# UNIDAD 3: ECUACIONES Y APLICACIONES

## 1. IGUALDADES Y ECUACIONES

Las expresiones compuestas de dos miembros enlazados por el signo = se llaman **igualdades**, y ponen de manifiesto la equivalencia entre distintos conceptos, descubriendo con ellas aspectos nuevos de una misma realidad.

Las igualdades en las que en sus miembros aparecen expresiones algebraicas que solo se satisfacen para un conjunto de valores reales se llaman **ecuaciones**.

## 2. ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

Son ecuaciones de la forma

$$\boxed{ax+b=0}$$

(también llamadas lineales), donde $x$ es la variable o incógnita y $a,b\in\mathbb{R}$ con $a\neq 0$.

**Método general de resolución**

1.- **Quitar los paréntesis.** Para ello se aplica la propiedad distributiva (es decir, el número o expresión algebraica que está fuera del paréntesis, multiplica a todos los sumandos que hay dentro del paréntesis)

2.- **Eliminar los denominadores**. Para ello se reducen todas las fracciones a común denominador (calculando el m.c.m.), y una vez que todas las fracciones tienen igual denominador, se simplifica este, teniendo cuidado con los signos que hay delante de las fracciones.

Es posible que haya que volver a **quitar paréntesis.** Para ello se aplica la propiedad distributiva como antes.

3.- **Agrupar.** Llevamos a uno de los dos miembros todos los términos que tienen "$x$" y al otro todos los números (cuando un término cambia de miembro, también cambia de signo).

4.- **Operar.** Realizamos las operaciones.

5.- **Despejar.** El coeficiente de "$x$" pasa dividiendo (con el signo que tenga) al otro miembro de la ecuación.

**EJEMPLO:**

$$6\left(\frac{x+1}{8}-\frac{2x-3}{16}\right)=3\left(\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}\right)-\frac{3}{8}(3x-2)$$

**Quitamos los paréntesis:**

$$\frac{6\cdot(x+1)}{8}-\frac{6\cdot(2x-3)}{16}=\frac{3\cdot 3}{4}x-\frac{3}{4}-\frac{3\cdot 3x}{8}+\frac{3\cdot 2}{8}$$

Conviene realizar las operaciones directamente.

$$\frac{6x+6}{8}-\frac{12x-18}{16}=\frac{9x}{4}-\frac{3}{4}-\frac{9x}{8}+\frac{6}{8}$$

**Eliminamos los denominadores (calculando el mcm):**

$$\frac{2(6x+6)}{16}-\frac{12x-18}{16}=\frac{4\cdot 9x}{16}-\frac{4\cdot 3}{16}-\frac{2\cdot 9x}{16}+\frac{2\cdot 6}{16}$$

$$2\cdot(6x+6)-(12x-18)=36x-12-18x+12$$

$$12x+12-12x+18=36x-12-18x+12$$

Igual que antes conviene realizar las operaciones directamente, para que no se alarguen los pasos innecesariamente.
Le he puesto paréntesis al numerador $12x-18$ para que no haya problemas con el signo menos que hay delante.

**Agrupamos los términos que sean semejantes:**

$$12x-12x-36x+18x=-12+12-12-18$$

**Realizamos las operaciones:**

$$-18x=-30$$

**Resolvemos:**

$$x=\frac{-30}{-18}$$

El $-18$ «pasa dividiendo», con su signo.

**Simplificamos:**

$$x=\frac{5}{3}$$

# 2. ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA

Son ecuaciones de la forma

$$\boxed{ax^2+bx+c=0}$$

(también llamadas cuadráticas), donde $x$ es la incógnita y $a,b,c\in\mathbb{R}$ con $a\neq 0$.

Recuerda que cualquier ecuación de segundo grado (completa o incompleta) se puede transformar en una ecuación de la forma $ax^2+bx+c=0$ [1], cuyas soluciones vienen dadas por la fórmula de Bhaskara:

$$\boxed{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

**Método general para resolver ecuaciones de 2º grado:**

1º) Si la ecuación tiene **denominadores** o **paréntesis**, se procede como siempre (se quitan los paréntesis y después los denominadores)
2º) **Agrupar** todos los términos en uno de los dos miembros, de forma que la ecuación quede igualada a cero.
3º) **Operar** los términos que sean semejantes (los que tienen la misma parte literal), de forma que la ecuación se transforme en una de la forma [1].
4º) **Obtener los coeficientes** $a,b$ y $c$.
5º) **Aplicar la fórmula** de Bhaskara.

Llamamos **discriminante** de la ecuación [1] a

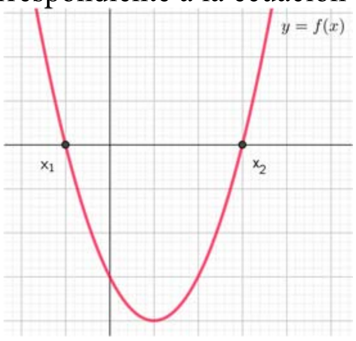
$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$$

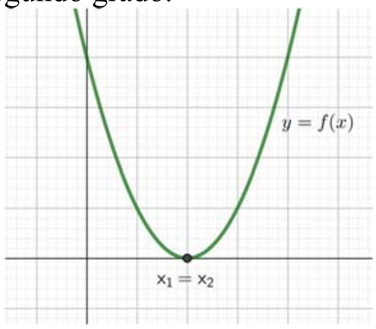
y nos indica la naturaleza de las soluciones de una ecuación de segundo grado:

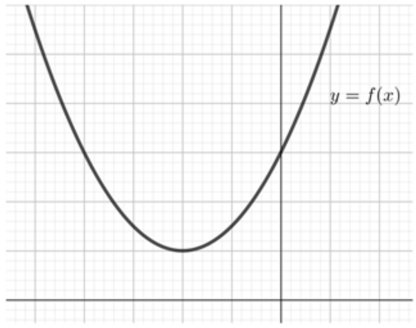
Si $\Delta > 0$, entonces la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.
Si $\Delta = 0$, entonces la ecuación tiene una raíz doble (esto es, las dos soluciones son iguales)
Si $\Delta < 0$, entonces la ecuación no tiene raíces reales.

**Interpretación geométrica de las soluciones**

Los tres casos anteriores se corresponden con las siguientes situaciones geométricas de la parábola correspondiente a la ecuación de segundo grado.




**EJEMPLO:**

$$\frac{(2x-1)(2x+1)}{3} + \frac{(x-2)^2}{4} = \frac{3x+4}{6} + \frac{x^2}{3}$$

**Quitamos los paréntesis:**

$$\frac{4x^2-1}{3} + \frac{x^2+4-4x}{4} = \frac{3x+4}{6} + \frac{x^2}{3}$$

Conviene realizar las operaciones directamente.

**Eliminamos los denominadores (calculando el mcm):**

$$\frac{4\cdot(4x^2-1)}{12} + \frac{3\cdot(x^2+4-4x)}{12} = \frac{2\cdot(3x+4)}{12} + \frac{4x^2}{12}$$

$$4\cdot(4x^2-1) + 3\cdot(x^2+4-4x) = 2\cdot(3x+4) + 4x^2$$

$$16x^2 - 4 + 3x^2 + 12 - 12x = 6x + 8 + 4x^2$$

Igual que antes conviene realizar las operaciones directamente, para que no se alarguen los pasos innecesariamente.
Hay que volver a quitar paréntesis.

**Agrupamos todos los términos en un miembro:**

$$16x^2 - 4 + 3x^2 + 12 - 12x - 6x - 8 - 4x^2 = 0$$

Para poder aplicar la fórmula, la ecuación tiene que estar igualada a cero.

**Realizamos las operaciones:**

$$15x^2 - 18x = 0$$

**Resolvemos:**

$$x = \frac{-(-18) \pm \sqrt{(-18)^2 - 4\cdot 15\cdot 0}}{2\cdot 15} = \frac{18 \pm 18}{30} = \begin{cases} \dfrac{36}{30} = \dfrac{6}{5} \\[2mm] \dfrac{0}{30} = 0 \end{cases}$$

En este caso no hay que aplicar la fórmula, pero de todas formas lo voy a hacer.

# 3. ECUACIONES QUE SE RELACIONAN CON LAS DE SEGUNDO GRADO

## Ecuaciones bicuadradas

Son ecuaciones de cuarto grado sin términos de grado impar:

$$\boxed{ax^4+bx^2+c=0} \qquad [2]$$

donde $a,b,c\in\mathbb{R}$ y $a\neq 0$.

**Método general de resolución:**

Para llegar a una ecuación de la forma [2] puede que haya que quitar paréntesis y denominadores. Si es así, se procede como con las ecuaciones de primer y segundo grado.

1º) Se efectúa el cambio de variable $\boxed{x^2=y}$ con lo que queda una ecuación de segundo grado en la incógnita $y$.

2º) Se resuelve la ecuación $ay^2+by+c=0$ resultante del paso anterior.

3º) Las soluciones de la ecuación original son $x=\pm\sqrt{y}$ donde $y$ son las soluciones de la ecuación del paso 2.

**EJEMPLO:**

$$x^4-26x^2=-25$$

$y^2-26y^2=-25$ — Cambio de variable: $y=x^2$

$y^2-26y^2+25=0$ — Igualamos a cero, para poder aplicar la fórmula.

$$y=\frac{-(-26)\pm\sqrt{(-26)^2-4\cdot1\cdot25}}{2\cdot1}=\frac{26\pm24}{2}=\begin{cases}\frac{50}{2}=25\\ \frac{2}{2}=1\end{cases}$$

Resolvemos la ecuación en *y*.

$x^2=y=25\rightarrow x=\pm\sqrt{25}=\pm5$

$x^2=y=1\rightarrow x=\pm\sqrt{1}=\pm1$

Resolvemos la ecuación en *x*, deshaciendo el cambio de variable.

## Ecuaciones con radicales

Son ecuaciones en las que la incógnita aparece bajo el signo radical (raíz cuadrada).

**Método de resolución:**

1º) Se deja uno de los radicales solo en uno de los miembros.
2º) Se elevan al cuadrado los dos miembros de la ecuación.
3º) Si la ecuación contiene más radicales, se vuelven a repetir los pasos 1 y 2.
4º) Se resuelve la ecuación de primer o segundo grado que resulte.
5º) Se comprueban las soluciones en la ecuación original.

**EJEMPLO:**

$$2\sqrt{x-3}-x+3=0$$

$2\sqrt{x-3}=x-3$ — Dejamos solo el radical en uno de los miembros, trasponiendo el resto de los términos.

$\left(2\sqrt{x-3}\right)^2=(x-3)^2$ — Elevamos al cuadrado los dos miembros.

$4\cdot(x-3)=x^2+9-6x$ — Recuerda que el cuadrado de un producto es igual al producto de los cuadrados.

$4x-12=x^2+9-6x$ — Quitamos paréntesis.

$x^2+9-6x-4x+12=0$ — Igualamos a cero, ya que se trata de una ecuación de segundo grado.

$x^2-10x+21=0$

$$x=\frac{-(-10)\pm\sqrt{(-10)^2-4\cdot1\cdot21}}{2\cdot1}=\frac{10\pm\sqrt{16}}{2}=$$

Resolvemos la correspondiente ecuación de segundo grado.

$$=\frac{10\pm4}{2}=\begin{cases}\dfrac{14}{2}=7\\[2mm]\dfrac{6}{2}=3\end{cases}$$

Hay que comprobar si los valores que nos han salido, son soluciones de la ecuación radical.

$2\sqrt{7-3}-7+3=0\rightarrow0=0$ Verdad, luego es solución

$2\sqrt{3-3}-3+3=0\rightarrow0=0$ Verdad, luego es solución

# 4. LA FACTORIZACIÓN COMO RECURSO PARA RESOLVER ECUACIONES POLINÓMICAS

Siempre que podamos factorizar (fácilmente) la ecuación y ésta quede igualada a cero, este método ofrece buenos resultados.

Recuerda que, para factorizar una ecuación, se pueden aplicar los siguientes **procedimientos**:

a) **Sacar factor común** todo lo que se pueda.
b) Aplicar las **identidades notables**.
c) La regla de **Ruffini**

Para su resolución basta aplicar la siguiente ***propiedad***: «si un producto es igual a cero, es porque alguno de sus factores es cero».

**EJEMPLO:**

$$3x^3+6x^2-3x-6=0$$

$3x^3+6x^2-3x-6=(x-1)(x+1)(3x+6)$ — Aplicando Ruffini

$(x-1)(x+1)(3x+6)=0$ — Esta es la ecuación que hay que resolver.

$x-1=0 \rightarrow x=1$

$x+1=0 \rightarrow x=-1$

$3x+6=0 \rightarrow x=\frac{-6}{3}=-2$

Un producto es igual a cero, cuando alguno de sus factores es cero.

Las soluciones son: $1,\ -1$ y $-2$.

# 5. ECUACIONES EXPONENCIALES

Una **ecuación** es **exponencial** cuando la incógnita aparece en el exponente.

Vamos a resolver los siguientes *tipos de ecuaciones exponenciales*:

1) Reducibles a una igualdad de potencias de la misma base
2) Resolubles por cambio de variable
3) Resolubles tomando logaritmos

## 5.1. Reducibles a una igualdad de potencias de la misma base

Para resolverlas, generalmente se descomponen en factores primos las bases, y se realizan las operaciones necesarias hasta conseguir una igualdad de potencias con la misma base.

**EJEMPLO:**

Resolver la ecuación $4^{1-3x}=2^{x-2}$

$\left(2^2\right)^{1-3x}=2^{x-2}$ Descomponemos en factores la base 4

$2^{2(1-3x)}=2^{x-2}$ Potencia de una potencia: se deja la base y se multiplican los exponentes

$2(1-3x)=x-2$ Igualamos los exponentes (ya que las potencias tienen la misma base)

$2-6x=x-2$ Quitamos paréntesis

$-6x-x=-2-2$ Agrupamos: las *x* a un miembro y los números al otro

$-7x=-4$ Operamos

$x=\frac{-4}{-7}=\frac{4}{7}$ Resolvemos: el coeficiente de *x*, «pasa al otro miembro dividendo», pero con su signo.

**EJEMPLO:**

Resolver la ecuación $3\cdot 4^{3x}=768$

$4^{3x}=\frac{768}{3}$ El 3 que está multiplicando, pasa dividiendo.

$4^{3x}=256$ Efectuamos la división

$\left(2^2\right)^{3x}=2^8$ Descomponemos en factores primos las bases.

$2^{6x}=2^8$ Potencia de una potencia: se multiplican los exponentes.

$6x=8$ Igualamos los exponentes.

$x = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ Resolvemos.

### 5.2. Resolubles por cambio de variable

Para resolver este tipo de ecuaciones, tenemos que conseguir (factorizando las bases, aplicando las propiedades de las potencias…) que todas las exponenciales que aparezcan sean la misma. Dicha exponencial nos da el cambio de variable que hay que hacer. Al realizar dicho cambio queda una ecuación de las que ya sabemos resolver (de primer grado, de segundo, bicuadradas...).

**EJEMPLO:**

Resolver la ecuación $9^x - 8 \cdot 3^x - 5913 = 0$

$\left(3^2\right)^x - 8 \cdot 3^x - 5913 = 0$ Descomponemos 9 en factores primos.

$\left(3^x\right)^2 - 8 \cdot 3^x - 5913 = 0$ Intercambiamos los exponentes.

$y^2 - 8y - 5913 = 0$ Hacemos el cambio de variable $3^x = y$.

$$y = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5913)}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} \frac{8+154}{2} = 81 \\ \frac{8-154}{2} = -73 \end{cases}$$

Resolvemos la ecuación cuadrática.

$$3^x = \begin{cases} 81 \rightarrow 3^x = 3^4 \rightarrow x = 3 \\ -73 \rightarrow \text{No tiene solución} \end{cases}$$

Deshacemos el cambio de variable y resolvemos la ecuación original.

# 6. ECUACIONES LOGARÍTMICAS

Son ecuaciones en las que la incógnita viene afectada por el logaritmo.

**No existe un procedimiento general** para resolver todas las ecuaciones logarítmicas, por lo que en cada caso concreto habrá que utilizar lo que sabemos:

1) Definición de logaritmo
2) Propiedades de los logaritmos
3) Igualdad de logaritmos

En este tipo de ecuaciones **siempre hay que comprobar** que los valores obtenidos verifican la ecuación original, es decir, son solución.

**EJEMPLO:**

Resolver la siguiente ecuación: $\log 2 + \log\left(11 - x^2\right) = 2\log(5 - x)$

$\log\left[2 \cdot \left(11 - x^2\right)\right] = \log(5 - x)^2$ Aplicamos las propiedades de los logaritmos.

$2 \cdot \left(11 - x^2\right) = (5 - x)^2$ Igualamos las expresiones que hay dentro de los logaritmos.

$3x^2-10x+3=0 \rightarrow x=\begin{cases}3\\ \dfrac{1}{3}\end{cases}$

Resolvemos la ecuación de segundo grado correspondiente.

$11-3^2>0$ y $5-3>0$

$11-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2>0$ y $5-\dfrac{1}{3}>0$

Hay que comprobar que las soluciones cumplen la ecuación logarítmica, es decir, que $11-x^2>0$ y $5-x>0$, para las $x$ obtenidas.

$x=3$ y $x=\dfrac{1}{3}$

Soluciones de la ecuación.

¿$\log\left[2\cdot\left(11-3^2\right)\right]=\log\left(5-3\right)^2$?

$\log 4=\log 4 \;\rightarrow\; x=3$ si es solución

¿$\log\left[2\cdot\left(11-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\right)\right]=\log\left(5-\dfrac{1}{3}\right)^2$?

$\log\dfrac{196}{9}=\log\dfrac{196}{9} \;\rightarrow\; x=\dfrac{1}{3}$ si es solución

Comprobaciones.

# 7. APLICACIONES

- Se utilizan para resolver las ecuaciones en que la incógnita está en el exponente. Por ejemplo, si nos piden el número de períodos $T$ que hay que tener cierto capital $C$, para que el montante (capital existente en cada momento) $M$, sea el que nosotros queramos, hay de despejar $T$ de la siguiente ecuación, aplicando logaritmos:

$$M=C\left(1+\frac{r}{n}\right)^T \rightarrow T=\frac{\log M-\log C}{\log\left(1+\dfrac{r}{n}\right)}$$

  donde $M$ = montante, $C$ = capital, $r=\dfrac{R}{100}$ = tanto por uno ($R$ = rédito), $n$ = número de períodos por año y $T$ = número de períodos total.

- En la escala Richter para los terremotos.

$$M=\log_{10}\left(\frac{A\cdot\Delta t^3}{1{,}62}\right)$$

donde:
$A=$ amplitud de las ondas en milímetros, tomada directamente en el sismograma.
$\Delta t=$ tiempo en segundos desde el inicio de las ondas P (Primarias) al de las ondas S (Secundarias).
$M=$ magnitud arbitraria pero constante a terremotos que liberan la misma cantidad de energía.

- Para calcular números grandes.
- Para medir la sensibilidad de una película.
- …

# 8. EJERCICIOS

## ECUACIONES DE PRIMER GRADO

**1.** Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado:

a) $\frac{1+12x}{4}+\frac{x-4}{2}=\frac{3(x+1)-(1-x)}{8}$

b) $\frac{3x-2}{6}-\frac{4x+1}{10}=-\frac{2}{15}-\frac{2(x-3)}{4}$

c) $\frac{2x-3}{6}-\frac{3(x-1)}{4}-\frac{2(3-x)}{6}+\frac{5}{8}=0$

d) $\frac{2}{3}(x+3)-\frac{1}{2}(x+1)=1-\frac{3}{4}(x+3)$

e) $6\left(\frac{x+1}{8}-\frac{2x-3}{16}\right)=3\left(\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}\right)-\frac{3}{8}(3x-2)$

**2.** Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{(2x-3)^2}{16}-\frac{(x-1)^2}{4}=\frac{35}{16}$

b) $\frac{x+3}{5}-\frac{(x-1)^2}{4}=-\frac{1}{4}x^2-\left(\frac{x}{2}+2\right)$

c) $\frac{1}{2}\left[1-(x+2)^2\right]=-x-\frac{x^2-1}{2}$

d) $\frac{1}{2}\left[-2\left(x^2+1\right)-(x-3)^2\right]=\frac{1}{2}\left[3(x-1)-3(x+1)^2\right]$

## ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

**3.** Las siguientes ecuaciones son de segundo grado e incompletas. Resuélvelas sin aplicar la fórmula general:

a) $(3x+1)(3x-1)+\frac{1}{2}(x-2)^2=1-2x$

b) $\frac{(2x-1)(2x+1)}{3}+\frac{(x-2)^2}{4}=\frac{3x+4}{6}+\frac{x^2}{3}$

c) $\frac{x^2+2}{3}-\frac{x^2+1}{4}=1-\frac{x+7}{12}$

d) $\frac{x-1}{x}+x=1$

e) $(x+1)^2-(x-2)^2=(x+3)^2+x^2-20$

**4.** Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado:

a) $(x+1)^2-3x=3$

b) $(2x+1)^2=1+(x-1)(x+1)$

c) $\frac{(x+1)(x-3)}{2}+x=\frac{x}{4}$

d) $x+\frac{3x+1}{2}-\frac{x-2}{3}=x^2-2$

e) $\frac{x}{3}(x-1)-\frac{x}{4}(x+1)+\frac{3x+4}{12}=0$

f) $\frac{x-3}{x}+\frac{x+3}{x^2}=\frac{2}{3}$

## ECUACIONES BICUADRADAS

**5.** Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadradas, comprobando las soluciones obtenidas:

1) $x^4-26x^2=-25$
2) $4x^4-17x^2+4=0$
3) $4x^4+9=37x^2$
4) $x^4-10x^2+9=0$
5) $4x^4-5x^2+1=0$
6) $x^4-3x^2+2=0$
7) $x^4-13x^2+36=0$
8) $x^4-5x^2-36=0$
9) $x^4-34x^2+225=0$
10) $36x^4-13x^2+1=0$

## ECUACIONES RADICALES

**6.** Resuelve las siguientes ecuaciones radicales, comprobando las soluciones obtenidas:

1) $\sqrt{x+4}=7$
2) $x-\sqrt{25-x^2}=1$
3) $x+\sqrt{5x+10}=8$
4) $2\sqrt{x-3}-x+3=0$
5) $5\sqrt{2x-5}-1=2x$
6) $\sqrt{10-x}+3x=6$
7) $2x+\sqrt{x+4}=2$
8) $x+1-\sqrt{5x-1}=0$
9) $6\sqrt{x}-5=x+3$
10) $\sqrt{2x-3}+\sqrt{x+10}-7=0$

### PROBLEMAS DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO

**7.** Problema número 26 del papiro de Ahmes (siglo XVII a.C.)
«Calcula el valor de *Aha* si *Aha* y la cuarta parte de *Aha* es igual a 15».

**8.** Epitafio de Diofanto de Alejandría (siglo III a.C.)
«¡Caminante! Aquí yacen los restos de Diofanto.
Los números pueden mostrar, ¡oh maravilla!, la duración de su vida,
cuya sexta parte constituyó la hermosa infancia.
Había transcurrido además una duodécima parte de su vida cuando se cubrió de vello su barba.
A partir de ahí, la séptima parte de su existencia transcurrió en un matrimonio estéril.
Pasó, además, un quinquenio y entonces le hizo dichoso el nacimiento de su primogénito.

Este entregó su cuerpo y su hermosa existencia a la tierra habiendo vivido la mitad de lo que su padre llegó a vivir.
Por su parte Diofanto descendió a la sepultura con profunda pena habiendo sobrevivido cuatro años a su hijo.
Dime, caminante, cuántos años vivió Diofanto hasta que le llegó la muerte».

**9.** Problema de Bhaskara del libro *Lilavati* (siglo XII):
«Un quinto de un enjambre de abejas se posa sobre una flor de kadamba, un tercio sobre una flor de silinda; tres veces la diferencia de esos dos números voló a las flores de una kutuja, y quedó una sola abeja que se elevó por el aire igualmente atraída por el perfume de un jazmín y de un pandamus.
Dime tú ahora, mujer fascinante, cuál era el número de abejas del enjambre».

**10.** Un señor tiene 40 años y su hijo 5. ¿Dentro de cuántos años será la edad del padre el triple que la del hijo?

**11.** Halla cuatro enteros consecutivos cuya suma sea 74.

**12.** Halla tres impares consecutivos, sabiendo que si sumamos los dos menores y le restamos el mayor se obtiene 21.

**13.** Un jeque deja en herencia a sus tres hijos una cuadra de caballos, atendiendo al siguiente reparto: al primero, la mitad de los caballos más medio caballo; al segundo, la mitad de los que quedan más medio caballo, y al tercero, la mitad de los que quedan más medio caballo. ¿Cuántos caballos hay en la cuadra? (¡Ojo! No hay que matar ningún caballo)

**14.** Halla el número de personas que se colaron en una fiesta sabiendo que, ya había dentro 15 personas; pasada una hora terminaron de llegar los invitados y se triplicó el número de personas que había en la fiesta; más tarde abandonaron la fiesta 9; posteriormente, debido al jaleo y mal comportamiento los guardias de seguridad expulsaron a varios individuos, lo que redujo el grupo de asistentes a su tercera parte; y, finalmente, cuando regresaron 6 de los que se habían marchado, quedaban en la fiesta 40 marchosos.

**15.** Tres operarios trabajan en total 96 horas semanales en una cadena de producción. Si el tiempo dedicado por uno de ellos a este fin son los 3/5 del tiempo empleado por otro y éste los 5/8 del dedicado por el tercero, ¿qué horas semanales permanece en la cadena cada trabajador?

**16.** Un ciclista marcha a 24 km/h tras un peatón que camina a 8 km/h y que salió dos horas antes. ¿Cuándo se encontrarán?

**17.** Un jugador de fútbol marcó en la pasada liga un total de 32 goles. Si la tercera parte de los que marcó en casa, los marcó fuera, ¿cuántos goles marcó fuera y cuántos marcó dentro de casa?

**18.** Una madre reparte entre sus tres hijos cada semana 200 €. El mayor recibe los 2/3 del total y el resto se lo reparten los otros dos hijos, de manera que el más pequeño obtiene 2/3 menos de lo que obtiene el mediano. ¿Qué cantidad recibe cada uno de los tres hermanos?

**19.** Para llenar de agua una balsa de 272 $m^3$ se utilizan dos caños: el primero vierte 8 $m^3$ en una hora, y el segundo, 6 $m^3$ en ese mismo tiempo. Si el caudal del primer caño se ha agotado antes que el del segundo y éste continúa vertiendo agua durante 36 horas más, calcula el tiempo total empleado para llenar la balsa.

**20.** Un camión descarga en una obra 900 ladrillos con los que se pretende construir tres tabiques. Halla el número de ladrillos que le corresponden a cada tabique sabiendo que el segundo necesita 1/3 de ladrillos menos que el primero, y el tercero, el doble que el segundo.

**21.** Paco debe pagar una deuda a su amigo Antonio. Como solo tiene 200 €. en el bolsillo, le da 150 € a fin de no quedarse sin dinero; de esta manera consigue abonar el 60 % de lo que adeudaba. ¿Qué cantidad debía Paco antes de abonar los 150 €? ¿Cuánto le seguirá debiendo a su amigo Antonio?

**22.** Un grupo de amigas son aficionadas a recorrer en piragua el río que pasa por su localidad. Todos los domingos salen a las 8 de la mañana y bajan por el río imprimiendo a la embarcación una velocidad de 12 km/h; luego realizan la subida al punto de partida, a una velocidad de 7 km/h. ¿En qué punto del recorrido tendrán que darse la vuelta si un domingo determinado, por motivos particulares, deben estar de regreso a las diez y media?

**23.** Unos padres llevan a sus hijos al teatro. Cuando se disponen a sacar las entradas de palco, a 250 € cada una, observan que les faltan 50 €, por lo que deben sacar entradas más baratas, a 150 € cada una, con lo que les sobran 55 € del total que llevaban. ¿Cuántos miembros componen esta familia?

## PROBLEMAS DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

**24.** Problema de Al-Khwarizmi del tratado *Al-jabr wa´l muqabalah* (siglo IX):
«Divide el número 10 en dos partes, de modo que la suma de los productos obtenidos, multiplicando cada parte por ella misma, sea igual a 58».

**25.** Al sumar los cuadrados de dos números enteros consecutivos se obtiene 181. ¿Cuáles son esos números?

**26.** La suma de los cuadrados de dos números enteros pares consecutivos es 452. ¿Cuáles son estos números?

**27.** La suma de los cuadrados de tres números es 241. ¿Cuáles son los números si el segundo es cinco unidades mayor que el primero y el tercero es el triple del primero?

**28.** La suma de los cuadrados de la edad actual de un muchacho y de la que tendrá dentro de dos años es igual a 580. ¿Cuántos años tiene el chico?

**29.** Halla un número que multiplicado por el mismo disminuido en dos unidades se obtenga un producto igual a 75 más la mitad del número buscado.

**30.** Al aumentar en dos centímetros el lado de un cuadrado obtenemos otro cuya área coincide con el triple de su lado. ¿De qué cuadrado se trata?

## ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

**31.** Resuelve las ecuaciones:

(a) $81 = 3^x$ (b) $5 = 100^x$ (c) $-4 = 6^{4x}$

**32.** Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $4^{1-3x} = 2^{x-2}$ c) $4^x - 50 \cdot 2^x = 9984$

b) $2^{5x} = 4^{x+3}$ d) $9^x - 8 \cdot 3^x - 5913 = 0$

**33.** Halla el valor de *x* para que:

a) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 224$ b) $3^x - \left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{728}{27}$

**34.** Resuelve estas ecuaciones exponenciales:

a) $2^{x^2-1} = 32$ d) $3^x - 3^{x-1} + 3^{x-2} = 21$

b) $3^{1-2x} = 2187$ e) $25^x - 100 \cdot 5^x = 3125$

c) $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 2^{3x+1}$ f) $\left(\frac{1}{4}\right)^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x + \frac{7}{64} = 0$

**35.** Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\log_2 x = 10$ c) $\log_8 x^3 = -2$

b) $\log x = 6,5$ d) $\ln x = -2$

**36.** Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x = 15,2^{1,1}$ e) $x = 1,001^{100}$ i) $\ln x = 3,2$

b) $0,5 = 5^{2x}$ f) $\log_6 x = 3$ j) $x = \log_7 8$

c) $\log_5 x = 2,5$ g) $\log_7 (3x) = -0,2$ k) $\log_2 \left(\frac{1}{32}\right) = x$

d) $\log x = -4$ h) $\log x = 7,21$ l) $x = \log_{16} 4$

**37.** Halla la solución de estas ecuaciones:

(a) $x = \log_2 \left(\frac{1}{64}\right)$ (b) $x = \log_6 6^{-0.4}$ (c) $x = \log_{12} 144$

**38.** Calcula el valor de *x* en las siguientes ecuaciones:

a) $18,3 = x^{2,8}$ b) $18,3 = 2,8^{2x}$

**39.** Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $\ln(5-x) - \ln(4-x) = \ln 2$

b) $\log x + \log 2 = 1$

c) $\ln(2x-3) + \ln(5-x) = \ln 5$

d) $\log x - \log 3 + \log 10 = 1$

e) $2\log x - \log 4 = \log 9$

f) $4\log x - \log 100 = 2$

g) $\log(x^2 + 2x - 39) - \log(3x-1) = 1$

h) $\ln(x^2+3x+2)-\ln(x^2-1)=\ln 2$

**40.** Halla la solución de las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $\log_2 x^2 - \log_2\left(x-\dfrac{3}{4}\right)=2$

b) $2\log x - \log(x-16)=2$

c) $3\ln x - \ln 32 = \dfrac{\ln x}{2}$

d) $2\,[1-\log(2x+3)] = 4\log\sqrt{5x-3}$

## APLICACIONES

**41.** La mitosis es un proceso de duplicación celular. Una de las bacterias de más rápido crecimiento es la *escherichia coli*, pues en determinadas condiciones puede duplicarse cada 20 minutos. La expresión $y = 2^{3t}$ da el número de células al cabo de *t* horas. ¿Cuántas células hay al cabo de 12 horas? ¿Y de 24?

**42.** El número de personas afectadas por una enfermedad contagiosa viene dado por la función

$$C(t)=\frac{1\,000}{1+99e^{-2.1t}}$$

donde *t* indica el tiempo en días.

a) ¿Cuántas personas estarán contagiadas pasados 1, 2 y 7 días?
b) Representa gráficamente la evolución de la enfermedad.

**43.** Admitamos que el número de partículas contaminantes por metro cúbico de aire viene dado por $N(t)=\dfrac{5\,000}{1+249e^{-01t}}$, donde el tiempo *t* viene dado en semanas.

En el supuesto de que no se aplique ninguna medida correctora:

a) ¿Cuántas partículas contaminantes hay por metro cúbico en el momento inicial? ¿Y a las dos, cinco y diez semanas?
b) Si el máximo admisible para personas con problemas respiratorios es de $2000$ partículas por metro cúbico, ¿al cabo de cuántas semanas se plantearán problemas de salud para esas personas?

**44.** El *radio* se descompone radiactivamente. La cantidad de él existente en una muestra después de *t* años viene dada por $C(t)=C_0e^{-0.00041\cdot t}$, siendo $C_0$ la cantidad inicial.

a) ¿Qué cantidad de radio queda de una muestra de 10 g al cabo de 1 500 años?
b) ¿Cuál es la vida media (en años) del radio?

**45.** Para un hueso se calculó que se había desintegrado el 20 % del carbono-14. Si el porcentaje de carbono-14 es restos fósiles viene dado por la fórmula $p(t)=100e^{-0.00012\cdot t}$, halla:

a) La edad aproximada de ese hueso.
b) ¿Cuántos años deben pasar para que en ese hueso quede solo el 5 % del carbono-14?

**46.** Una persona de 40 años, se ha hecho un plan de pensiones en las siguientes condiciones:
Edad prevista de jubilación: 65 años. Duración 25 años
Cuota periódica: 240 € (trimestrales). Tipo de interés: 6 %
¿Cuánto dinero tendrá ahorrado cuando se jubile?

**47.** Una familia está pensando en cambiar de vivienda. Para comprar la nueva casa necesitan un préstamo hipotecario de 42 000 €. El banco les ofrece dicha cantidad a un 7,5 % anual por un período de 12 años.
a) ¿Cuánto deberán amortizar mensualmente?
b) Si aceptan esas condiciones, ¿qué cantidad total pagarán durante esos 12 años?

**48.** Una empresa tiene 3 millones de euros para depositar en una cuenta bancaria, pudiendo mantener el depósito durante 5 años. Estudia las condiciones de diferentes bancos:
a) El banco A le ofrece un interés del 7,8 % abonando los intereses anualmente.
b) El banco B ofrece el 7,7 % con intereses liquidables (abonados) trimestralmente.
c) El banco C, el 7,65 % e intereses abonados mensualmente.
d) El banco D, el 7,6 % a interés continuo.
¿En qué banco le interesa más depositar su dinero?

**49.** ¿Durante cuánto tiempo se debe mantener 1 000 000 € en un banco, a una tasa del 6,1 %, anual, si se quiere duplicar el capital?
(a) A interés compuesto anual.
(b) Si los intereses se abonan mensualmente.

**50.** Supongamos que tu abuelo abrió, cuando tú naciste, una cuenta corriente a tu nombre, en la que ha ido metiendo 6 €, cada mes, a un interés del 6 % anual, liquidable mensualmente. Cuando cumplas 18 años deseas comprarte un ordenador que vale 1 200 €. ¿Tendrás suficiente dinero en tu cuenta?

**51.** Supongamos que no tienes ni cuenta corriente, ni dinero ahorrado, pero quieres comprarte el ordenador. Si el vendedor te permite amortizar los 1 200 €, a un interés del 18 %, mediante cuotas mensuales durante 2 años, ¿cuánto necesitarías ahorrar al mes para afrontar los pagos?

**52.** Algunos analistas opinan que la población mundial se ajusta, desde 1960, a la función $P(t)=\dfrac{36\ 000}{1+11e^{-0{,}02123\,t}}$, siendo t = 0 en 1960: $P(t)$ viene dado en millones de personas.
(a) ¿Cuántos habitantes había o habrá en los años 1960, 1970, 1980, 1990, 2000 y 2010?
(b) Indica cuándo se duplicará la población existente en el año 2000.

**53.** Un arqueólogo descubre en unos restos óseos que la razón $C^{14}$-$C^{12}$ es dos quintos de la que se encuentra en la atmósfera. ¿Qué edad tienen esos restos si el período de semidescomposición del carbono-14 es de 5 730 años?

**54.** En determinadas condiciones, una población de mosquitos crece ajustándose a la función

$$f(x)=2+0{,}5\ e^{0{,}4x}$$

donde $f(x)$ es el número de mosquitos en miles y $x$ el tiempo en días desde el momento presente. Se pide: ¿Cuánto tiempo, en días, tardará en duplicarse la población inicial?

**55.** Admitamos que el sueldo de los funcionarios experimenta una subida anual del 3,5%, desde 1990. Si un funcionario ganaba 900 euros, a comienzos de 1990. ¿Cuánto tardará en ganar el doble?

**56.** Una población de conejos aumenta anualmente en un 50 %. Si en el momento inicial había 100 conejos:

(a) ¿Cuántos habrá al cabo de 10 años?

(b) ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que su número sea de 30 000?

**57.** Debido a la presión ambiental, la población de conejos considerada en el problema anterior se ajustará más bien a la función

$$P(t)=\frac{20\ 000}{1+199e^{-0,42\ t}}$$

(a) ¿Cuántos conejos habrá al cabo de 10 años?

(b) ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que su número sea de 30 000?

**58.** En 1987, la población mundial era de unos 5 000 millones de habitantes. Si su crecimiento aproximado era de 80 millones por año, y suponiendo que la tasa de crecimiento permanece constante. ¿Cuánto tiempo tardaría en duplicarse?

**59.** Un isótopo radiactivo decae un 9,5 % anualmente. ¿Cuál es su vida media?