UNIDAD 2: POLINOMIOS Y FRACCIONES ALGEBRAICAS

1. POLINOMIOS

Polinomios en una indeterminada

La expresión algebraica $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ recibe el nombre de polinomio en la indeterminada x. Donde:

n es un número natural.

$a_n, \ldots, a_0$ son números reales, que se denominan coeficientes del polinomio.

a_0 es el coeficiente de grado cero o término independiente.

El exponente n de la mayor potencia de x que aparece en el polinomio se denomina grado del polinomio.

El conjunto de los polinomios con coeficientes reales se representa por:

$$\mathbb{R}[x] = \left\{ P(x) = a_n x^n + \ldots, a_1 x + a_0 \ / \ a_n, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R} \right\}$$

Cada uno de los términos de un polinomio se denomina monomio. Un polinomio formado por dos monomios es un binomio; si son tres los monomios, un trinomio, y si son más, de manera genérica se denomina polinomio.

Valor numérico de un polinomio

El valor numérico de un polinomio $P(x)$ para $x = a$, que representaremos por $P(a)$, es el número que resulta de sustituir la indeterminada x por el número a y efectuar las operaciones indicadas.

Igualdad de polinomios

Dos polinomios de la misma indeterminada son idénticos si tienen iguales los coeficientes del mismo grado:

$$\left.\begin{array}{l} P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \\ Q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0 \end{array}\right\} P(x) = Q(x) \Leftrightarrow a_n = b_n,\ a_{n-1} = b_{n-1}, \ldots, a_1 = b_1,\ a_0 = b_0$$

2. OPERACIONES CON POLINOMIOS

(1) Suma

$$\left.\begin{array}{l} P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \\ Q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0 \end{array}\right\} \Rightarrow P(x) + Q(x) = (a_n + b_n)x^n + \ldots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

Propiedades:

a) Conmutativa: $P(x) + Q(x) = Q(x) + P(x)$

b) Asociativa: $P(x) + \left[Q(x) + R(x)\right] = \left[P(x) + Q(x)\right] + R(x)$

c) Elemento neutro: $0(x)=0$ tal que $P(x)+0(x)=P(x)$

d) Elemento opuesto: $P(x)+\left[-P(x)\right]=0(x)$, donde $-P(x)$ se obtiene al considerar los opuestos de todos y cada uno de sus términos.

(2) Resta

$$P(x)-Q(x)=P(x)+\left[-Q(x)\right]$$

(3) Multiplicación

La multiplicación de dos polinomios es otro polinomio de grado igual a la suma de los grados de los factores. Se obtiene al multiplicar cada término de un factor por cada uno de los términos del otro.

Propiedades:

e) Conmutativa: $P(x)\cdot Q(x)=Q(x)\cdot P(x)$

f) Asociativa: $P(x)\cdot\left[Q(x)\cdot R(x)\right]=\left[P(x)\cdot Q(x)\right]\cdot R(x)$

g) Elemento neutro: $1(x)=1$ tal que $1(x)\cdot P(x)=P(x)$

h) Distributiva: $P(x)\cdot\left[Q(x)+R(x)\right]=P(x)\cdot Q(x)+P(x)\cdot R(x)$

(4) División de polinomios

Efectuar la división $D(x):d(x)$ es hallar dos polinomios $C(x)$ y $R(x)$ que verifiquen:

$$D(x)=d(x)\cdot C(x)+R(x)$$

donde los polinomios $C(x)$ y $R(x)$ deben verificar:

$$\deg C(x)=\deg D(x)-\deg d(x)$$

$$\deg R(x)<\deg d(x)$$

(deg significa grado, y proviene del inglés degree)

3. FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

Regla de Ruffini

Si el divisor es un polinomio de primer grado del tipo $x-a$, la división se puede realizar de una manera más sencilla aplicando un algoritmo conocido como regla de Ruffini, que consiste en:

- Se escriben los coeficientes del dividendo.
- Se coloca el término independiente del divisor cambiado de signo.
- El primer coeficiente se coloca igual que el del dividendo.
- Los siguientes se hallan multiplicando el anterior por a y sumando el producto con el coeficiente correspondiente del dividendo.
- El último número obtenido es el resto de la división.
- Los números obtenidos antes son los coeficientes del cociente.

Teorema del resto

El valor numérico de un polinomio $P(x)$ cuando $x=a$ coincide con el resto de la división de este polinomio por $x-a$.

Regla de Ruffini para polinomios de primer grado completos

Para poder aplicar la regla de Ruffini en la división $P(x):(ax+b)$, seguimos los siguientes pasos:

- Dividimos dividendo y divisor por a, obteniéndose $Q(x):\left(x+\dfrac{b}{a}\right)$, donde los coeficientes de $Q(x)$ son los de $P(x)$ divididos entre a.
- Se aplica la regla de Ruffini vista anteriormente.

Divisibilidad de polinomios

Si entre tres polinomios cualesquiera se verifica que $A(x)=B(x)\cdot C(x)$, diremos que:

- El polinomio $A(x)$ es múltiplo de $B(x)$ y $C(x)$. También se dice que $A(x)$ es divisible por cada uno de los polinomios $B(x)$ y $C(x)$.
- Los polinomios $B(x)$ y $C(x)$ son divisores del polinomio $A(x)$.

Criterio de divisibilidad de un polinomio por $x-a$: teorema del factor

Un polinomio $P(x)$ es divisible por $x-a$ si, y solo si, $P(a)=0$.

Raíces de un polinomio

Diremos que a es una raíz de $P(x)$ sii $P(a)=0$.

■ Cálculo de las raíces de un polinomio

Determinar las raíces de un polinomio equivale a resolver la ecuación $P(x)=0$.

■ Polinomios de primer y segundo grado

Se trata de resolver las ecuaciones de primer y segundo grado correspondientes.

■ Polinomios de grado ≥ 3

Las raíces enteras de un polinomio, si existen, son divisores de su término independiente.

Factorización de polinomios

La factorización de un polinomio se consigue cuando es posible encontrar otros polinomios, los factores, de manera que su producto sea el polinomio dado.

Si $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ es un polinomio y $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ son sus raíces, entonces, su descomposición es

$$P(x)=a_n(x-\alpha_n)(x-\alpha_{n-1})\ldots(x-\alpha_1)$$

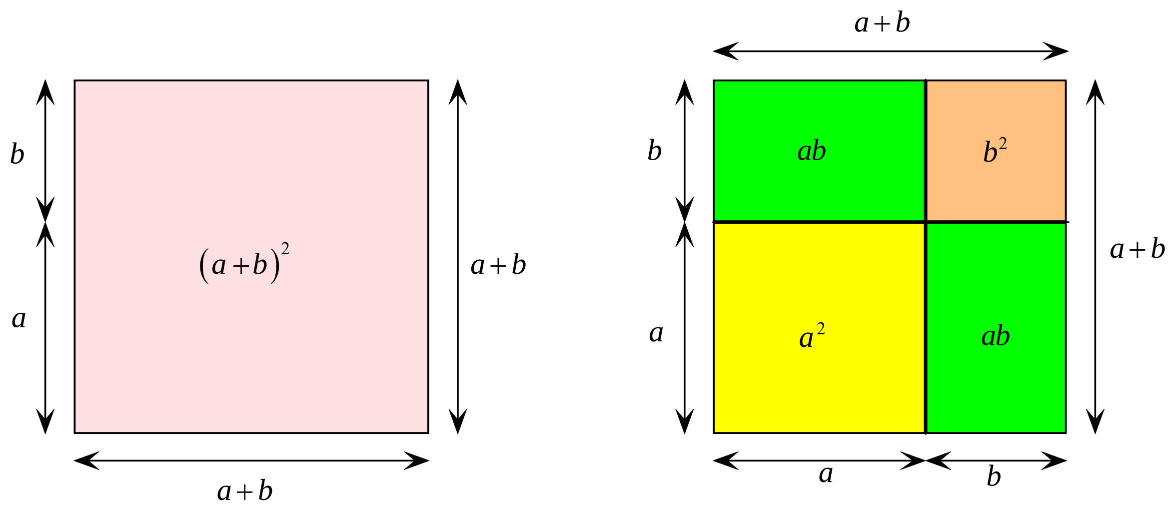
Pasos a seguir para factorizar polinomios

Para factorizar un polinomio seguiremos los siguientes pasos:

1º) Sacar factor común
2º) Usar las identidades notables
3º) Aplicar la regla de Ruffini

Repaso de las identidades notables

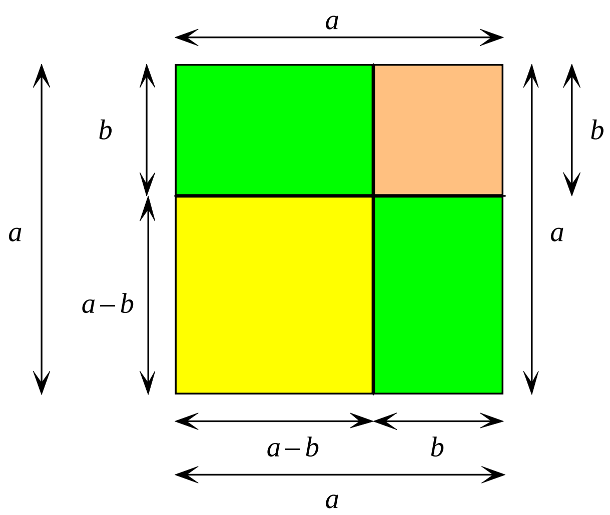
- Cuadrado de una suma: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$



$$\boxed{(a+b)^2} = \boxed{a^2} + \boxed{2ab} + \boxed{b^2}$$

El área del cuadrado rosa es $(a+b)^2$, que es igual al área del cuadrado amarillo, a^2, más dos veces el área del rectángulo verde, $2ab$, más el área del cuadrado naranja, b^2.

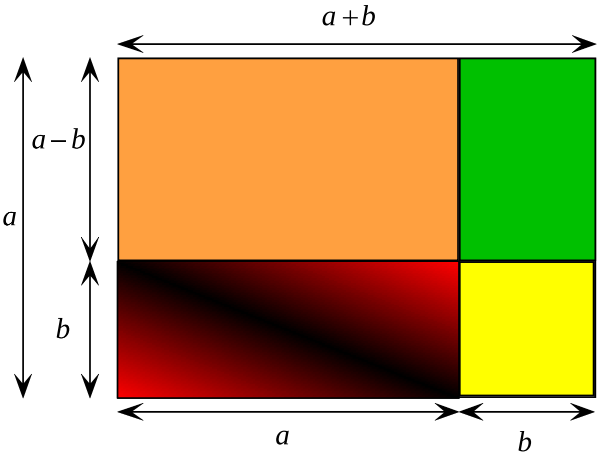
- Cuadrado de una diferencia: $(a+b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$



$$\boxed{(a-b)^2} = \boxed{a^2} - \boxed{2ab} + \boxed{b^2}$$

El área del cuadrado amarillo es $(a-b)^2$, que es igual al área del cuadrado total, a^2, menos dos veces el área del rectángulo verde + naranja, $2ab$, más el área del rectángulo naranja, b^2, ya que éste último lo hemos quitado dos veces.

- Suma por diferencia: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

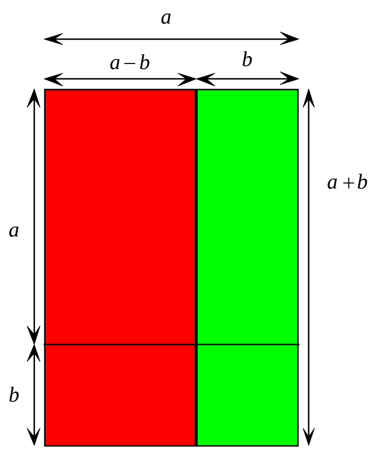


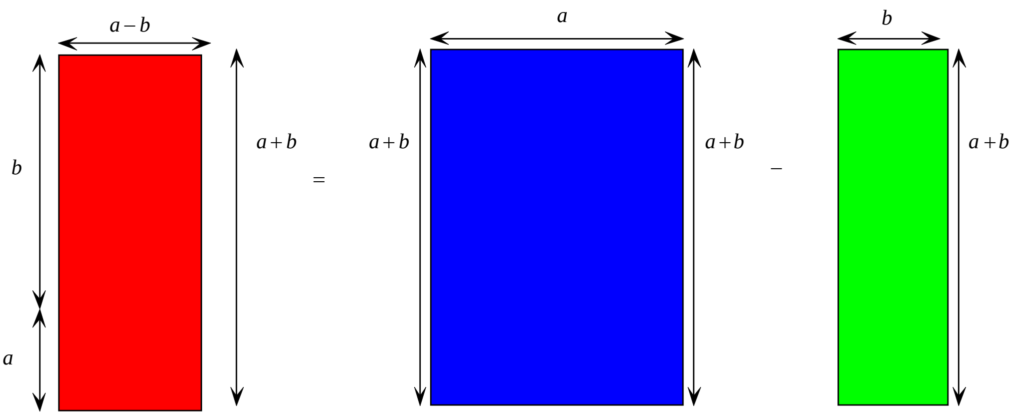
$$\boxed{(a+b)(a-b)} = \boxed{a^2} - \boxed{b^2}$$

El área del rectángulo (naranja + verde) es $(a+b)(a-b)$, que es igual al área del rectángulo total, $a(a+b)$, menos el área del rectángulo rojo oscuro, ab, menos el área del rectángulo amarillo, b^2 :

$$(a+b)(a-b) = a(a+b) - ab - b^2 = a^2 + \cancel{ab} - \cancel{ab} - b^2 = a^2 - b^2$$

De otra forma:





El área del rectángulo rojo es igual a la diferencia entre las áreas del rectángulo azul y del rectángulo verde, esto es:

$$(a+b)(a-b) = a(a+b) - b(a+b) = a^2 + ab - ba - b^2 = a^2 - b^2$$

4. FRACCIONES ALGEBRAICAS

Definición

Si $A(x)$ y $B(x)$ son polinomios y $B(x)\neq 0$, la expresión $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ recibe el nombre de fracción algebraica.

Fracciones algebraicas equivalentes

Las fracciones $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ y $\dfrac{C(x)}{D(x)}$ son equivalentes (y escribiremos $\dfrac{A(x)}{B(x)}=\dfrac{C(x)}{D(x)}$) cuando $A(x)D(x)=B(x)C(x)$.

El valor numérico de dos fracciones algebraicas equivalentes para un determinado valor de x es el mismo.

Propiedad fundamental

Si multiplicamos el numerador y el denominador de una fracción algebraica por un mismo polinomio (no nulo), el resultado es una fracción algebraica equivalente a la primera.

Operaciones con fracciones algebraicas

- Suma y resta

$$\frac{A(x)}{B(x)}\pm\frac{C(x)}{D(x)}=\frac{\left[M(x):B(x)\right]A(x)\pm\left[M(x):D(x)\right]C(x)}{M(x)}$$

donde $M(x)$ es el m.c.m. de los denominadores.

- Multiplicación

$$\frac{A(x)}{B(x)}\cdot\frac{C(x)}{D(x)}=\frac{A(x)C(x)}{B(x)D(x)}$$

- División

$$\frac{A(x)}{B(x)}:\frac{C(x)}{D(x)}=\frac{A(x)D(x)}{B(x)C(x)}$$

- Potencias

$$\left(\frac{A(x)}{B(x)}\right)^n=\frac{A(x)}{B(x)}\cdot\ldots\cdot\frac{A(x)}{B(x)}=\frac{A^n(x)}{B^n(x)} \text{ para } n\in\mathbb{N}$$

$$\left(\frac{A(x)}{B(x)}\right)^0=1 \quad \text{y} \quad \left(\frac{A(x)}{B(x)}\right)^1=\frac{A(x)}{B(x)}$$

$$\left(\frac{A(x)}{B(x)}\right)^{-n}=\frac{1}{\left(\dfrac{A(x)}{B(x)}\right)^n}$$

5. EJERCICIOS

POLINOMIOS

1. Desarrolla y simplifica:

a) $\left(x^2+3x\right)^2+x^5-3x^2$

b) $\left(x^2-2x+3\right)\left(x^2-1\right)-x^2\left(x-3\right)$

c) $x\left(2x^2+3\right)^2-2\left(x^2-3x\right)$

d) $\left(\frac{2}{3}x+2\right)^2-\left(3x^2+2x-1\right)$

e) $\left(x^2-1\right)\left(3x^2-2x\right)-2\left(x^2+1\right)$

2. Obtén el cociente y el resto de las siguientes divisiones:

a) $\left(5x^4-3x^2+2x\right):\left(x^2+2\right)$

b) $\left(6x^4-3x+2\right):\left(x^2-2x\right)$

c) $\left(4x^3-2x^2+2\right):\left(2x^2+1\right)$

d) $\left(4x^5-2x^2+x-2\right):\left(2x^2-1\right)$

e) $\left(2x^3-3x^2+2\right):\left(x^2+1\right)$

3. Efectúa las siguientes operaciones con polinomios:

a) $\left(x^2+x+1\right)\cdot\left(x+1\right)$

b) $\left(x^3-3x+1\right)\cdot\left(x^2+2x-1\right)$

c) $\left(3x^3-5x^2+2x-3\right)\cdot\left(x^2-2x-3\right)$

d) $\left(x^4-3x^3+x^2+1\right)\cdot\left(2x^3+x-2\right)$

e) $\left(x^2+x+1\right)^2$

f) $\left(x+1\right)^3$

g) $\left(6x^5+9x^4-7x^3+7x^2-8x+5\right):\left(3x^2-3x-1\right)$

h) $\left(3x^4+5x^3-2x+3\right):\left(x^2-3x+2\right)$

REGLA DE RUFFINI. TEOREMA DEL RESTO

4. Consideramos el polinomio $P\left(x\right)=7x^4-2x^3+3x^2+1$.

a) Halla el cociente y el resto de la división: $P\left(x\right):\left(x+2\right)$

b) ¿Cuánto vale $P\left(-2\right)$?

5. Aplica la regla de Ruffini para calcular el cociente y el resto de las siguientes divisiones:

a) $\left(x^3-3x^2+2x+4\right):\left(x+1\right)$

b) $\left(5x^5+14x^4-5x^3-4x^2+5x-2\right):\left(x+3\right)$

c) $\left(2x^3-15x-8\right):\left(x-3\right)$

d) $\left(x^4+x^2+1\right):\left(x+1\right)$

e) $\left(2x^4+x^3-5x-3\right):\left(x-2\right)$

f) $\left(x^5-32\right):\left(x-2\right)$

6. Halla el valor de k para que el polinomio $P(x)=kx^3-3kx^2+2x-1$ sea divisible entre $x-1$

7. Obtén el valor de *k* para que el polinomio $P(x)=3x^5+2x^3+kx^2-3x+4$ sea divisible entre $x+1$.

8. a) Calcula el valor numérico de $P(x)=14x^6-2x^4+3x^2-5x+7$ para $x=1$?

b) ¿Es divisible el polinomio anterior, $P(x)$, entre $x-1$?

9. Calcula el valor numérico de k para que la siguiente división sea exacta:

$$\left(kx^4-3x^2+4x-5\right):(x-2)$$

10. a) Demuestra que el polinomio x^2-7x+6 es divisible por $x-6$.

b) Demuestra que el polinomio anterior no es divisible por $x+2$.

11. Calcula el resto de las siguientes divisiones sin efectuarlas:

a) $\left(x^3+2x^7-7x+6\right):(x-2)$

b) $\left(x^4-16x-1\right):(x+1)$

12. Halla el valor de m para que el polinomio $5x^4+mx^3+2x-3$ sea divisible por $x+1$.

13. Calcula *a* y *b* para que el polinomio x^5+ax^3+b sea divisible por x^2-1.

14. Halla el valor de k para que al dividir el polinomio $2x^4+5x^3+kx^2+4$ por $x+4$ se obtenga de resto 12.

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

15. Descompón en factores los siguientes polinomios y di cuáles son sus raíces:

1) $x^4-4x^3+4x^2-4x+3$
2) $x^4+x^3-9x^2-9x$
3) $x^4+3x^3-10x^2$
4) $x^4+3x^3-x^2-3x$
5) $x^4+2x^3-4x^2-8x$
6) x^3-x^2-4
7) x^3+2x^2+2x+1
8) $x^3-3x^2-4x+12$
9) $6x^3+7x^2-9x+2$
10) $x^4-6x^3-11x^2+96x-80$
11) $2x^4-5x^3+5x-2$
12) $x^4+2x^3-3x^2-4x+4$

16. Halla la descomposición factorial de los siguientes polinomios:

$P(x)=x^3-x^2-x+1$

$Q(x) = x^6 - x^2$

$R(x) = 3x^3 - 8x + 8$

$S(x) = 6x^4 + 11x^3 - 22x^2 - x + 6$

$T(x) = x^6 + x^5 - 11x^4 - 9x^3 + 18x^2$

17. Halla las raíces enteras de los polinomios

$P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

$Q(x) = x^5 + x^4 - 16x - 16$

FRACCIONES ALGEBRAICAS

18. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{x^3 - x}{x^3 + 3x^2 + 2x}$

b) $\dfrac{x^3 - x^2 - 2x}{x^3 - 3x^2 + 2x}$

c) $\dfrac{x^5 + 6x^4 + 9x^3}{x^3 + 3x^2}$

d) $\dfrac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^3 - 2x^2 + x}$

e) $\dfrac{x^4 - 2x^3 - 3x^2}{x^4 - 9x^2}$

19. Opera y simplifica el resultado:

a) $\dfrac{1}{(x-1)^2} + \dfrac{2}{x-1} + \dfrac{1}{x^2-1}$

b) $\left(\dfrac{2x-1}{x+1} - \dfrac{3x}{x-1}\right) \cdot \left(\dfrac{x^3 - x}{-x^2 - 6x + 1}\right)$

c) $\dfrac{2x}{x-2} + \dfrac{3x-1}{x+2} - \dfrac{1}{x^2-4}$

d) $\dfrac{(x-1)^2}{2} \cdot \dfrac{1}{x^2-1} - \dfrac{3x}{(x+1)^2}$

e) $\left(\dfrac{3}{x} - \dfrac{2x}{x+1}\right) \cdot \dfrac{x^2+x}{x-1}$

f) $\left(\dfrac{2x}{x-1} - \dfrac{2x}{x+1}\right) \cdot \dfrac{x^2-1}{x-1}$

20. Efectúa las siguientes operaciones (simplificando el resultado cuando sea posible):

1) $\dfrac{7}{x} + \dfrac{x+3}{x^2}$

2) $\dfrac{4}{x-1} + \dfrac{3x}{x-1} - \dfrac{2-x}{x^2-1}$

3) $\dfrac{x+1}{x^2-2} \cdot \dfrac{x^2+2}{x+1}$

4) $\dfrac{3x^2-2}{2x+3} \cdot \dfrac{5x^2+x}{3x+2}$

5) $\dfrac{x^3 - 3x^2 + 9x - 1}{x+1} : \dfrac{x-1}{x+1}$

6) $\dfrac{2x+8}{x-2} : \dfrac{x+4}{2-x}$

7) $\dfrac{2-x}{x} + \dfrac{2x}{x-1} - \dfrac{x+1}{x}$

8) $\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{2}{x-2}$

9) $\left(1 + \dfrac{x}{x-1}\right) \cdot \left(1 - \dfrac{x}{x+1}\right)$

10) $\dfrac{2x-2}{x^2-1} \cdot \dfrac{x+1}{4}$

11) $\dfrac{x-1}{x^2-1} : \dfrac{x+1}{x^2+2x+1}$

12) $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-1} : \dfrac{x^4-1}{x^2+1}$

21. Efectúa las siguientes operaciones, simplificando el resultado:

1) $\dfrac{x}{1-\dfrac{1-x}{1+x}}$

3) $\dfrac{\dfrac{x^3-x}{x^3+1}\cdot\dfrac{x^2-x+1}{x^2-x}}{\dfrac{x^2+2x+4}{x^3-8}}$

2) $\dfrac{\dfrac{x-1}{x+1}-\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}{\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}$

4) $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}}$

22. Opera y simplifica:

a) $\dfrac{\dfrac{1+x}{1-x}-\dfrac{1-x}{1+x}}{\left(\dfrac{1+x}{1-x}-1\right)\left(1-\dfrac{1}{1+x}\right)}$

b) $\dfrac{\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x^3+1}{x^3-1}}{\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}$

23. Opera y simplifica:

1) $5-3\cdot\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{x-2}{x^2-1}$

4) $\dfrac{\dfrac{x}{1-x}+\dfrac{1+x}{x}}{\dfrac{x}{1-x}-\dfrac{1+x}{x}}$

2) $2+\dfrac{2}{2+\dfrac{2}{x}}$

5) $\dfrac{1+x}{1+x+\dfrac{1}{1-x+\dfrac{x^2}{1+x}}}$

3) $x^2-\dfrac{x^2}{1-\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}$

6) $\dfrac{x-1}{(x-2)(x-3)}+\dfrac{x-2}{(x-1)(x-3)}+\dfrac{x-3}{(x-1)(x-2)}$

CUESTIONES TEÓRICAS

24. Un polinomio $A(x)$ es de grado 4 y otro $B(x)$ es de grado 3.

a) ¿Cuál será el grado del polinomio $A(x)B(x)$?

b) ¿Y el de $A(x):B(x)$?

c) ¿Cuál puede ser el grado del resto de la división del apartado b)?

25. Si la división $P(x):(x-2)$ es exacta, ¿qué puedes afirmar del valor de $P(2)$?

26. Si $P(-5)=3$, ¿cuál será el resto de la división $P(x):(x+5)$?

27. Escribe tres polinomios de tercer grado, $P(x)$, $Q(x)$ y $R(x)$, tales que:

a) $P(x)$ tenga por raíces 2, 3 y – 1.

b) $Q(x)$ tenga por raíces 2 y 3.

c) $R(x)$ solo tenga como raíz – 1.

28. Escribe un polinomio de segundo grado $P(x)$ tal que $P(3)=0$ y $P(5)=6$.

29. Sabemos que el polinomio $P(x)$ solo es divisible por $(x-2)$ y $(x+3)$. ¿Puede ser el grado de $P(x)$ mayor que 2? Pon ejemplos.

30. Si en el numerador y denominador de una fracción algebraica eliminamos sumandos iguales, ¿se obtiene una fracción equivalente a la primera?

31. Escribe un polinomio de grado 4 que no tenga raíces reales.