Unidad 4

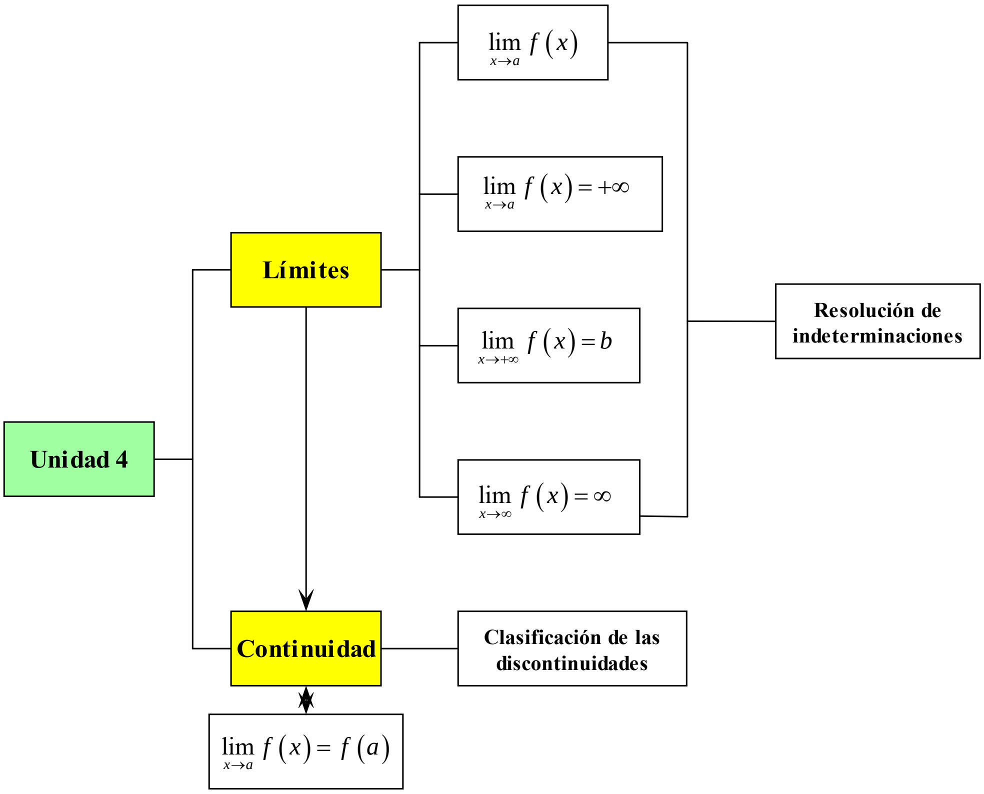
LÍMITES Y CONTINUIDAD

CONTENIDOS

Objetivos fundamentales

1. Conocer el concepto de límite de una función en un punto y saber calcular límites sencillos mediante una tabla de valores.
2. Saber calcular límites de una función, resolviendo las correspondientes indeterminaciones cuando éstas se presenten.
3. Determinar las asíntotas de una función.
4. Saber estudiar la continuidad de una función, tanto en un punto como en un intervalo: a partir de su gráfica y analíticamente.
5. Clasificar las discontinuidades de una función.
6. Relacionar la continuidad, en un intervalo cerrado, con sus extremos absolutos.

1.- MAPA CONCEPTUAL DE LA UNIDAD



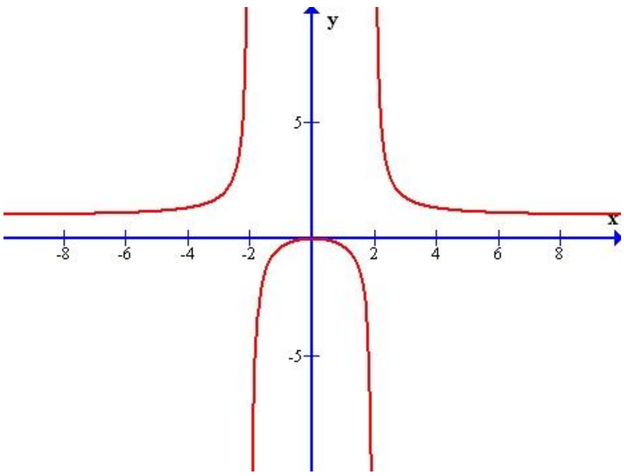
2.- CONCEPTO DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

EJERCICIO:

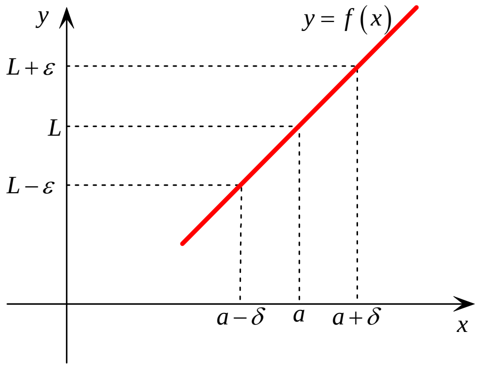
1. Observando la gráfica de la función $y=f(x)$, calcula el valor de los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 2+} f(x)$ c) $\lim_{x\to 0+} f(x)$ e) $\lim_{x\to -2+} f(x)$ g) $\lim_{x\to +\infty} f(x)$

b) $\lim_{x\to 2-} f(x)$ d) $\lim_{x\to 0-} f(x)$ f) $\lim_{x\to -2-} f(x)$ h) $\lim_{x\to -\infty} f(x)$



<u>Definición intuitiva:</u> Sea $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función, $a \in D'$ y $L \in \mathbb{R}$. Diremos que el <u>límite</u> de $f(x)$ cuando $x \to a$ es L, y escribiremos $\lim_{x \to a} f(x) = L$, sii para valores de x cada vez más próximos a a (***distintos de a***), los valores de las imágenes $f(x)$ están cada vez más próximas a L.



<u>EJERCICIO:</u>

2. *Dándole a x valores próximos a 1, tanto mayores como menores que él, calcula hacia que valor tienden las siguientes funciones:*

a) $f(x) = 2x + 4$

b) $f(x) = x^2$

c) $f(x) = (x+1)^2 - 3$

d) $f(x) = \dfrac{2}{x}$

e) $f(x) = x^3 - 1$

f) $f(x) = \dfrac{x+2}{3}$

<u>3.- LÍMITES LATERALES: CARACTERIZACIÓN</u>

El <u>límite por la izquierda</u> es el valor al que tiende la función $f(x)$ cuando la variable x se aproxima a a siendo menor que a. Se denota por: $\lim_{x \to a-} f(x)$ ó $\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$

El <u>límite por la derecha</u> es el valor al que tiende la función $f(x)$ cuando la variable x se aproxima a a siendo mayor que a. Se denota por: $\lim_{x \to a+} f(x)$ ó $\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$

Esto da lugar a la siguiente **<u>caracterización</u>**:

$$\exists \lim_{x \to a} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lim_{x \to a-} f(x), \ \exists \lim_{x \to a+} f(x) \\ \lim_{x \to a-} f(x) = \lim_{x \to a+} f(x) \end{cases}$$

En cuyo caso $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x) = \lim_{x \to a+} f(x)$

<u>EJERCICIO:</u>

3. *Calcula los límites laterales y el límite, cuando exista, de las siguientes funciones en los puntos que se indican:*

a) $f(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{si} \quad x < 3 \\ 2x & \text{si} \quad x \geq 3 \end{cases}$ en $x = 3$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x - 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ x + 2 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$ en $x = 1$

4.- LÍMITES Y OPERACIONES CON FUNCIONES: ÁLGEBRA DE LÍMITES

Se tienen las siguientes **propiedades** de los límites:

1) $\lim\limits_{x\to a} k = k$

2) $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$

3) $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$

4) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ siempre que $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$

4) $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ siempre que $\lim\limits_{x\to a} f(x) > 0$

EJERCICIO:

4. *Sabiendo que las funciones* $f(x)$ y $g(x)$ *tienen por límite* -2 y 5, *respectivamente, cuando x tiende a 3, calcula el valor de los siguientes límites:*

a) $\lim\limits_{x\to 3}\left[5f(x)-g(x)\right]$ b) $\lim\limits_{x\to 3}\left[f(x)+2g(x)\right]$ c) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2f(x)}{7g(x)}$

5.- LÍMITES INFINITOS: ASÍNTOTAS VERTICALES

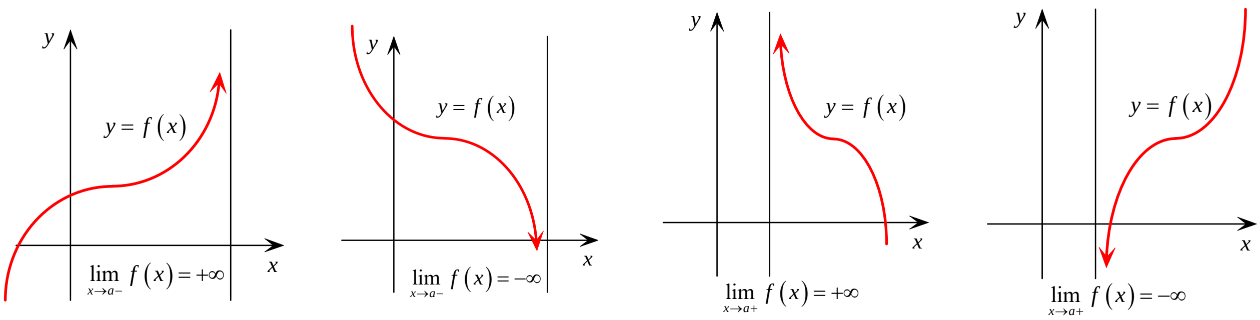
Decir que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ significa que cuando *x* tiende a *a*, con $x < a$, $f(x)$ toma valores mayores que cualquier número real *k*:

Análogamente, decir que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ significa que cuando *x* tiende a *a*, con $x < a$, $f(x)$ toma valores cada vez más pequeños:

Llamamos asíntotas de una función a las rectas que se aproxima la función en el infinito.

La recta *x* = *a* es una asíntota vertical de $f(x)$ sii existe alguno de los siguientes límites

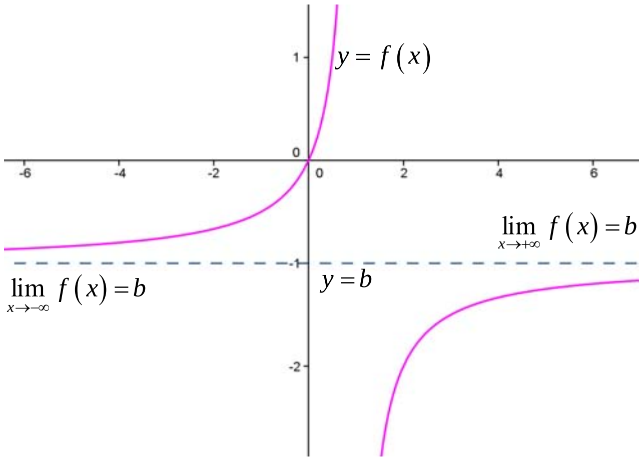
$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x\to a+} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x\to a-} f(x) = \pm\infty$$



6.- LÍMITES EN EL INFINITO: ASÍNTOTAS HORIZONTALES

Decir que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=b$ significa que cuando x se hace tan grande como queramos, la función $f(x)$ toma valores muy próximos un número fijo b:

La recta $y = k$ es una asíntota horizontal de $f(x)$ sii existe alguno de los siguientes límites: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=k$ o $\lim_{x\to+\infty} f(x)=k$



7.- LÍMITES INFINITOS EN EL INFINITO: ASÍNTOTAS OBLICUAS

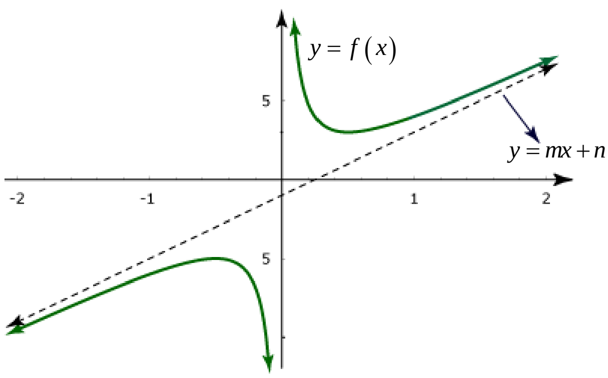
También puede suceder que $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, lo que significa que x y $f(x)$ se hacen infinitamente grandes a la vez. Por tanto:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty \Leftrightarrow f(x)>k$$

para todo $x>p$, siendo k y p números arbitrariamente grandes.

La recta $y = mx + n$, $m \neq 0$, es una asíntota oblicua de $f(x)$ sii existe alguno de los siguientes límites: $\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-mx-n\right)=0$ $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx-n\right)=0$

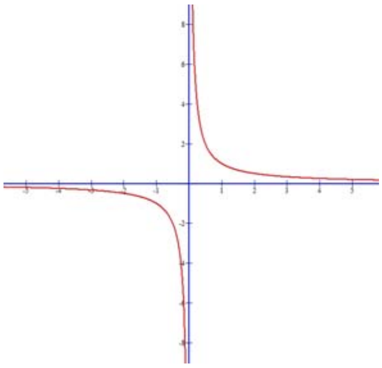
en cuyo caso $m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ y $n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)$.



8.- ALGUNOS LÍMITES A TENER EN CUENTA

Antes de meternos de lleno en la resolución de indeterminaciones, vamos a estudiar algunos límites muy sencillos, pero que aparecen mucho y que por tanto es necesario tenerlos siempre presentes:

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x}$

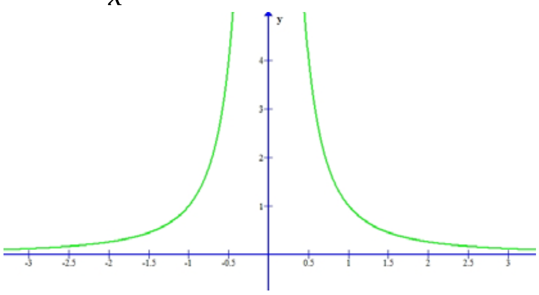


$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to0-}\frac{1}{x}=-\infty\\ \lim_{x\to0+}\frac{1}{x}=+\infty\end{aligned}\right\}\Rightarrow \nexists\lim_{x\to0}\frac{1}{x}$$

(2) $g(x)=\dfrac{1}{x^2}$

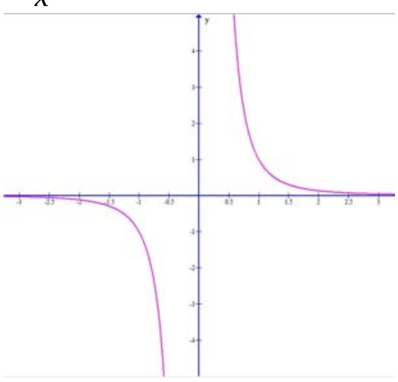


$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$$

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to0-}\frac{1}{x^2}=+\infty\\ \lim_{x\to0+}\frac{1}{x^2}=+\infty\end{aligned}\right\}\Rightarrow \exists\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}=+\infty$$

(3) $h(x)=\dfrac{1}{x^3}$

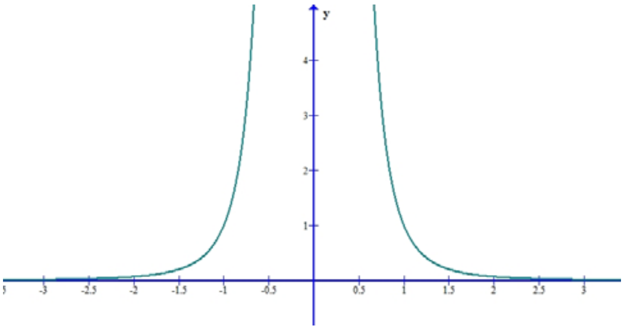


$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^3}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}=0$$

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to0-}\frac{1}{x^3}=-\infty\\ \lim_{x\to0+}\frac{1}{x^3}=+\infty\end{aligned}\right\}\Rightarrow \nexists\lim_{x\to0}\frac{1}{x^3}$$

(4) $i(x)=\dfrac{1}{x^4}$



$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^4}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^4}=0$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to0-}\frac{1}{x^4}=+\infty\\ \lim_{x\to0+}\frac{1}{x^4}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow\exists\lim_{x\to0}\frac{1}{x^4}=+\infty$$

(5) En general:

Para n impar:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=0$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to0-}\frac{1}{x^n}=-\infty\\ \lim_{x\to0+}\frac{1}{x^n}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow\nexists\lim_{x\to0}\frac{1}{x^n}$$

Para n par:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=0$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to0-}\frac{1}{x^n}=+\infty\\ \lim_{x\to0+}\frac{1}{x^n}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow\exists\lim_{x\to0}\frac{1}{x^n}=+\infty$$

Un par de consideraciones a tener en cuenta al calcular límites:

a) Si $P(x)=a_nx^n+...+a_1x+a_0$ es un polinomio, entonces

$$\lim_{x\to\pm\infty}P(x)=\pm\infty$$

y el resultado sólo depende del monomio a_nx^n.

b) Para límites en el infinito de funciones racionales se tiene la siguiente regla práctica, donde $P(x)=a_nx^n+...+a_1x+a_0$ y $P(x)=b_mx^m+...+b_1x+b_0$.:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\begin{cases}\pm\infty & \text{si} \quad \text{grado}(P)>\text{grado}(Q)\\ \dfrac{a_n}{b_m} & \text{si} \quad \text{grado}(P)=\text{grado}(Q)\\ 0 & \text{si} \quad \text{grado}(P)<\text{grado}(Q)\end{cases}$$

9.- RESOLUCIÓN DE INDETERMINACIONES

Cuando al calcular el límite de una suma, un producto, un cociente o una potencia de funciones no se pueden aplicar las propiedades de los límites, es decir, hay que hacer un estudio particular de cada caso, suele decirse que estos límites son una indeterminación.

INDETERMINACIÓN DEL TIPO $\frac{k}{0}$ CON $k\neq0$

Se calculan los límites laterales: $\lim_{x\to a+}f(x)$, $\lim_{x\to a-}f(x)$

Si existen ambos límites y coincide su valor, entonces:

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a-} f(x)$$

Si no existe alguno de los límites laterales o no coincide su valor, entonces, no existe $\lim_{x\to a} f(x)$.

INDETERMINACIÓN DEL TIPO $\frac{0}{0}$

a) <u>Para funciones racionales</u>

Se descomponen numerador y denominador en factores y se simplifica.

b) <u>Para funciones irracionales</u>

Si se trata de una función con raíces cuadradas en el numerador (o en el denominador), multiplicamos numerador y denominador por la expresión conjugada del numerador (o del denominador).

INDETERMINACIÓN DEL TIPO $\frac{\infty}{\infty}$

Se divide numerador y denominador por la mayor potencia de x que aparezca en la función (basta con dividir por la mayor potencia de x del denominador).

INDETERMINACIÓN DEL TIPO $\infty - \infty$

a) <u>La función es diferencia de dos funciones racionales</u>

Se efectúa dicha operación.

b) <u>La función es diferencia de funciones irracionales</u>

Multiplicamos y dividimos por la expresión conjugada de la función.

INDETERMINACIÓN DEL TIPO $0 \cdot \infty$

Transformar esta indeterminación en una de las anteriores, generalmente efectuando las operaciones.

INDETERMINACIÓN DEL TIPO 1^∞

Se resuelve empleando la siguiente igualdad:

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to a} g(x)\left[f(x)-1\right]}$$

donde $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ y sabemos que

$$e = \lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

<u>EJERCICIOS:</u>

5. *Calcula los siguientes límites, resolviendo las indeterminaciones que aparezcan:*

a) Indeterminación del tipo $\frac{k}{0}$ con $k \neq 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{-8}{5x^4}$$

b) Indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2} \qquad \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$$

c) Indeterminación del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+x+1}{3x^2-1}$$

d) Indeterminación del tipo $\infty-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+3x-2}{x+1}-2x\right) \qquad \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$$

e) Indeterminación del tipo $0\cdot\infty$

$$\lim_{x\to4}\left(\sqrt{x^2-16}\cdot\sqrt{\frac{x}{x-4}}\right) \qquad \lim_{x\to3}\left[\left(x^2-9\right)\cdot\frac{1}{x-3}\right]$$

f) Indeterminación del tipo 1^{∞}

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-4x^3}{-4x^3-7}\right)^{2x}$$

6. *Calcula el valor de los siguientes límites:*

1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{2}{5x^2}$ 2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{2-\sqrt{4-x}}{x}$ 3) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+1}-2x\right)$

4) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^3}{2x^2-1}$ 5) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^4-2}{2x^4+3x^3+1}$ 6) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x+2}{x^2-4}$

7) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+3}{4x-5}$ 8) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x}$ 9) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}+1}{e^{-x}-1}$

10) $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{x^2+x}{x^2-1}$ 11) $\displaystyle\lim_{x\to-5}\frac{2x^2+4x-30}{x+5}$ 12) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-2x}-x\right)$

13) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+x}{x^2-3}$ 14) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x-5}{x+3x^2}$ 15) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$

16) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{3x-2}}{x-1}$ 17) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{5-\sqrt{x+25}}$

18) $\displaystyle\lim_{x\to-3}\frac{x^3+27}{x^2-9}$ 19) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+2}{x^2+7x+1}$

20) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{3x-2}\right)$ 21) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-4x+5}\right)$

22) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2+5}$ 23) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x^2}\right)^{3x}$

24) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-3}-\sqrt{x^2+x+1}\right)$ 25) $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)^{\frac{1+3x^2}{x^2}}$

26) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+5x}{5x-3}\right)^{x^2}$ 27) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{8}{x}\right)^{x}$

10.- MÁS SOBRE ASÍNTOTAS

10.1. Asíntotas verticales

La recta $x = a$ es una asíntota vertical de $f(x)$ sii existe alguno de los siguientes límites

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x\to a+} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x\to a-} f(x) = \pm\infty$$

Observaciones:

(1) Una función *puede tener infinitas asíntotas verticales*.

(2) En las funciones racionales las asíntotas verticales se hallan en los valores x que anulan al denominador.

(3) La gráfica ele *la función no puede cortar a las asíntotas verticales*.

10.2. Asíntotas horizontales

La recta $y = k$ es una asíntota horizontal de $f(x)$ sii existe alguno de los siguientes límites:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = k \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = k$$

Observaciones:

(1) Una función tiene *como máximo dos asíntotas horizontales*.

(2) La gráfica de *la función puede cortar a las asíntotas horizontales*.

(3) Si en una función racional el grado del numerador es menor que el grado del denominador la recta $y = 0$ (el eje OX) es una asíntota horizontal.

(4) Si en una función racional el grado del numerador y el del denominador son iguales la recta $y = 1$) será una asíntota horizontal (b indica el cociente entre los coeficientes líderes del numerador y del denominador).

(5) Si en una fruición racional el grado del numerador es una unidad mayor que el del denominador la función presenta una asíntota oblicua y no hay asíntotas horizontales.

(6) Si en una función racional el grado del numerador es dos o más unidades mayor que el del denominador hay asíntota horizontal.

10.3. Asíntotas oblicuas

La recta $y = mx + n$, $m \neq 0$, es una asíntota oblicua de $f(x)$ sii existe alguno de los siguientes límites:

$$\lim_{x\to -\infty} \left(f(x) - mx - n \right) = 0 \qquad \lim_{x\to +\infty} \left(f(x) - mx - n \right) = 0$$

en cuyo caso $m = \lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ y $n = \lim_{x\to\infty} \left(f(x) - mx \right)$

Observaciones:

(1) Una función puede tener *como máximo dos asíntotas oblicuas*.

(2) *Si una función tiene asíntota oblicua no tiene asíntota horizontal y recíprocamente*.

(3) Si en una función racional el grado del numerador es dos o más unidades mayor que el del denominador, no hay asíntota oblicua.

(4) La gráfica de <u>*la función puede cortar a las asíntotas oblicuas*</u> en uno o varios puntos.

<u>EJERCICIOS:</u>

7. *Averigua las asíntotas horizontales y verticales de las siguientes funciones, cuando existan:*

a) $f(x)=\dfrac{x}{x^2}-64$

b) $f(x)=\dfrac{1}{x-7}$

c) $f(x)=\dfrac{6x+2}{4x-2}$

d) $f(x)=\dfrac{3}{x^3}$

e) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-4}$

f) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$

8. *Estudia las asíntotas de las siguientes funciones.*

1) $f(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$

2) $f(x)=\dfrac{x-x^2}{x+1}$

3) $f(x)=\dfrac{9-x^2}{x-3}$

4) $f(x)=\dfrac{x^2-x}{2x}$

5) $f(x)=\dfrac{(3-x)^2}{2x+1}$

6) $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-1}$

7) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+x+1}$

8) $f(x)=\dfrac{x^4-1}{x^2}$

9) $f(x)=\dfrac{(x+3)^2}{(x+1)^2}$

10) $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$

11) $f(x)=\dfrac{x^2+3x}{2x-1}$

12) $f(x)=\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-5x+4}$

13) $f(x)=\dfrac{x\left(x^2-x\right)}{x^2}$

14) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-4}$

15) $f(x)=\dfrac{3x^2}{x+2}$

16) $f(x)=\dfrac{1}{9-x^2}$

17) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{2x^2+1}$

18) $f(x)=\dfrac{x^3}{2x-5}$

9. *Dadas las siguientes funciones calcula sus asíntotas horizontales, verticales y oblicuas, si existen:*

a) $f(x)=x^2-4x+3$

b) $j(x)=\dfrac{2x+3}{x-2}$

c) $g(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$

d) $k(x)=\dfrac{2x^3}{x^2-4x}$

e) $h(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$

11.- CONTINUIDAD

11.1. Concepto de función continua

Una función $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en el punto $x = a \in Dom(f)$ cuando

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \qquad (1)$$

Aclaraciones:

- Para que una función sea continua en un punto, dicho punto ha de pertenecer a su dominio de definición. En otro caso, no tiene sentido hablar de continuidad.

  No tiene sentido decir que la función $y = \frac{1}{x}$ no es continua en $x = 0$, por que dicho punto no pertenece a su dominio.
- La condición (1) de continuidad implica:
  - $\exists \lim_{x \to a} f(x)$
  - $\exists f(a)$
  - Dichos valores coincidan: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Una función es continua cuando lo es en todos los puntos de su dominio de definición.

Si una función no es continua en un punto se dice que es discontinua en dicho punto.
Una función es continua por la derecha en un punto si existe límite por la derecha en él y coincide con el valor que toma la función en ese punto:

$$f \text{ continua en } x = a \text{ por la derecha} \Leftrightarrow \lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$$

Una función es continua por la izquierda en un punto si existe límite por la izquierda en él y coincide con el valor que toma la función en ese punto:

$$f \text{ continua en } x = a \text{ por la izquierda} \Leftrightarrow \lim_{x \to a-} f(x) = f(a)$$

Caracterización:
Una función es continua en un punto cuando es continua por la izquierda y por la derecha en ese punto:

$$f \text{ continua en } x = a \quad \Leftrightarrow f \text{ continua por la derecha y por la izquierda en } x = a$$

Una función es continua en $[a,b]$ cuando:

(1) Sea continua en el intervalo abierto (a,b)
(2) Sea continua por la derecha en a
(3) Sea continua por la izquierda en b

11.2. Continuidad de las funciones elementales

- Las **funciones polinómicas**, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, son continuas en todos los puntos.

- Las **funciones racionales**, $f\left(x\right)=\dfrac{P\left(x\right)}{Q\left(x\right)}$, son continuas en su dominio.
- La **función exponencial**, $y=e^{f(x)}$, es continua siempre que lo sea $f\left(x\right)$.
- La **función logarítmica**, $y=\log f\left(x\right)$, es continua en todo punto x, tal que $f\left(x\right)>0$ y $f\left(x\right)$ sea continua.
- Las **funciones trigonométricas**, $y=\operatorname{sen} x$ e $y=\cos x$, son siempre continuas. La función $y=\operatorname{tg} x$ es continua en su dominio: $\mathbb{R}-\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi \;\text{ con } k\in\mathbb{Z}\right\}$.
- Las **funciones definidas a trozos** serán continuas si lo son en sus intervalos respectivos y en los puntos de unión. En estos puntos habrá que ver que la función esté definida y que los límites laterales existan y sean iguales.

EJERCICIOS:

10. *Estudia la continuidad de la siguiente función definida a trozos:*

$$f\left(x\right)=\begin{cases} 1-x^2 & \text{si} \quad x\le 1 \\ 3x^2-12x+9 & \text{si} \quad 1<x\le 3 \\ -2x^2+16x-30 & \text{si} \quad x>3 \end{cases}$$

11. *Dada la función*

$$f\left(x\right)=\begin{cases} x+t & \text{si} \quad x\le -2 \\ x^2-2t & \text{si} \quad -2<x\le 2 \\ 4x-8 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

determina el valor de t para que la función sea continua en todo su dominio.

12. *Dada la función* $f\left(x\right)=\begin{cases} \dfrac{x^2-25}{x-5} & \text{si} \quad x\ne 5 \\ 0 & \text{si} \quad x=5 \end{cases}$*, estudiar su continuidad.*

13. *Determinar* a y b *para que la siguiente función sea continua:*

$$f\left(x\right)=\begin{cases} x^2+1 & \text{si} \quad x<0 \\ ax+b & \text{si} \quad 0\le x\le 3 \\ x-5 & \text{si} \quad x>3 \end{cases}$$

14. *Halla los valores de los parámetros que aparecen para que la siguiente función sea continua:*

$$f\left(x\right)=\begin{cases} kx+5 & \text{si} \quad x\le 2 \\ x^3+2hx^2-3x-2 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

15. *Hallar el valor de k para que cada una de las siguientes funciones sea continua:*

a) $f(x)=\begin{cases} kx+1 & \text{si} \quad x\le 1 \\ k^2x^2+2x-k & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases} -k^2-x^2 & \text{si} \quad x<1 \\ 1+k(x-1) & \text{si} \quad x\ge 1 \end{cases}$

16. *Estudia la continuidad de las siguientes funciones:*

a) $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x\le 1 \\ 4-ax^2 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$ d) $f(x)=\begin{cases} kx^2-4 & \text{si} \quad x\le 3 \\ x+k & \text{si} \quad x>3 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x+1} & \text{si} \quad x\ne -1 \\ h^2+2h & \text{si} \quad x=-1 \end{cases}$ e) $f(x)=\begin{cases} 6-\dfrac{x}{2} & \text{si} \quad x<2 \\ x^2+kx & \text{si} \quad x\ge 2 \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+x}{x} & \text{si} \quad x\ne 0 \\ k & \text{si} \quad x=0 \end{cases}$ f) $f(x)=\begin{cases} 2^{kx+5} & \text{si} \quad x\le 2 \\ 2^{x+k} & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$

17. *Pon un ejemplo de una función donde falle sólo una de las tres condiciones necesarias para que sea continua en un punto.*

18. *Dada la función:* $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x^2}+b & x\le -1 \\ 3x^2+4 & -1<x<1 \\ -x^3+8 & x\ge 1 \end{cases}$

calcula el valor de b para que $f(x)$ *sea continua en* $x=-1$. *¿Es continua en* $x=1$*?*

19. *Calcula a y b para que sea continua la siguiente función:*

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax & x\le -1 \\ b & -1<x<3 \\ 2x+4 & x\ge 3 \end{cases}$$

20. *Estudia la continuidad de la función* $f(x)=\left|1-x^2\right|$.

21. *Se ha investigado el tiempo (T, en minutos) que se tarda en realizar cierta prueba de atletismo en función del tiempo de entrenamiento de los deportistas (x, en días), obteniéndose que*

$$T(x)=\begin{cases} \dfrac{300}{x+3} & \text{si} \quad 0\le x\le 30 \\ \dfrac{1{,}125}{(x-5)(x-15)} & \text{si} \quad x>30 \end{cases}$$

a) Justificar que la función $T(x)$ *es continua.*

b) ¿Se puede afirmar que cuanto más se entrene un deportista, menor será el tiempo empleado en realizar la prueba?

22. *La calificación obtenida por un estudiante en un examen depende de las horas x de preparación a través de la función*

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{5} & \text{si} \quad 0\le x\le 15 \\ \dfrac{2x}{0,2x+3} & \text{si} \quad x>15 \end{cases}$$

a) *¿Tiene sentido afirmar que a mayor tiempo de preparación corresponde mayor calificación?*
b) *¿Es dicha función continua?*

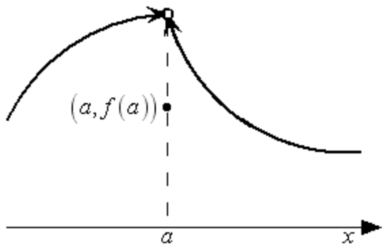
23. *Dada la función*

$$f(x)=\begin{cases} 2x+a & \text{si} \quad x\le -1 \\ -x^2+2 & \text{si} \quad -1<x\le 1 \\ \ln x & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

a) *Calcular a para que la función f sea continua en* $x=-1$.
b) *Representa la función para* $a=3$.

11.3. Clasificación de las discontinuidades

1) Si $\exists \lim_{x\to a} f(x)=L$ y $L\neq f(a)$ entonces se dice que f tiene una **discontinuidad evitable en el punto** $x=a$.



El valor que deberíamos darle a la función en dicho punto para que fuera continua en él se llama valor verdadero de la función en a, y es:

$$f(a):=\lim_{x\to a} f(x)$$

EJERCICIO:

24. *Estudia la continuidad de la siguiente función, clasificando su discontinuidad:*

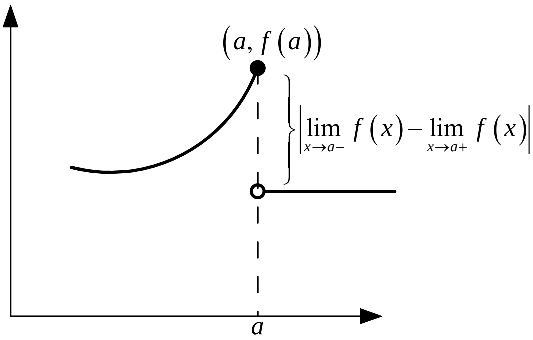
$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{si} \quad x\neq 1 \\ 3 & \text{si} \quad x=1 \end{cases}$$

2) Si $\exists \lim_{x\to a-} f(x)=L$, $\exists \lim_{x\to a+} f(x)=L'$ y $L\neq L'$ se dice que f presenta una **discontinuidad de salto o de primera especie en** a.

En este caso, el valor

$$\left|\lim_{x\to a-} f(x) - \lim_{x\to a+} f(x)\right|$$

se llama <u>salto de la función en a</u>, y puede ser finito o infinito.

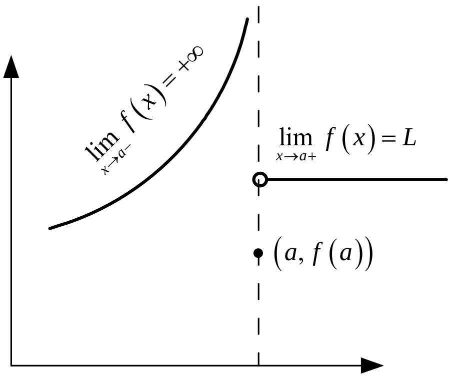


<u>EJERCICIO:</u>

25. *Estudia la continuidad de la siguiente función, clasificando su discontinuidad:*

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si} \quad x \le 1 \\ x-1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

3) Las discontinuidades que no sean ni evitables ni de primera especie se denominan **<u>discontinuidades de segunda especie</u>**, es decir, cuando al menos uno de los límites laterales no exista.



<u>EJERCICIOS:</u>

26. *Estudia la continuidad de la siguiente función, clasificando su discontinuidad:*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \le 0 \\ 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

27. *Estudia la continuidad de las siguientes funciones, clasificando sus discontinuidades:*

a) $f(x) = \begin{cases} |x-3| & \text{si} \quad x \ne -3 \\ 2 & \text{si} \quad x = -3 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 9-x^2 & \text{si} \quad x \le 2 \\ 3x+2 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-2} & \text{si} \quad x \le 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+1} & \text{si} \quad x < 4 \\ \sqrt{x-4} & \text{si} \quad x \ge 4 \end{cases}$

11.4. Teoremas importantes

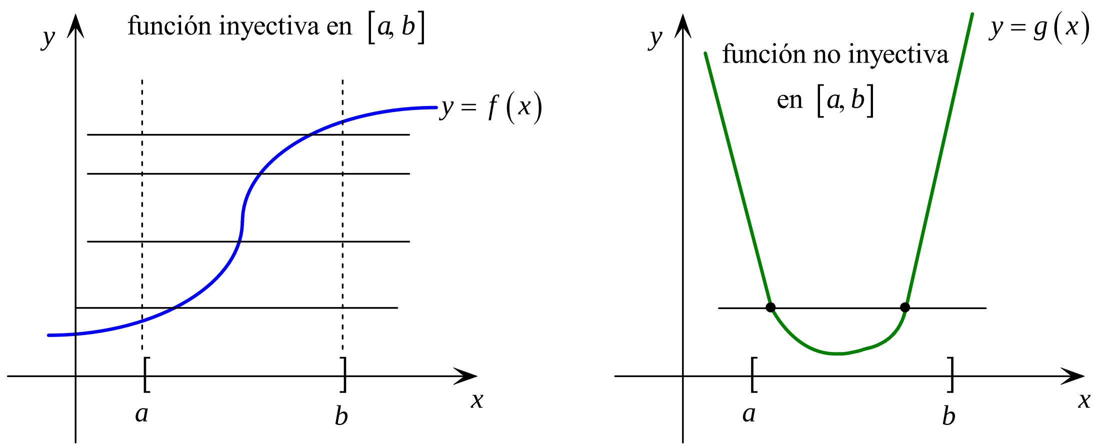
Un par de $\boxed{\text{resultados}}$ que es importante conocer y memorizar:

- **Teorema de Weierstrass**: Toda función continua en un intervalo de la forma $[a,b]$ tiene máximo y mínimo absolutos.

  Este teorema es de existencia, es decir, ***nos dice que hay*** máximo y mínimo absolutos, ***pero no cuáles son***. Para determinarlos, nosotros representaremos la función.

- Bajo la hipótesis adicional de que la función sea inyectiva, el máximo y el mínimo (absolutos) se alcanzan en los extremos del intervalo.

  Lo único que necesitamos conocer sobre las funciones inyectivas es la siguiente **interpretación geométrica**:
  Una función es inyectiva, en un intervalo, si cualquier recta paralela al eje OX sólo corta a la gráfica de la función en un único punto (en dicho punto).



11.5. Ejercicios de Selectividad

1. **[Julio de 2018 – Propuesta A – Ejercicio 3]** Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases} 4x-t & \text{si} \quad x\le 1 \\ (x-2)^2+t & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x=1$?

b) Para $t=0$, representa gráficamente la función f.

2. **[Junio de 2018 – Propuesta B – Ejercicio 3]** Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases} x+t & \text{si} \quad x<-1 \\ 4 & \text{si} \quad -1\le x\le 1 \\ (x-4)^2-5 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x=-1$?

b) Para $t=3$, representa gráficamente la función f.

3. **[Septiembre de 2017 – Opción B – Ejercicio 3]** Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases}(x+4)^2 & \text{si} \quad x<-1\\ 4 & \text{si} \quad -1\le x\le 1\\ (tx-6)^2 & \text{si} \quad x>1\end{cases}$$

a) Halla el valor de t para que la función $f(x)$ es continua en $x=1$.

b) Para $t=2$, representa gráficamente la función f.

4. **[Junio de 2017 – Opción B – Ejercicio 3]** Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases}(x+2)^2 & \text{si} \quad x\le 1\\ (x-2)^2+t & \text{si} \quad x>1\end{cases}$$

a) Halla el valor de t para que la función $f(x)$ es continua en $x=1$.

b) Para $t=0$, representa gráficamente la función f.

5. **[Septiembre de 2016 – Propuesta A – Ejercicio 3]** Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases}-(x+3)^2 & \text{si} \quad x<-3\\ t & \text{si} \quad -3\le x\le 3\\ -(x-3)^2 & \text{si} \quad x>3\end{cases}$$

a) Halla el valor de t para que la función $f(x)$ es continua en $x=3$.

b) Para $t=2$, representa gráficamente la función f.

6. **[Junio de 2016 – Propuesta B – Ejercicio 3]** Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases}(x-t)^2 & \text{si} \quad x<0\\ 1 & \text{si} \quad x=0\\ (x-1)^2 & \text{si} \quad x>0\end{cases}$$

a) Halla el valor de t para que la función $f(x)$ es continua en $x=0$.

b) Para $t=-1$, representa gráficamente la función f.

7. **[Septiembre de 2015 – Propuesta B – Ejercicio 3]** Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases}|x|-t & \text{si} \quad x\le 2\\ x^2-8x+13 & \text{si} \quad x>2\end{cases}$$

a) Halla el valor de t para que la función $f(x)$ es continua en $x=2$.

b) Para $t=1$, representa gráficamente la función f.

8. **[Junio de 2015 – Propuesta A – Ejercicio 3]** Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2+4x & \text{si} \quad x<-1 \\ t & \text{si} \quad -1\le x\le 1 \\ x^2-4x & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

a) Halla el valor de t para que la función $f(x)$ es continua en $x=1$.
b) Para $t=0$, representa gráficamente la función f.

9. **[Septiembre de 2014 – Propuesta A – Ejercicio 3]** Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2x & \text{si} \quad x<-1 \\ t & \text{si} \quad -1\le x\le 1 \\ x^2-2x & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

a) Halla el valor de t para que la función $f(x)$ es continua en $x=1$.
b) Para $t=0$, representa gráficamente la función f.

10. **[Junio de 2014 – Propuesta B – Ejercicio 3]** Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases} |x|-t & \text{si} \quad x\le 2 \\ x^2-6x+8 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

a) Halla el valor de t para que la función $f(x)$ es continua en $x=2$.
b) Para $t=1$, representa gráficamente la función f.

11. **[Reserva 2 de 2013 – Propuesta B – Ejercicio 3]** Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases} (-x-5)^2 & \text{si} \quad x<-1 \\ t & \text{si} \quad -1\le x\le 1 \\ (x-5)^2 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

a) Halla el valor de t para que la función $f(x)$ es continua en $x=1$.
b) Para $t=3$, representa gráficamente la función f.

12. **[Reserva 1 de 2013 – Propuesta A – Ejercicio 3]** Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases} x+1-t & \text{si} \quad x\le 0 \\ |x-2|-3 & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

a) Halla el valor de t para que la función $f(x)$ es continua en $x=0$.
b) Para $t=3$, representa gráficamente la función f.

13. **[Septiembre de 2013 – Propuesta A – Ejercicio 3]** Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases} x+t & \text{si} \quad x\le 2 \\ (x-4)^2+1 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

a) Halla el valor de t para que la función $f(x)$ es continua en $x=2$.
b) Para $t=0$, representa gráficamente la función f.

14. **[Junio de 2013 – Propuesta A – Ejercicio 3]** Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases} |-x-1|-t & \text{si} \quad x\le 2 \\ x-5 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

a) Halla el valor de t para que la función $f(x)$ es continua en $x=2$.

b) Para $t=1$, representa gráficamente la función f.

15. **[Reserva 2 de 2012 – Propuesta A – Ejercicio 4]** Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases} |x-2|-t & \text{si} \quad x\le 2 \\ (x-3)^2-2 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

a) Halla el valor de t para que la función $f(x)$ es continua en $x=2$.

b) Para $t=2$, representa gráficamente la función f.

16. **[Reserva 1 de 2012 – Propuesta A – Ejercicio 4]** Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases} (-x-3)^2 & \text{si} \quad x\le -2 \\ t & \text{si} \quad -2<x\le 2 \\ (x-3)^2 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

a) Halla el valor de t para que la función $f(x)$ es continua en $x=1$.

b) Para $t=3$, representa gráficamente la función f.

17. **[Junio de 2012 – Propuesta A – Ejercicio 4]** Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2-x+t & \text{si} \quad x\le 2 \\ (x-3)^2+1 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

a) Halla el valor de t para que la función $f(x)$ es continua en $x=2$.

b) Para $t=0$, representa gráficamente la función f.

18. **[Reserva 2 de 2011 – Propuesta B – Ejercicio 3]** Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases} -x+t & \text{si} \quad x\le -1 \\ x^2-3x & \text{si} \quad x>-1 \end{cases}$$

a) Halla el valor de t para que la función $f(x)$ es continua en $x=-1$.

b) Para $t=0$, representa gráficamente la función f.

19. **[Reserva 1 de 2011 – Propuesta B – Ejercicio 3]** Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases} -x^2-1 & \text{si} \quad x<0 \\ 0 & \text{si} \quad x=0 \\ x^2+1 & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

a) Halla el valor de t para que la función $f(x)$ es continua en $x=0$.

b) Representa gráficamente la función f.

20. **[Septiembre de 2011 – Propuesta B – Ejercicio 3]** Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases} 4 & \text{si} \quad x \le -2 \\ -2x & \text{si} \quad -2 < x \le 0 \\ \left|-x^2+4x\right| & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

a) Límites laterales de f en el punto $x=0$. ¿Es continua $f(x)$ es continua en $x=0$?

b) Representación gráfica de la función f.

21. **[Junio de 2011 – Propuesta B – Ejercicio 3]** Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases} -x^2-6x-8 & \text{si} \quad x \le -2 \\ 0 & \text{si} \quad -2 < x \le 2 \\ x^2-6x+8 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

c) Límites laterales de f en el punto $x=-2$.

d) Representación gráfica de la función f.