UNIDAD 4:

SISTEMAS DE ECUACIONES Y APLICACIONES

0. Introducción

Antes de introducirnos en el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales y no lineales, vamos a ver un ejemplo de aplicación de esta herramienta, aunque hay que señalar que la solución del sistema que se plantea en la aplicación queda fuera de lo que se va a estudiar aquí, pero que bien puede ilustrar la utilidad práctica de estudiar sistemas de ecuaciones lineales entre otras cosas.

El buscador de Internet Google tiene ideas muy novedosas, siendo la más original el sistema que usa para valorar la importancia de una página web frente a las demás, y, así, saber en qué posición mostrarla al ser obtenida como resultado de una búsqueda. La idea es sencilla de contar, pero difícil de implementar en un sistema informático: cuánto más referenciada esté una página web, más importancia se le otorga. Está claro que, si una página web contiene información interesante, estará muy referenciada en páginas de temática similar. Por lo tanto, este sistema de medida es una buena idea, y de hecho funciona estupendamente. El problema matemático que supone averiguar el peso específico de una página web, a partir del número de veces que es referenciada en 1350 millones de páginas web que ha explorado Google (datos de 1996), no es sencillo de resolver. Para empezar, es un problema puramente topológico, lo que significa que carecemos de métrica (o sea, una forma de asignar valores numéricos a cada elemento del problema y así poder operar con ellos para tratar de obtener un resultado). Por otro lado, es importante matizar que no vale lo mismo que una página tenga un enlace en una página que nos podemos crear rápidamente en Geocities[1], a tener un enlace en la página de entrada de Yahoo.com (buscador de referencia en aquella época). Evidentemente, el segundo enlace es mucho más valioso que el primero, y eso Google lo tiene en cuenta. De modo que resolver este problema es como intentar averiguar la solución de un sistema de ecuaciones con 1350 millones de variables dependientes entre ellas en su mayoría. Este problema como bien saben los matemáticos se resuelve ni más ni menos que calculando los vectores propios de la matriz normalizada de los enlaces entre páginas, y mantener calculando uno o dos ordenadores muy potentes durante unos cuantos días[2].

1. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 2×2

Un sistema 2×2 (2 ecuaciones y 2 incógnitas) es un sistema de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

donde $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R}$ son los coeficientes, $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ los términos independientes y x, y las variables o incógnitas.

- Una <u>solución</u> del sistema es una pareja de valores de las variables que satisfacen las dos ecuaciones al mismo tiempo.

[1] Servicio gratuito de Webhosting fundado por David Bohnett y John Rezner en 1994.
[2] Obtenido de sólo LINUX, revista nº 20, Año 3, 1996.

- Dos sistemas son equivalentes cuando tienen la misma solución.
- Resolver un sistema es encontrar todas sus soluciones.

Resolución de sistemas lineales 2×2

- ***Método de sustitución***

Consiste en despejar una de las dos variables de cualquiera de las ecuaciones (conviene elegir la ecuación de forma que la variable tenga coeficiente ±1, si ello es posible) y sustituir dicho valor en la otra ecuación. Se obtiene así una ecuación de primer grado.

- ***Método de igualación***

Despejar la misma variable de las dos ecuaciones e igualar sus expresiones. Al igual que en el caso anterior se obtiene una ecuación de primer grado.

- ***Método de reducción***

Consiste en eliminar una de las dos variables. Para ello sumaremos ambas ecuaciones, habiendo multiplicado previamente (si es necesario) una o las dos ecuaciones por números convenientes, de forma que los coeficientes de la variable que queremos eliminar sean opuestos.

Discusión de sistemas

- El sistema es **compatible** si tiene solución
    - Compatible **determinado** si tiene solución única
    - Compatible **indeterminado** si tiene infinitas soluciones
- El sistema es **incompatible** si no tiene solución

Interpretación geométrica de sistemas lineales 2×2

- Si el sistema es compatible determinado, la solución es un punto, que es el punto de corte de las rectas que representan dichas ecuaciones.
- Si el sistema es compatible indeterminado es porque las dos ecuaciones representan a la misma recta.
- Si el sistema es incompatible es porque las rectas son paralelas.

2. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 3×3: MÉTODO DE GAUSS

Son de la forma

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2 \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3 \end{cases}$$

donde $a_{11},a_{12},a_{13},a_{21},a_{22},a_{23},a_{31},a_{32},a_{33},b_1,b_2,b_3\in\mathbb{R}$ y $x,\ y,\ z$ son las incógnitas. Una solución del sistema es una terna (x,y,z) que transforma todas las ecuaciones en identidades.

Transformaciones elementales de Gauss

1. Reordenar las ecuaciones y/o incógnitas $(F_i \leftrightarrow F_j)$.

2. Multiplicar los dos miembros de una ecuación por un número distinto de cero $(a \cdot F_i$ con $a \in \mathbb{R} - \{0\})$.
3. Sumar a una ecuación otra (u otras) multiplicada previamente por un número $\left(aF_i + F_j\right)$.

Método de Gauss

Consiste en utilizar las transformaciones elementales para triangular el sistema, es decir,

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} c_{11}x + c_{12}y + c_{13}z = d_1 \\ \qquad c_{22}y + c_{23}z = d_2 \\ \qquad\qquad c_{33}z = d_3 \end{cases}$$

Para resolver el sistema triangular basta con resolver la tercera ecuación (obtenemos «*z*»), sustituir en la segunda y obtener el valor de «*y*», y sustituir ambos valores en la primera ecuación para obtener «*x*».

EJEMPLOS:

1) $$\left.\begin{array}{r} 2x + y - z = 6 \\ x - y + 2z = -1 \\ -x + 3y \quad = 1 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 6 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1+F_3]{-2F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -5 & 8 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{F_2 \leftrightarrow \frac{1}{2}F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{-3F_2+F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{array}\right) \longrightarrow \left.\begin{array}{r} x - y + 2z = -1 \\ y + z = 0 \\ -8z = 8 \end{array}\right\} \to$$

$$\to \begin{cases} z = \dfrac{8}{-8} = -1 \\ y + z = 0 \;\to\; y - 1 = 0 \;\to\; y = 1 \\ x - y + 2z = -1 \;\to\; x = -1 + y - 2z = -1 + 1 + 2 = 2 \end{cases}$$

La solución del sistema es $\left(x, y, z\right) = \left(2, 1, -1\right)$ (Sistema Compatible Determinado)

2) $$\begin{cases} x - y + 2z = 7 \\ 2x + y + 5z = 10 \\ x + y - 4z = -9 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 5 & 10 \\ 1 & 1 & -4 & -9 \end{array}\right) \xrightarrow[-F_1+F_3]{-2F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & -6 & -16 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3:2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & -8 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3}$$

$$\xrightarrow{F_2\leftrightarrow F_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&7\\0&1&-3&-8\\0&3&1&-4\end{array}\right)\xrightarrow{-3F_2+F_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&7\\0&1&-3&-8\\0&0&10&20\end{array}\right)\begin{array}{c}[1]\\ [2]\\ [3]\end{array}$$

La ecuación [3] es: $10z=20\to z=2$
Sustituimos en [2]: $y-3z=-8\to y-3\cdot 2=-8\to y=-2$
Sustituimos en [1]: $x-y+2z=7\to x-(-2)+2\cdot 2=7\to x=1$

Solución: $(x,y,z)=(1,-2,2)$ (Sistema compatible determinado)

Interpretación geométrica de sistemas lineales 3×3

Cada una de las ecuaciones de un sistema 3×3 representa geométricamente un plano. Tenemos así la siguiente interpretación:

- Si el sistema es **compatible determinado**, la solución es un punto, que es el punto de corte de los tres planos que representan dichas ecuaciones.
- Si el sistema es **compatible indeterminado** es porque los tres planos se cortan en una recta.
- Si el sistema es **incompatible** es porque los tres planos no se cortan a la vez.

Sobre el **número de operaciones** que hay que realizar para resolver un sistema de ecuaciones lineales:

Número de ecuaciones	Método de Gauss	Método de Cramer[3]
5	90	3600
10	705	$4\cdot 10^8$

3. SISTEMAS DE ECUACIONENO LINEALES 2×2

Los que estudiaremos son sistemas en los que una de las dos ecuaciones es no lineal, es decir, aparecerán productos de las variables, una variable al cuadrado o la inversa de una variable y la otra ecuación será, en general, lineal.
Para su **resolución** utilizaremos los mismos métodos que para los sistemas de ecuaciones lineales (igualación, sustitución).

EJEMPLO:

$$\begin{cases}y-x=1\\x^2+y^2=5\end{cases}$$

Para resolver este sistema no lineal, despejamos *y* de la primera ecuación: $y=1+x$
y sustituimos en la segunda ecuación:

$$x^2+(1+x)^2=5$$

Resolvemos esta ecuación de segundo grado:

$$x^2+1+x^2+2x=5\to 2x^2+2x-4=0$$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 2\cdot(-4)}}{2\cdot 2}=\frac{-2\pm 6}{4}=\begin{cases}1\\-2\end{cases}$$

[3] Método que se verá en Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II, y que usa determinantes.

Ya tenemos los valores de *x*, pero nos faltan los de *y*. Para hallarlos, sustituimos en la ecuación $y = 1 + x$ que es la más sencilla de las dos:

$$y = 1 + x = \begin{cases} 1 + 1 = 2 \\ 1 + (-2) = -1 \end{cases}$$

Por tanto, las soluciones del sistema son: $(x, y) = \begin{cases} (1, 2) \\ (-2, -1) \end{cases}$

4. EJERCICIOS

SISTEMAS LINEALES

1. Resuelve por los cuatro métodos que conoces (sustitución, igualación, reducción y geométrico) los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x+2y=5 \\ 2x+y=7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-2y=12 \\ x+5y=38 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+2y=5 \\ 4x+2y=14 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5x-y=23 \\ -9x+5y=13 \end{cases}$

2. Invirtiendo un millón de euros en acciones de tipo A y dos millones en acciones de tipo B, obtendríamos unos intereses totales (anuales) de 280 000 euros, y si invertimos dos millones en A y un millón en B, obtenemos 260 000 euros. ¿Cuáles serían los intereses si se invirtieran tres millones en A y cinco millones en B?

3. La nota media de Matemáticas en la clase de 1ºA es 5,4 y en 1ºB es 6,4. ¿Cuántos estudiantes hay en cada clase si en total son 50, con una media de 5,88?

4. Un comerciante compra 50 kg de harina y 80 kg de arroz, por los que tiene que pagar 66,10 €; pero consigue un descuento del 20% en el precio de la harina y un 10% en el del arroz. De esa forma paga 56,24 €. ¿Cuáles son los precios primitivos de cada artículo?

5. Un terreno ha sido dividido en dos partes desiguales, cuya diferencia es de 272 m^2. Los $5/6$ de la primera parte reúnen igual número de metros cuadrados que los $5/7$ de la segunda. Calcula el valor del total del terreno, vendido a 18 000 € la ha.

6. Las dos cifras de un número suman 12. Si se invierte el orden de las mismas, se obtiene un número 18 unidades mayor. Calcula dicho número.

7. Una tienda ha vendido 60 ordenadores, cuyo precio original era de 1 200 €, con un descuento del 20% a unos y un 25% a otros. Si se han recaudado 56 400 €, calcula a cuántos ordenadores se les rebajó el 25%.

8. Resuelve los siguientes sistemas por el método de Gauss:

1) $\begin{cases} x+y-2z=-5 \\ 2x-y+z=2 \\ 3x+2y+z=5 \end{cases}$ 10) $\begin{cases} 2x-y+z=3 \\ -x+2z=1 \\ -2y+6z=-4 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x-y+2z=6 \\ 3x+y-z=2 \\ -x+2y-z=0 \end{cases}$ 11) $\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ -x+3y-z=-2 \\ 2x-y+4z=6 \end{cases}$

3) $\begin{cases} -3x+2y-z=0 \\ x-2z=-1 \\ 2y-7z=3 \end{cases}$ 12) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y-z=2 \\ x+y=0 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x-y+2z=1 \\ 2x-z=2 \\ x+y=-3 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+y=2 \\ y+z=3 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x+3y-2z=-1 \\ x+z=2 \\ 2x+5y=8 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x+4y-8z=-8 \\ 4x+8y-z=76 \\ 8x-y-4z=110 \end{cases}$

8) $\begin{cases} 4x+5y-6z=1 \\ 2x+3z=1 \\ x-y=0.05 \end{cases}$

9) $\begin{cases} 8x+4y-5z=21 \\ x-y+2z=3 \\ 3x+2y-z=12 \end{cases}$

13) $\begin{cases} x-y+2z=7 \\ 2x+y+5z=10 \\ x+y-4z=-9 \end{cases}$

14) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3y+5z=11 \\ x-5y+6z=29 \end{cases}$

15) $\begin{cases} 3x+4y-z=3 \\ 6x-y+2z=-16 \\ x-y+2z=-6 \end{cases}$

16) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{5}=9 \\ \dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{9}+\dfrac{z}{3}=6 \\ \dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{2}=13 \end{cases}$

17) $\begin{cases} x-y+z=5 \\ \dfrac{x-1}{2}+\dfrac{y}{3}=1 \\ \dfrac{2x+y}{2}-\dfrac{3z+y}{4}=4 \end{cases}$

9. Un grupo de personas se reúne para ir de excursión, juntándose un total de 20 entre hombres, mujeres y niños. Contando hombres y mujeres juntos, su número resulta ser el triple del número de niños. Además, si hubiera acudido una mujer más, su número igualaría al de hombres.

a) Plantear un sistema para averiguar cuántos hombres, mujeres y niños han ido de excursión.
b) Resolver el problema.

10. Cierto estudiante obtuvo, en un control que constaba de 3 preguntas, una calificación de 8 puntos. En la segunda pregunta sacó dos puntos más que en la primera y un punto menos que en la tercera.

a) Plantear un sistema de ecuaciones para determinar la puntuación obtenida en cada una de las preguntas.
b) Resolver el sistema.

11. Una autoescuela tiene abiertas 3 sucursales en la ciudad. El número total de matriculados es 352, pero los matriculados en la tercera son sólo una cuarta parte de los matriculados en la primera. Además, la diferencia entre los matriculados en la primera y los matriculados en la segunda es inferior en dos unidades al doble de los matriculados en la tercera.

a) Plantear un sistema de ecuaciones para averiguar el número de alumnos matriculados en cada sucursal.
b) Resolverlo.

12. Un joyero tiene tres clases de monedas *A*, *B* y *C*. Las monedas de tipo *A* tienen 2 gramos de oro, 4 gramos de plata y 14 gramos de cobre; las de tipo *B* tienen 6 gramos de oro, 4 gramos de plata y 10 gramos de cobre, y las de tipo *C* tienen 8 gramos de oro, 6 gramos de plata y 6 gramos de cobre. ¿Cuántas monedas de cada tipo debe fundir para obtener 44 gramos de oro, 44 gramos de plata y 112 gramos de cobre?

13. Un autobús urbano transporta en hora punta 90 viajeros de tres tipos: viajeros que pagan el billete entero, que vale 1 €; estudiantes que tienen un 25% de descuento al presentar el carné; jubilados de la localidad que únicamente pagan el 50% del precio del billete. La recaudación del autobús en ese viaje fue de 64 €. Calcula el número de viajeros de cada clase sabiendo que el número de jubilados era el mismo que el número del resto de viajeros.

14. Una empresa dispone de 27 200 € para actividades de formación de sus cien empleados. Después de estudiar las necesidades de los empleados, se ha decidido organizar tres cursos: A, B y C. La subvención por persona para el curso A es de 400 €, para el curso B es de 160 €, y de 200 € para el C. Si la cantidad que se dedica al curso A es cinco veces mayor que la correspondiente al B, ¿cuántos empleados siguen cada curso?

15. Un cajero automático contiene 95 billetes de 10, 20 y 50 € y un total de 2 000 €. Si el número de billetes de 10 € es el doble que el número de billetes de 20 €, averigua cuántos billetes hay de cada tipo.

16. Se dispone de tres cajas A, B y C con monedas de 1 euro. Se sabe que en total hay 36 euros. El número de monedas de A excede en 2 a la suma de las monedas de las otras dos cajas. Si se traslada 1 moneda de la caja B a la caja A, esta tendrá el doble de monedas que B. Averigua cuántas monedas había en cada caja.

17. Si la altura de Carlos aumenta el triple de la diferencia de las alturas de Antonio y Juan, Carlos sería igual de alto que Juan. Las alturas de los tres suman 515 cm. Ocho veces la altura de Antonio equivale a nueve veces la de Carlos. Halla las tres alturas.

18. Invirtiendo un millón de euros en acciones de tipo A y 2 millones en acciones de tipo B, obtenemos unos intereses totales (anuales) de 280 000 €, y si invertimos 2 millones en A y un millón en B, obtenemos 260 000 €. ¿Cuáles serían los intereses si se invirtieran 3 millones en A y 5 millones en B?

SISTEMAS NO LINEALES

19. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones no lineales, por el método que creas más conveniente:

1) $\begin{cases} y - x = 1 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$

10) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 58 \\ x^2 - y^2 = 40 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - y = 15 \\ xy = 100 \end{cases}$

11) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 21 \\ x + y = 1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ x^2 + xy = 0 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + y^2 = 11 - 3x \end{cases}$

6) $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ 2x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ x(x - y) = 2(y^2 - 4) \end{cases}$

8) $\begin{cases} \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} = 3 \\ x + y = 4 \end{cases}$

9) $\begin{cases} y^2 - 2y + 1 = x \\ \sqrt{x} + y = 5 \end{cases}$

12) $\begin{cases} x + y = 1 \\ xy + 2y = 2 \end{cases}$

13) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ xy - y^2 = 0 \end{cases}$

14) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 74 \\ 2x^2 - 3y^2 = 23 \end{cases}$

15) $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ \sqrt{x} - y = -3 \end{cases}$

16) $\begin{cases} \dfrac{3}{x} - \dfrac{x}{y} = 0 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$

17) $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 15 \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = 1 \end{cases}$

18) $\begin{cases} x + y = 1 \\ xy + 2y = 2 \end{cases}$

20. Resuelve el siguiente sistema por el método de reducción y comprueba que tiene cuatro soluciones:

$$\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 = 74 \\ 2x^2 - 3y^2 = 23 \end{array}\right\}$$

21. Halla las dimensiones de un rectángulo cuyo perímetro es 34 cm y su diagonal mide 13 cm.

22. Si se aumenta en 3 m el lado de un cuadrado, la superficie aumenta en 75 m^2. ¿Cuál es su lado?

23. Calcula la longitud de los lados de un triángulo rectángulo isósceles cuyo perímetro es de 24 cm.

24. El producto de dos números es 4, y la suma de sus cuadrados 17. ¿Cuáles son esos números?

25. Halla una fracción equivalente a $\dfrac{5}{7}$ cuyos términos elevados al cuadrado sumen 1184.

26. Si acortamos en 2 cm la base de un rectángulo y en 1 cm su altura, el área disminuye en 13 cm^2. Calcula las dimensiones del rectángulo (original) sabiendo que su perímetro es de 24 cm.

27. Un trabajador gana 50 € más en el turno de noche que en el de día. Este mes ha cobrado 2 080 euros por 21 jornadas de trabajo. Si ha ganado tanto por el total de las jornadas de día como por las de noche, ¿cuántos turnos de noche ha realizado?

28. Miguel quiere hacer el marco de un espejo con un listón de madera de 2 m, sin que le sobre ni le falte nada. Sabiendo que el espejo es rectangular y que tiene una superficie de 24 dm^2, ¿de qué longitud deben ser los trozos que ha de cortar?

29. Si a cada uno de los dos términos de una fracción le sumamos 3, la fracción resultante es equivalente a $\frac{10}{11}$; pero si a cada uno le restamos 4, resulta otra fracción equivalente a $\frac{3}{4}$. Halla la fracción.

30. Una caja de zapatos es tan alta como ancha y tiene un volumen de 16 dm^3. Calcula sus dimensiones si la relación entre la anchura y la largura es $\frac{1}{2}$.

31. Halla las edades de dos alumnos, sabiendo que la suma de sus edades es 30 años y que su producto es 224.

32. Sabemos que el área de un triángulo rectángulo es 30 m^2, y que su hipotenusa mide 13 m. Halla la medida de sus dos catetos.

33. Una habitación tiene forma de rombo. Si su superficie es de 42 m^2, y la suma de sus dos diagonales es de 20 m., halla la medida de sus lados.

Dato: Área del rombo $A = \frac{D \cdot d}{2}$.

34. Se ha vallado una finca de forma rectangular empleándose para ello 4 hm de alambrada. Si la superficie de la finca es de 7500 m^2, ¿cuáles son sus dimensiones?

35. Disponemos de una pieza de plástico de forma rectangular, de modo que es 6 dm más larga que ancha. Con ella, se pretende construir una caja de 144 litros de capacidad, para lo cual cortamos un cuadrado de 2 dm de lado en cada esquina y posteriormente doblamos los bordes. Calcula las dimensiones de la caja. (***1 litro* $\simeq$ *1 dm^3***)

36. ¿Qué números son los que su suma y su producto dan la unidad?

37. Dos números suman doce y sus inversos, $\frac{12}{35}$. Hállalos.

38. Un triángulo rectángulo tiene de hipotenusa 5 cm. Si un cateto se hace cuatro veces mayor y otro aumenta en una unidad, la hipotenusa es de 13 cm. Hallar el perímetro del triángulo inicial.

39. Hallar la longitud de la arista de un cubo, sabiendo que un cubo que mide 2 m más de arista tiene una capacidad superior a la del primero en 218 m^3.