entre las rectas $y=M$ e $y=-M$



Si *f* está acotada superiormente, el número *M* recibe el nombre de cota superior. A la menor de las cotas superiores se le llama supremo de *f* en *D*. Si el supremo es alcanzado por la función *f*, es decir, $\exists x_1 \in D: f(x_1)$ es el supremo, entonces el número $f(x_1)$ recibe el nombre de máximo absoluto de *f* en *D*.

Si *f* está acotada inferiormente el número *m* recibe el nombre de cota inferior. A la menor de las cotas inferiores se le llama ínfimo de *f* en *D*. Si el ínfimo es alcanzado por la función *f*, es decir, $\exists x_0 \in D: f(x_0)$ es el ínfimo, entonces el número $f(x_0)$ recibe el nombre de mínimo absoluto de *f* en *D*.

Teorema de WEIERSTRASS: Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es continua, entonces *f* tiene máximo y mínimo absolutos.

Este resultado lo que nos dice es que la función tiene extremos absolutos, pero no nos dice dónde están ni cómo calcularlos.

4.6.- CURVATURA (funciones convexas y cóncavas). Puntos de inflexión

Daremos una definición[5] basada en la interpretación geométrica:

[5] ¡¡Ojo!! Al consultar la bibliografía es posible encontrar libros donde llaman función cóncava a lo que nosotros llamamos función convexa. También se usa la nomenclatura cóncava hacia arriba para las funciones convexas y cóncava hacia abajo para las cóncavas. Lo importante no es el nombre que se le dé, sino el concepto. Sin embargo, no he encontrado un solo libro que no sea de Bachillerato donde la parábola x^2 sea cóncava.

Una función $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde I es un intervalo, es convexa si para cualesquiera $a,b \in I$ con $a < b$ la gráfica de f restringida al intervalo $[a,b]$ “se halla situada por debajo” del segmento de extremos $(a, f(a))$, $(b, f(b))$.

Así, las funciones convexas son aquellas tales que el recinto del plano que queda por encima de su gráfica es un conjunto convexo.

Diremos que $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde I es un intervalo, es cóncava cuando $-f$ sea convexa.

Una función tiene un punto de inflexión, cuando en dicho punto la función pasa de ser convexa a ser cóncava o viceversa. En el primer caso se habla de punto de inflexión convexo-cóncavo y en el segundo de punto de inflexión cóncavo-convexo.

4.7.- TENDENCIAS

Asíntotas verticales

Decir que $f(x) \to +\infty$ cuando $x \to a$, significa que cuando *x* tiende a *a* (se acerca cada vez más al punto *a*), con $x < a$, $f(x)$ toma valores cada vez mayores.

Análogamente, decir que $f(x) \to -\infty$ cuando $x \to a$, significa que cuando *x* tiende a *a*, con $x < a$, $f(x)$ toma valores cada vez más pequeños.

Llamamos asíntotas de una función a las rectas que se aproxima la función en el infinito.

La recta *x* = *a* es una asíntota vertical de $f(x)$ si se da alguna de las siguientes situaciones:

$$f(x) \to \pm\infty \text{ cuando } x \to a \qquad f(x) \to \pm\infty \text{ cuando } x \to a+$$
$$f(x) \to \pm\infty \text{ cuando } x \to a-$$

Asíntotas horizontales

Decir que $f(x) \to b$ cuando $x \to +\infty$, significa que cuando *x* se hace tan grande como queramos, la función $f(x)$ toma valores cada vez más próximos al número *b*.

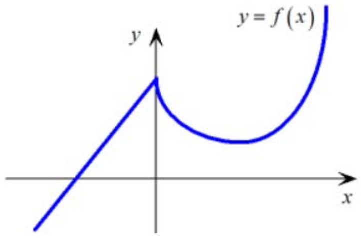
Análogamente, decir que $f(x) \to b$ cuando $x \to -\infty$, significa que cuando *x* se hace tan pequeño como queramos, la función $f(x)$ toma valores cada vez más próximos al número *b*.

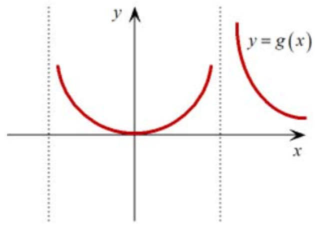
La recta *y* = *k* es una asíntota horizontal de $f(x)$ si se da alguna de las siguientes situaciones:

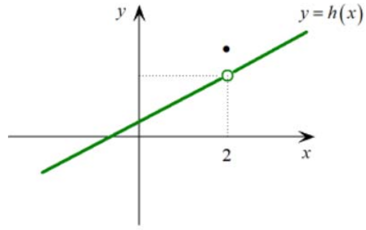
$$f(x) \to k \text{ cuando } x \to +\infty \qquad \text{o} \qquad f(x) \to k \text{ cuando } x \to -\infty$$

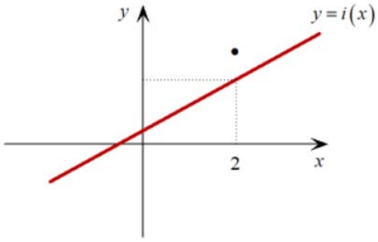
5. EJERCICIOS

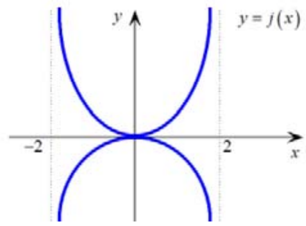
1. Indica en cada una de las siguientes gráficas cuáles son representaciones de funciones y cuáles no:

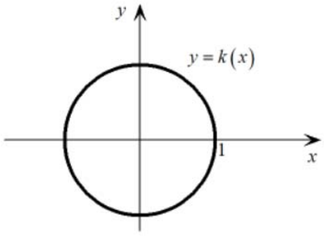












2. De las siguientes parejas de funciones, indica cuáles son iguales y cuáles no:

a) $y = x - 1$; $3x - 3y = 3$ y

b) $y = x - 1$; $3x - 3y = 3$

c) $y = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$; $y = \begin{cases} x & \text{si} \quad x > 0 \\ -x & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$

3. Calcula el dominio de las siguientes funciones:

1) $y = x^2 + 3$

2) $yx + y - x = 0$

3) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x^2}$

4) $f(x) = \sqrt[5]{x^2 + 5}$

5) $f(x) = \dfrac{5}{x^2 - 9}$

6) $f(x) = \log\left(x^2 + 1\right)$

7) $y - x^2 - 3 = 0$

8) $y^2 - x = 0$

9) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

10) $f(x) = |x|$

11) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x^2}{x^2 - 4}}$

12) $f(x) = 3^{x+2}$

13) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \ x \geq 1 \\ \dfrac{x}{x+3} & \text{si} \ x < 1 \end{cases}$

14) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 1} & \text{si} \ x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si} \ x \geq 0 \end{cases}$

15) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

16) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x + 1}$

17) $f(x) = \sqrt[4]{\dfrac{2x + 1}{2x^2}}$

18) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x - 1}{x + 1}}$

4. Calcula $(f+g)$, $\text{Dom}(f+g)$ y $(g-f)(-5)$ en cada uno de los siguientes casos:

a) $f(x)=x^2-1$ y $g(x)=2x^2\text{-}5x+1$

b) $f(x)=x^2$ si $x\in[0,50]$ y $g(x)=\sqrt{8-x}$

5. Dadas las funciones $f(x)=\sqrt{x-9}$ y $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4-x}}$, comprueba si existe la función $(f+g)$ y la función $(f-g)$.

6. Halla las funciones $(f+g)$ y $(f-g)$, siendo:

$$f(x)=\begin{cases} 2x & \text{si } x<0 \\ x^2+1 & \text{si } 0\le x\le 4 \\ \dfrac{1}{x-4} & \text{si } 4<x \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x)=\begin{cases} -x & \text{si } x<2 \\ x^2 & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$$

7. Considera las funciones $f(x)=x^3+1$, $g(x)=x^2-1$ y $h(x)=\dfrac{1}{x-1}$, y calcula:

a) $(f+g)+h$ c) $(fg)(2)$

b) $f-(g-h)$ d) $\text{Dom}(f+g)$

8. Dadas $f(x)=x^2-1$ y $g(x)=\dfrac{1}{x-1}$:

a) Halla $(fg)(-1)$

b) Determina $\text{Dom}(fg)$

c) ¿Es cierta la igualdad $(fg)(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}=x+1$?

9. Calcula: $(3f)g$, siendo $f(x)=\begin{cases} x-1 & \text{si } x\ne 1 \\ x & \text{si } x=1 \end{cases}$ y $g(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{si } x\ne 1 \\ 3x-4 & \text{si } x=1 \end{cases}$.

10. Dadas las funciones $f(x)=\begin{cases} x-1 & \text{si } x<0 \\ x^2+1 & \text{si } x\ge 0 \end{cases}$ y $g(x)=\begin{cases} 2x-2 & \text{si } x\le 2 \\ 3x-4 & \text{si } x>2 \end{cases}$ halla:

a) $(fg)(-1)$ c) $(fg)(3)$

b) $\text{Dom}(fg)$ d) $(fg)(1)$

11. Sabiendo que $f(x)=x+1$ y $g(x)=\sqrt{x^2-4}$ calcula:

a) $(fg)(2)$ b) $\text{Dom}\left(\dfrac{f}{g}\right)$ c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(3)$

12. Determina el dominio de las funciones recíprocas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=x-2$ c) $h(x)=\dfrac{x^2-1}{x+3}$

b) $g(x)=\sqrt{x-11}$ d) $j(x)=\dfrac{\sqrt{x+11}}{(x-1)(x-3)}$

13. Con las funciones del ejercicio anterior, calcula:

a) $3f+2g$ b) $(4g-2h)(1)$ c) $3h+\dfrac{2}{f}$

14. Dadas $f(x)=2x-1$ y $g(x)=x^2+1$, determina:

a) $f\circ g$ b) $g\circ f$ c) $\mathrm{Dom}(f\circ g)$

15. Si $f(x)=\dfrac{1}{x}$ y $g(x)=x^3$, halla $(f\circ g)$ y $(g\circ f)$.

16. Dadas $f(x)=x-1$ y $g(x)=\dfrac{1}{x^2}$, calcula:

a) $(f\circ g)(1)$ b) $\mathrm{Dom}(g\circ f)$

17. Considera las funciones $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=x^2+1$ y $h(x)=\dfrac{1}{3x+1}$, y determina:

a) $(g\circ f)(2)$ b) $(g\circ(f\circ h))(2)$

18. Dada la función $f(x)=3x-6$, resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $(ff)(x)=0$

b) $(ff)(x)=x$

c) $(ff)(x)=x^2-16$

19. Comprueba si la función $f(x)=x^2 \quad \forall x\neq 0$ tiene inversa, y en caso afirmativo, calcula el dominio de f^{-1}.

20. Halla la función inversa de las siguientes funciones:

a) $y=3x-2$ e) $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$

b) $y=\dfrac{x+1}{2}$ f) $y=x^3$

c) $y=\dfrac{2}{x-1}$ g) $y=\dfrac{x^3}{x^3-1}$

d) $y=\dfrac{2x+1}{x-5}$ h) $y=\sqrt{x}$

21. Si tenemos la función $f(x)=2x-3$, ¿podrías calcular $f^{-1}(7)$ sin hallar f^{-1}?

22. Sabiendo que $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x<0 \\ x-1 & \text{si } x>0 \end{cases}$ halla, si es posible, $f^{-1}(x)$

a) Halla, utilizando la gráfica de la función, $f^{-1}(-2)$

b) Dibuja la gráfica de $f^{-1}(x)$

23. Si $fg=0$, ¿es necesariamente $f=0$ o $g=0$? Si no es así pon un ejemplo de dos funciones no nulas cuyo producto sea cero.

24. Dibuja una gráfica que cumpla las condiciones dadas en cada uno de los siguientes casos:

a) $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}$ e $\text{Img}(f)=[-1,1]$

b) $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{3\}$ e $\text{Img}(f)=\mathbb{R}$

c) $\text{Dom}(f)=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ e $\text{Img}(f)=[-2,2]$

d) $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}^-$ e $\text{Img}(f)=\mathbb{R}^-$

25. Estudia la simetría de las siguientes funciones:

a) $f(x)=x^5-x$

b) $f(x)=\sqrt{x^4+x^2-1}$

c) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^4+1}$

d) $f(x)=2^{4x^6}$

26. Dibuja una función par, otra impar y otra 2 – periódica.

27. Expresa la altura de un triángulo equilátero en función de la media de su lado.

28. Expresa el volumen de una piscina de forma cúbica, cuya base mide 30 m^2, en función de su altura.

29. En una circunferencia de ocho metros de radio se quiere inscribir un rectángulo de base x. Expresa la altura del rectángulo en función de la base.

30. Queremos construir habitaciones rectangulares de 16 m^2. Expresa en forma implícita la función que relaciona las dimensiones de una de dichas habitaciones.

31. Sea una función f acotada superiormente en $\mathbb{R}$ y otra función g acotada en $\mathbb{R}$. Demuestra las siguientes afirmaciones:

a) $(f+g)$ está acotada superiormente.

b) $(f-g)$ está acotada inferiormente.

c) $(g-f)$ no está acotada superiormente

32. ¿Existe alguna función par e impar a la vez?