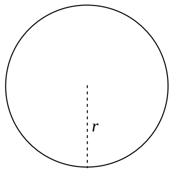
UNIDAD 1: NÚMEROS REALES

1. ALGUNOS IRRACIONALES

El número pi: π



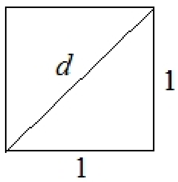
La longitud de la circunferencia de radio r es:

$$L_{circunferencia} = 2\cdot\pi\cdot r = \pi\cdot d \Rightarrow \pi = \frac{L}{d}$$

J. H. Lambert dio en 1761 la primera prueba de la irracionalidad de pi, siguiendo el camino trazado por Roger Cotes en 1714 y L. Euler en 1737:

$$\pi \in \mathbb{I}$$

El número raíz de dos: $\sqrt{2}$



¿Cuál es la longitud de la diagonal del cuadrado?

$$d^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow d = \sqrt{2}$$

Demostración de la irracionalidad de $\sqrt{2}$:

Supongamos que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ con a y b primos entre sí (es decir, la fracción es irreducible). Entonces:

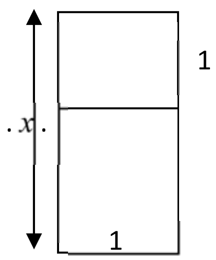
$$2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} \text{ es reducible !!}$$ [1]

ya que si $\frac{a}{b}$ es irreducible, entonces $\frac{a^2}{b^2}$ tiene que ser también irreducible.

El descubrimiento de que la raíz cuadrada de 2 es un número irracional se atribuye generalmente al pitagórico **Hipaso de Metaponto**[2], quien fue además el primero en dar una demostración geométrica de dicha irracionalidad:

$$\sqrt{2} \in \mathbb{I}$$

El número de oro: Φ



¿Cuál es la longitud de x para que los rectángulos sean semejantes?

Para que los rectángulos sean semejantes se tiene que verificar:

$$\frac{1}{x} = \frac{x-1}{1} \Rightarrow x^2 - x = 1$$

[1] Los signos !! indican que hay una contradicción.

[2] Cuenta la leyenda que Hipaso fue “asesinado” por los pitagóricos por desvelar la inconmensurabilidad de algunas medidas. Este “asesinato” tiene dos vertientes: una, en la que realmente lo asesinaron tirándolo al mar, y otra, en la que lo dejaron fuera de la comunidad pitagórica, y por tanto, para ellos, estaba muerto. ¿Cuál es la cierta? La verdad es que no se sabe, ya que esto ocurrió en el S. V a.C. y los datos al respecto no son muy esclarecedores.

de donde $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}:=\Phi$ (es la solución positiva de la ecuación anterior)

El primero en hacer un estudio formal sobre el número áureo fue **Euclides** (c. 300-265 a.C.), quién lo definió de la siguiente manera:

> *«Se dice que una línea recta está dividida entre el extremo y su proporcional cuando la línea entera es al segmento mayor como el mayor es al menor.»*

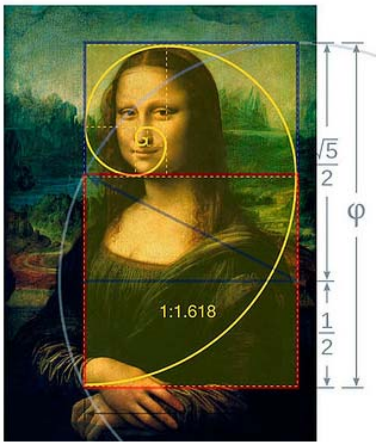
Además, también demostró que este número no puede ser descrito como la razón de dos números enteros, es decir, es irracional:

$$\Phi\in\mathbb{I}$$

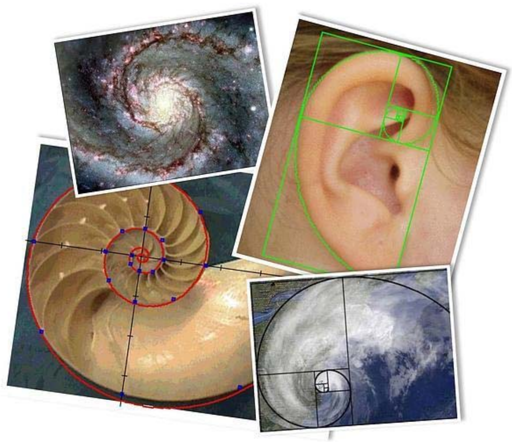
En efecto, $\Phi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow 2\Phi=1+\sqrt{5}\Rightarrow\sqrt{5}=2\Phi-1$.

Si suponemos que $\Phi\in\mathbb{Q}$, entonces $2\Phi-1\in\mathbb{Q}$, lo que contradice que $\sqrt{5}$ sea irracional.

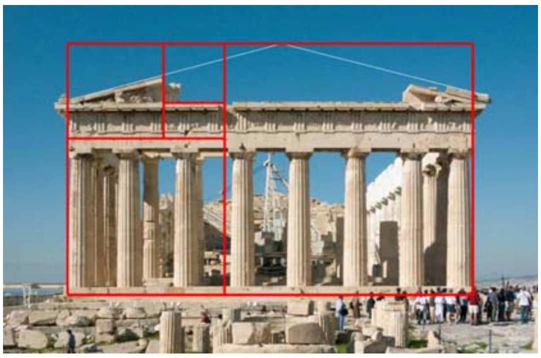
El número de oro en la naturaleza y el arte:



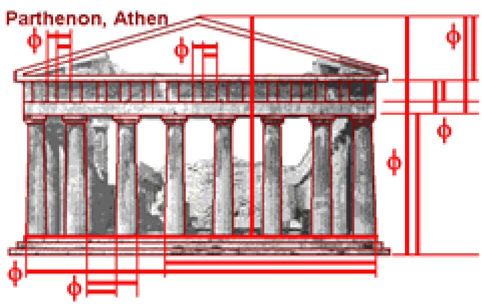
Fuente: https://sosordinateurs.com/design-graphique/que-es-la-proporcion-aurea-y-como-se-aplica-en-diseno/



Fuente: https://www.abc.es/ciencia/20141216/abci-tambien-espacio-tiempo-esta-201412161107.html



Fuente: https://academiaplay.es/el-numero-de-oro-en-el-arte/



Fuente: http://reeducaweb.blogspot.com/2017/01/el-numero-aureo.html

<u>**El número**</u> $\log_{10}2$

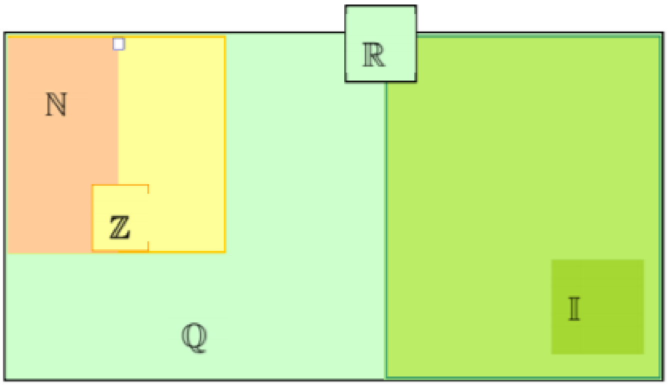
Vamos a demostrar que $\log_{10}2\in\mathbb{I}$:

Supongamos que $\log_{10}2=\dfrac{m}{n}$ con $(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$. Entonces, por la definición de logaritmo

$$10^{\frac{m}{n}}=2 \Rightarrow 10^m=2^n \Rightarrow 5^m 2^m=2^n \Rightarrow 5^m 2^{m-n}=1$$

y, teniendo en cuenta que 5 y 2 son primos relativos, $m=0$ y $n=0$, en contra de la hipótesis de que $n \neq 0$.

2. NÚMEROS REALES



En el lenguaje de los conjuntos:

$$\begin{cases} \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \\ \mathbb{I} \subset \mathbb{R} \end{cases}$$

y también $\mathbb{R}=\mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

(El símbolo $\cup$ indica "unión").

En el siguiente esquema observamos los distintos tipos de números reales:

$$\left\{ \text{REALES} \begin{cases} \text{RACIONALES} \begin{cases} \text{ENTEROS} \begin{cases} \text{NATURALES} \\ \text{CERO} \\ \text{NEGATIVOS} \end{cases} \\ \text{FRACCIONARIOS} \begin{cases} \text{DECIMALES EXACTOS} \\ \text{PERIÓDICOS} \begin{cases} \text{PUROS} \\ \text{MIXTOS} \end{cases} \end{cases} \end{cases} \\ \text{IRRACIONALES (Decimales que no son ni exactos, ni periódicos)} \end{cases} \right.$$

Recuerda que hay números que no son reales[3]: $\sqrt{-1}, \sqrt{-2}, \sqrt[4]{-3}, \ldots$

3. PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES CON REALES

Se recogen aquí todas las propiedades que verifican la suma y el producto de números reales y como consecuencia de ellas se definen la resta y la división.

SUMA:

(1) Asociativa: $a+(b+c)=(a+b)+c$

(2) Conmutativa: $a+b=b+a$

(3) Existencia de elemento neutro (el cero): $a+0=a$

[3] Hay más clases de números: los complejos, los cuaternios (o cuaterniones) de Hamilton (que se usan, por ejemplo, en gráficos por ordenador para interpolar rotaciones) o los octoniones de Cayley-Graves.

(4) Existencia de elemento opuesto (designado por $-a$): $a+(-a)=0$

Consecuencias que se obtienen:

(i) Resta: $a-b=a+(-b)$

(ii) $-(a+b)=-a-b$

PRODUCTO

(1) Asociativa: $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$

(2) Conmutativa: $a\cdot b=b\cdot a$

(3) Existencia de elemento neutro (el uno): $a\cdot 1=a$

(4) Existencia de elemento inverso (representado por $\frac{1}{a}$ o a^{-1}): $a\cdot\frac{1}{a}=1$ siempre que $a\neq 0$.

(5) Distributiva: $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

Consecuencias:

(i) División: $a:b=a\cdot\frac{1}{b}$

(ii) $-(a\cdot b)=(-a)\cdot b=a\cdot(-b)$

4. LA RECTA REAL

Se le puede asignar una abscisa a cada número real, y recíprocamente, es decir, a todo punto de la recta graduada le corresponde un número real. De este modo, la recta real está completa, no se le pueden añadir más puntos ni más números, por ello se habla de la recta real y de su ***propiedad de completitud***.

5. EL ORDEN DE LOS NÚMEROS REALES

Algebraicamente el orden se expresa mediante el símbolo $<$:

$$a<b\Leftrightarrow b-a>0$$

$$b>a\Leftrightarrow a<b$$

Propiedades del orden:

(1) $a<b$ y $b<c\Rightarrow a<c$

(2) $a<b\Rightarrow a+c<b+c$

(3) $a<b\Rightarrow\begin{cases}a\cdot c<b\cdot c & \text{si } c>0\\ a\cdot c>b\cdot c & \text{si } c<0\end{cases}$

Intervalos y semirrectas:

Un intervalo es un conjunto de números reales que puede ser representado gráficamente por un segmento o por una semirrecta en la recta real.

- Intervalo abierto de extremos a y b:
  $(a,b)=\{x\in\mathbb{R}: a<x<b\}$
- Intervalo cerrado de extremos a y b:
  $[a,b]=\{x\in\mathbb{R}: a\le x\le b\}$
- Intervalos semiabiertos
  $(a,b]=\{x\in\mathbb{R}: a<x\le b\}$
  $[a,b)=\{x\in\mathbb{R}: a\le x<b\}$
- Semirrectas
  $(-\infty,a)=\{x\in\mathbb{R}: x<a\}$ $(-\infty,a]=\{x\in\mathbb{R}: x\le a\}$
  $(b,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}: x>b\}$ $[b,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}: x\ge b\}$
- Recta real
  $(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}=\{x\in\mathbb{R}: -\infty<x<+\infty\}$

6. VALOR ABSOLUTO

Definición: $|a|=\begin{cases} a & \text{si } a\ge 0 \\ -a & \text{si } a<0 \end{cases}$

Propiedades del valor absoluto:

(1) $|a|=|-a|$

(2) $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$

(3) $|a+b|\le|a|+|b|$ (desigualdad triangular)

(4) $|a|<k\Rightarrow -k<a<k$

Distancia entre dos números reales: $d(a,b)=|b-a|$

Como consecuencia de la definición, se tienen las siguientes propiedades de la distancia:

1) $d(a,b)\ge 0 \quad \forall a,b\in\mathbb{R}$
2) $d(a,a)=0 \quad \forall a\in\mathbb{R}$
3) $d(a,b)=d(b,a) \quad \forall a,b\in\mathbb{R}$ (propiedad simétrica)
4) $d(a,c)\le d(a,b)+d(b,c) \quad \forall a,b,c\in\mathbb{R}$ (desigualdad triangular)

7. RADICALES

Definición: Para cada $x\in[0,+\infty)$, la *raíz cuadrada* de x, $\sqrt{x}$, se define como el único número real $y\ge 0$ tal que $y^2=x$.

Sea $k\in\mathbb{N},\ k\ge 2$. Se define la *raíz* $k-$*ésima* de $x\in[0,+\infty)$, como el único número real $y\ge 0$ tal que $y^k=x$. Dicho número se llama raíz $k-$ésima de x y se representa por $\sqrt[k]{x}$.

Si k es impar y $x<0$, se define

$$\sqrt[k]{x}=-\sqrt[k]{|x|}$$

Ejemplos:

(1) $\sqrt{4}=2$

$\sqrt{4}\neq\pm 2$, ya que hemos dicho que la raíz cuadrada de un número positivo es única y positiva.

(2) $\sqrt[3]{-27}=-\sqrt[3]{|-27|}=-\sqrt[3]{27}=-3$

Los *elementos* de un radical son:

$$\text{Coeficiente}\rightarrow k\cdot\overset{\substack{\text{Índice}\\ \downarrow}}{\sqrt[n]{a}}\leftarrow\text{Radicando}$$

Propiedad: $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$

Definición: Se dice que dos radicales son equivalentes cuando, al expresarlos en forma de potencia con exponente fraccionario, sus bases son iguales y las fracciones de sus exponentes son equivalentes:

$$\sqrt[n]{a^m}\text{ y }\sqrt[p]{a^q}\text{ son equivalentes }(\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[p]{a^q})\Leftrightarrow\frac{m}{n}=\frac{q}{p}$$

Simplificar un radical es calcular su radical equivalente de índice menor.

Otras propiedades de las raíces:

(1) $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n\cdot r]{a^{m\cdot r}}$ con $r\neq 0$

(2) $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n:r]{a^{m:r}}$ con $r\neq 0$

(3) $\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$

(4) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

(5) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$

(6) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[n\cdot m]{a}$

(7) $\sqrt{a^2}=|a|\quad\forall a\in\mathbb{R}$

Sobre la propiedad (7):

¿$\sqrt{a^2}=a$ simplificando la raíz con el cuadrado?

Esto es falso, ya que

$\sqrt{(-1)^2}=-1$ (según la igualdad anterior)

pero también $\sqrt{(-1)^2}=\sqrt{1}=1$, de donde se deduce que $-1=1$.

Reducción de radicales a índice común:
Para reducir radicales a índice común se toma como índice común el m.c.m. de los índices y se eleva cada radicando al cociente de dicho m.c.m. por el índice respectivo.

Definición: Dos radicales son semejantes cuando tiene el mismo índice y el mismo radicando, esto es, cuando solo difieren en el coeficiente.

Operaciones con raíces:

- Suma y resta (los radicales tienen que ser semejantes):
  Se saca factor común el radical y se suman o se restan los coeficientes.
- Multiplicaciones y divisiones:
  Se pueden multiplicar y dividir raíces que tengan el mismo índice, multiplicando o dividiendo los correspondientes radicandos.

Racionalización de denominadores:
Es el proceso que se sigue para eliminar las raíces de las expresiones fraccionarias.

Estudiaremos dos casos:

1) En el denominador solo hay un radical. En este caso, multiplicaremos numerador y denominador por un radical conveniente, de forma que al efectuar la multiplicación del denominador nos quede un número entero. (Recuerda que para poder multiplicar los radicales, éstos tienen que tener el mismo índice, y para que se pueda simplificar el radicando resultante, su exponente tiene que ser igual al índice)
2) En el denominador hay una suma o una resta, y uno (o los dos) sumandos es un radical. En este caso, se multiplica numerador y denominador por la expresión conjugada (se obtiene cambiado el signo que hay entre los sumandos) del denominador. (Recuerda que en el denominador siempre queda suma por diferencia, y aplicamos la correspondiente fórmula)

8. LOGARITMOS

Con la reducción del trabajo de varios meses de cálculo a unos pocos días, el invento de los logaritmos parece haber duplicado la vida de los astrónomos.
Pierre Simon Laplace

El logaritmo en base a $(>0 \text{ y } \neq 1)$ de un número N es el exponente al que hay que elevar la base para que dé dicho número:

$$\log_a N = x \Leftrightarrow a^x = N$$

Los logaritmos de base 10 se llaman decimales[4] y se representaban por log, y los logaritmos de base e se llaman naturales o neperianos y se representaban por $\ln$ o L.

Propiedades:

1) $\log_a a = 1$ y $\log_a 1 = 0$

[4] Actualmente esta notación está en desuso y se utiliza la notación $\log$ para representar el logaritmo neperiano.

2) $\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$

3) $\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$ siempre que $N \neq 0$

4) $\log_a N^m = m \cdot \log_a N \qquad \forall m \in \mathbb{R}$

Transformación de logaritmos:

5) $\log_a N = \frac{\ln N}{\ln a}$ (en la parte de la derecha se puede usar el logaritmo en la base que nos convenga)

Otras propiedades:

6) Los logaritmos de un número en dos bases inversas a y $\frac{1}{a}$ son opuestos.

7) Conocidos los logaritmos en una base mayor que 1 se pueden hallar fácilmente en cualquier otra base.

9. APROXIMACIÓN Y ESTIMACIÓN DEL ERROR COMETIDO AL TRABAJAR CON REALES

9.1. Aproximación

Redondeo:

Consiste en prescindir de las cifras que siguen a una determinada, sumando una unidad a esta última si la primera eliminada es 5 o superior a 5.

9.2. Errores

- Error absoluto (E_a):

$$\text{Error absoluto} = |\text{valor exacto} - \text{valor aproximado}| =$$
$$= |V_{exacto} - V_{aprox.}| = E_r$$

Este error tiene la unidad de la magnitud medida, nos indica la *cota de error o incertidumbre* de nuestra medición (aproximación) y por convenio se suele expresar con una sola cifra significativa que debe ser del mismo rango que la última de la medida (aproximación).

- Error relativo (E_r) :

A veces no importa tanto la incertidumbre de una medida como su precisión. Por eso se introduce el

$$\text{Error relativo} = \left|\frac{\text{Error absoluto}}{\text{Valor exacto}}\right| = \left|\frac{E_a}{V_{exacto}}\right| = E_r$$

No tiene unidad y suele expresarse en tanto por ciento. De alguna forma nos indica la *precisión* de la medida (aproximación), ya que cuanto menor sea el error relativo más precisa será la medida (aproximación). Así, el error relativo resulta especialmente relevante porque nos relaciona el error cometido con el valor de lo medido. Un error de 1 mm resulta magnífico si se mide la longitud de una carretera de 100 km (representa una desviación de una parte por cada 100 millones), adecuado si se mide una mesa de 2 m e inaceptable si se mide una hormiga de 2 mm. En los tres casos el error absoluto es el mismo, pero su cercanía, relativa al valor exacto son distintas.

- Acotación de errores

  Al redondear un número hasta un orden n cometemos un error absoluto que cumple:

$$E_a < \frac{1}{2\cdot 10^n}$$

y que se denomina cota de error absoluto (ε).

Si consideramos una cota de error absoluto, ε, siendo $E_a < \varepsilon$, se cumple:

$$E_r < \frac{\varepsilon}{V_{aprox.} - \varepsilon}$$

y se denomina cota de error relativo.

9.3. Operaciones con redondeos

Regla 1: El resultado de una suma o resta de números redondeados (no exactos) ha de ser redondeado a la cifra que corresponda al mayor error absoluto de los datos.

Regla 2: Si se multiplican o dividen números redondeados, el producto o cociente se redondeará al menor número de cifras significativas que posean los factores.

10. NOTACIÓN CIENTÍFICA

Un número se dice que está escrito en notación científica cuando está dado en la forma

$$a\cdot 10^b$$

donde a es un número decimal, con una única cifra en la parte entera (distinta de cero), y b es un número entero.

Las reglas para operar con números escritos en notación científica se suponen conocidas, y como para operar se va a utilizar la calculadora científica y/o gráfica, no merece la pena detenerse más en este punto.

11. EJERCICIOS

1. Ordena, de menor a mayor los siguientes números reales, sin utilizar la calculadora:

$$-3,\quad \sqrt{6},\quad -3\sqrt{2},\quad \pi,\quad -\Phi,\quad \sqrt{45},\quad 3,\overset{\frown}{19},\quad -0,0\overset{\frown}{2}$$

2. Clasifica los siguientes números en naturales, enteros, racionales, irracionales y/o reales.

$$0,\ \ 3,027,\ \ \frac{-2}{35},\ \ \sqrt[3]{0,000\ 000\ 1},\ \ 54,23,\ \ \frac{13}{32},\ \ -\sqrt[4]{256},\ \ \pi^3,\ \ \left(\sqrt{2}+1\right)^2$$

3. Si $a,b>0$ y $a<b$, ¿qué relación de desigualdad existe entre $\frac{1}{a}$ y $\frac{1}{b}$?

4. Si $a<0$ y $b>0$, ¿qué relación de desigualdad existe entre $\frac{1}{a}$ y $\frac{1}{b}$?

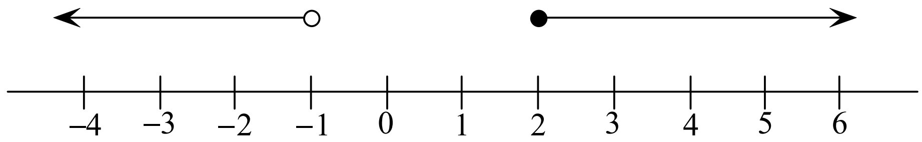
5. Representa los siguientes intervalos, semirrectas y rectas, y exprésalos mediante desigualdades:

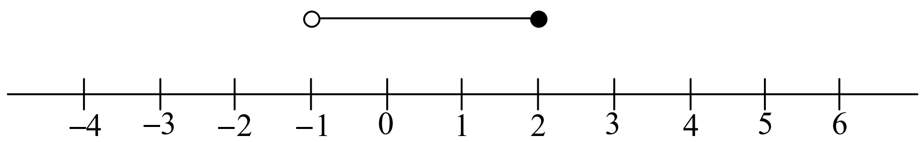
a) $(-3,2)$ b) $[3,5)$ c) $[-4,-1]$ d) $(-4,0]$ e) $(-\infty,4)$

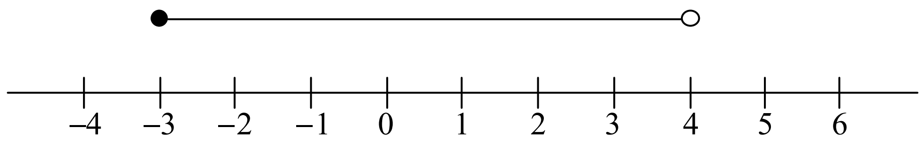
f) $[4,+\infty)$ g) $(-\infty,+\infty)$ h) $\mathbb{R}$ i) $[0,7]$

6. Indica qué intervalos o conjuntos numéricos están representados, y representa los que faltan:

$(-3,4],(-\infty,-1)\cup[2,+\infty),\{x/-3<x\le 4\},\mathbb{R}-[-1,2),[-3,4),(-1,2],\{x/-1<x\le 2\}$







7. Escribe mediante intervalos, los valores que puede tener x para que se pueda calcular la raíz cuadrada en cada caso:

a) $\sqrt{x-4}$ c) $\sqrt{2x+1}$ e) $\sqrt{-x}$

b) $\sqrt{3-2x}$ d) $\sqrt{-x-1}$ f) $\sqrt{1+\frac{x}{2}}$

8. Halla: $|-11|,\ \ |\pi|,\ \ |-\Phi|,\ \ \left|-\sqrt{5}\right|,\ \ \left|\sqrt[3]{-27}\right|,\ \ |0|,\ \ |3-\pi|$

(Indicación: No te dejes llevar por la rutina).

9. Averigua para qué valores de *x* se cumplen las siguientes relaciones:
a) $|x|=5$ b) $|x|\leq 5$ c) $|x-4|=2$ d) $|x-4|\leq 2$ e) $|x-4|>2$

10. Expresa mediante desigualdades y conjuntos las siguientes expresiones:
a) $|x|<7$ b) $|2x|<8$ c) $|x-1|\leq 6$ d) $|x+2|>9$
e) $|x-5|\geq 1$ f) $|x-2|=5$ g) $|x-4|\leq 7$ h) $|x+3|\geq 6$

11. Dados los radicales: $\sqrt{36},\ \sqrt{-36},\ -\sqrt{\frac{4}{9}},\ \sqrt{-81},\ \sqrt[3]{8},\ \sqrt[3]{27},\ \sqrt[3]{-8},\ \sqrt{5}$. ¿Cuáles tienen solución en $\mathbb{Q}$? ¿Cuáles no tienen solución en $\mathbb{R}$?

12. Calcula:
a) $\sqrt{100}$ b) $\sqrt[4]{10\,000}$ c) $\sqrt[3]{1\,000\,000}$ d) $\sqrt[6]{1\,000\,000}$
e) $\sqrt{2^2}$ f) $\sqrt[3]{27}$ g) $\sqrt[4]{2^4}$ h) $\sqrt[4]{81}$

13. Escribe en forma de potencia:
a) $\sqrt[3]{5^2}$ b) $\sqrt{5^3}$ c) $\sqrt{a^3}$ d) $\sqrt[4]{a}$ e) $\sqrt[3]{a^{-2}}$

14. Escribe en forma de raíz:
a) $8^{-\frac{1}{3}}$ b) $9^{-\frac{1}{2}}$ c) $32^{-\frac{2}{5}}$ d) $256^{\frac{3}{4}}$ e) $4^{\frac{3}{2}}+16^{-\frac{1}{2}}$

15. Indica las igualdades que son verdaderas y las que son falsas. En éstas, indica dónde está el error:
a) $\sqrt[3]{-2}=\sqrt[6]{(-2)^2}=\sqrt[6]{4}$ b) $\sqrt[3]{-2}=-\sqrt[6]{2^2}=-\sqrt[6]{4}$ c) $\sqrt{2}=\sqrt[6]{2^3}=\sqrt[6]{8}$
d) $\sqrt{3}=\sqrt[4]{3^2}=\sqrt[4]{9}$ e) $\sqrt[3]{-8}=\sqrt[6]{(-8)^2}=\sqrt[6]{64}$ f) $\sqrt{-4}=\sqrt[4]{(-4)^2}=\sqrt[4]{16}$

16. Escribe dos radicales equivalentes a cada uno de los siguientes:
a) $\sqrt[3]{5^2}$ b) $\sqrt{5}$ c) $\sqrt[3]{-5}$ d) $\sqrt[7]{-2}$ e) $\sqrt[4]{11}$

17. Simplifica los siguientes radicales:
a) $\sqrt[34]{a^{17}}$ b) $\sqrt[39]{a^{13}}$ c) $\sqrt[42]{a^{14}}$ d) $\sqrt[108]{a^{54}}$ e) $\sqrt[360]{a^{240}}$

18. Simplifica los siguientes radicales y reduce a índice común: $\sqrt[120]{a^{80}},\ \sqrt[27]{a^9},\ \sqrt[4]{a^{36}}$

19. Señala verdadero o falso, justificando la respuesta:

$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b}$	
$\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}=a$	
$\sqrt{a^2+b^2}=a+b$	
$\sqrt{a^2\cdot b^2}=a\cdot b$	

$\sqrt{\frac{a^2}{b^2}}=\frac{a}{b}$	

20. Calcula:

a) $\frac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{256}}$ b) $\frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{16}}$ c) $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt[3]{-125}}$ d) $\sqrt[3]{8a^3}$ e) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}\cdot\sqrt[3]{81}$

21. Calcula y simplifica:

a) $\sqrt[4]{32}:\sqrt[6]{2}$ b) $\left(\sqrt[4]{2^3}\right)^2$ c) $\sqrt[4]{2^3}\cdot\sqrt[4]{2}$

d) $\sqrt[3]{2a}\cdot\sqrt[3]{4a^2}$ e) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}$

22. Calcula:

a) $\sqrt{2^6\cdot a^4\cdot b^6}$ b) $\sqrt{2^4\cdot 3^4\cdot 5^2}$ c) $\sqrt{2^8\cdot 3^2\cdot 5^2}$

23. Utiliza la descomposición factorial y extrae factores:

a) $\sqrt[3]{216}$ b) $\sqrt[3]{3375}$ c) $\sqrt[4]{1296}$ d) $\sqrt[5]{7776}$

24. Efectúa:

a) $3\sqrt{5}-2\sqrt{5}+4\sqrt{5}-7\sqrt{5}$ b) $6\sqrt{2}-2\sqrt{2}+3\sqrt{2}-4\sqrt{2}$

c) $\sqrt{2}+\sqrt{8}+\sqrt{18}-\sqrt{32}$ d) $\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{16}$

25. Expresa como potencia de exponente fraccionario:

a) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$ b) $\sqrt{x\cdot\sqrt[3]{x\cdot\sqrt[4]{x}}}$ c) $\sqrt[3]{x\sqrt{x\cdot\sqrt[3]{x}}}$

26. Extrae factores de los radicales y realiza las siguientes operaciones:

a) $\sqrt[6]{8}+\sqrt[4]{4}-7\sqrt{72}$

b) $\sqrt{75}-\frac{1}{3}\sqrt{18}+\frac{3\sqrt{12}}{4}-\sqrt{\frac{2}{25}}$

c) $\frac{1}{3}\sqrt{108}-5\sqrt{75}+\sqrt{243}-\sqrt{\frac{27}{121}}$

d) $\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{7\sqrt{108}}{4}+\sqrt{648}-\frac{2}{3}\sqrt{1875}$

e) $3-\sqrt{288}+\sqrt{363}-\frac{1}{3}\sqrt{800}+\frac{17}{2}\sqrt{\frac{27}{289}}$

27. Simplifica las siguientes expresiones:

a) $5\sqrt{4x}-3\sqrt{36x}+3\sqrt{25x}-4\sqrt{9x}+6\sqrt{x}$

b) $3\sqrt{8x^3}-4\sqrt{72x^3}+2\sqrt{32x^3}+4\sqrt{128x^3}-\sqrt{288x^3}$

c) $6\cdot\sqrt[3]{x^7}+x^2\cdot\sqrt[3]{x}-5x\cdot\sqrt[3]{x^4}-3x^2\cdot\sqrt[3]{27x}$

28. Efectúa las siguientes operaciones, simplificando todo lo posible los resultados:

a) $\left(\sqrt{3}+2\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)$

b) $\left(2+\sqrt{2}\right)\cdot\left(3-\sqrt{2}\right)\cdot\left(4-\sqrt{2}\right)$

c) $\left(1+\sqrt{2}\right)\cdot\left(1-\sqrt{2}\right)\cdot\left(2+\sqrt{2}\right)\cdot\left(2-\sqrt{2}\right)$

d) $\left(\sqrt{72}-\sqrt{20}-\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{5}+2\sqrt{8}-7\sqrt{2}\right)$

29. Racionaliza y simplifica:

a) $\dfrac{3}{\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{2}}$ c) $\dfrac{6}{\sqrt[15]{a^7}}$

30. Racionaliza y simplifica las siguientes expresiones fraccionarias:

a) $\dfrac{1}{2\sqrt{5}}$ b) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ c) $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{5}}$ d) $\dfrac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{3}}$ e) $\dfrac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}}$

f) $\dfrac{3}{2+\sqrt{2}}$ g) $\dfrac{4}{3-\sqrt{3}}$ h) $\dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{6}}{\sqrt{35}-\sqrt{14}}$ i) $\dfrac{3}{3\sqrt{3}+4}$ j) $\dfrac{11}{3\sqrt{5}-2\sqrt{7}}$

31. Racionaliza y efectúa:

a) $\dfrac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\dfrac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}-\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$

32. Opera y simplifica:

$$\frac{1}{1-\dfrac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}}+\frac{1}{1+\dfrac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}}$$

33. Calcula:

1) $\log_2 1024$ 2) $\log 0{,}001$ 3) $\log_2 \dfrac{1}{64}$ 4) $\ln 1$

5) $\ln e^2$ 6) $\log_2 \sqrt{8}$ 7) $\log_3 3\sqrt{3}$ 8) $\log_3 \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

9) $\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 10) $\ln \dfrac{1}{e}$ 11) $\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{128}$ 12) $\log_{\frac{1}{2}} 8$

13) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2}$ 14) $\log_5 625$ 15) $\log_5 (625)^3$ 16) $\log_2 \dfrac{1}{32}$

17) $\log 1000$ 18) $\log 100\ 000$ 19) $\log 0{,}01$ 20) $\log \dfrac{1}{10}$

21) $\log 10^8$ 22) $\log \sqrt{10}$ 23) $\log 10^{-7}$ 24) $\log \sqrt[3]{0{,}001}$

34. Aplicando la definición de logaritmo resuelve los siguientes ejercicios:

1) $2^x = 16$ 2) $2^x = 32$ 3) $3^{\frac{1}{x}} = 9$

4) $\log_2 64 = x$ 5) $\log_3 81 = x$ 6) $\log_{101} 10\ 201 = x$

7) $\log_{16} 0.5 = x$ 8) $\log_{10} 10^{-5} = x$ 9) $\log_x 125 = \frac{3}{2}$

10) $\log_x \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}$ 11) $\log_{125} \frac{1}{\sqrt{5}} = x$ 12) $\log_{343} \sqrt{7} = x$

13) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{81}{16} = x$ 14) $\log_{\frac{5}{3}} \frac{27}{125} = x$ 15) $\log_8 \sqrt[4]{2} = x$

35. Si $z = \sqrt[5]{\frac{a^3 b}{c^2}}$ y $\log a = 1,5$, $\log b = 2,5$ y $\log c = -1,2$, ¿cuánto valdrá $\log z$?

36. Si sabemos que $\log a = -2$, ¿cuánto valdrá el logaritmo decimal de $\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a^2}}$?

37. Calcula:

a) $\log_2 \frac{1}{64} + \log_2 1 + \log_3 81 + \log_{11} 121$

b) $\log_2 \sqrt{2} + \log_2 \sqrt{8} - \log_2 \sqrt[3]{2}$

c) $\ln 1 + \ln e + \ln e^2 + \ln \sqrt{e} + \ln \frac{1}{e}$

d) $\log_5 625 - \log_3 243 + \log_4 256$

e) $\log_3 1 + \log_2 64 + \log_3 9 + \log_7 49$

f) $\log_2 4 + \log_3 81 - \log_6 216 + \log_4 64$

g) $\log_3 \frac{1}{9} - \log_5 0,2 + \log_6 \frac{1}{36} - \log_2 0,5$

38. Halla el valor de x en los siguientes casos:

a) $\log_7 x = 2$ b) $\log_2 x = 0$ c) $\log_8 x = \frac{1}{3}$

d) $\log_2 64 = x$ e) $\log_{49} \sqrt{7} = x$ f) $\log_8 \sqrt[4]{2} = x$

g) $\log_x 10 = \frac{1}{4}$ h) $\log_2 \frac{1}{16} = x$ i) $\log_x 0,00001 = -6$

39. Averigua el valor numérico de las siguientes expresiones:

1) $\log_a a^2\sqrt{a}$ 2) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{64}$ 3) $\log_{10}\left(\frac{100}{5^2}\right)$

4) $\log_a 1$ 5) $2^{\log_a a^2}$ 6) $\log_{10}\left(10^{10^{\log_{10} 10}}\right)$

7) $\log_x \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}}$ 8) $10^{\log_a \sqrt{a}}$ 9) $\log_2 \sqrt[3]{64}$

11) $10^{\log_a \sqrt{a} \cdot a^3}$ 12) $\log_{10}\left(\log_{10} 10^{10}\right)$ 13) $\log_5 (625)^3$

40. Sabiendo que $\log_{10} 2 \simeq 0,301030$ halla los logaritmos decimales de:

a) $\sqrt[3]{0,002}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{16}}$ c) $0,25$

d) $\sqrt{\dfrac{0,0025}{16}}$ e) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{0,008}}$ f) 1 024

41. Halla la base de los logaritmos en las siguientes igualdades:

1) $\log_a 4 = 2$ 4) $\log_a 243 = 5$ 7) $\log_a 0,001 = -3$

2) $\log_a 9 = 2$ 5) $\log_a 256 = 8$ 8) $\log_a 0,015625 = 3$

3) 6) $\log_a 0,125 = 3$ 9) $\log_a 1 = 0$

42. Si el logaritmo de *A* en base 3 es *x*, expresar en función de *x* los siguientes logaritmos:

1) $\log_3 27A$ 2) $\log_3 \dfrac{A}{81}$ 3) $\log_3 3^6 A$

4) $\log_3 \dfrac{27}{A}$ 5) $\log_3 \sqrt{A}$

43. Opera y expresa en notación científica:

a) $9\cdot 10^9 \cdot \dfrac{2\cdot 10^{-6}\cdot 10^{-5}}{\left(2\cdot 10^{-4}\right)^2}$ b) $6,672\cdot 10^{-11}\cdot \dfrac{3,2\cdot 10^{-3}\cdot 5,96\cdot 10^{24}}{\left(6,37\cdot 10^{6}\right)^2}$

c) $2,54\cdot 10^{-3}\cdot 4,2173\cdot 10^{-5}$ d) $\dfrac{2\cdot 3,76\cdot 10^4 + \frac{4}{5}\cdot 1,9654\cdot 10^2}{7,4321\cdot 10^{-5}}$

e) $\dfrac{6,45\cdot 10^{-23}}{8,65\cdot 10^{-25}}$ $\log_a 625 = 4$

44. Halla:

a) El error absoluto y relativo en que se incurre al aproximar $\dfrac{354}{233}$ por 1,519.

b) El error máximo que se comete al aproximar $\sqrt{7}$ por 2,64.

45. Los tiempos de utilización de una red de comunicaciones se redondean por exceso a cuartos de hora. Aproxima de esta forma los siguientes tiempos: 39 min; 83 min; 118 min.

46. Al medir la longitud de una calle, obtuvimos 1 500 m, con un error absoluto menor que 2 m. Al medir la altura de una habitación, obtuvimos 2,80 m, con un error absoluto menor que 2 cm. ¿Qué medida se hizo con más precisión?

47. a) Completa la siguiente tabla de aproximaciones de $\sqrt{6}$:

Por defecto	2			
Por exceso	3		2,45	

b) Calcula el error máximo y acota el error relativo que se produce al tomar $\sqrt{6} = 2,449$.

48. Completa la tabla:

	$\sqrt{3}$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{3}+\sqrt{7}$	Error	$\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}$	Error
Por defecto	1,732					
Por exceso		2,646				

49. ¿Qué error absoluto cometemos al aproximar el resultado de 45,96 + 203,7 + 0,823 por el número 250,49?

50. Si aproximamos 10,469 por 10,5, ¿qué error absoluto se comete? ¿Y si lo aproximamos por 10,4? ¿Cuál es la mejor aproximación? Razónalo.

51. ¿Se puede escribir $\pi=\frac{355}{113}$? Justifica la respuesta y di cuál es el orden de error cometido.

52. Las antiguas civilizaciones ya conocían aproximaciones del número π. Así, los babilonios tomaban 3 como valor de π, los egipcios 3,1604 y Arquímedes estableció las siguientes desigualdades:

$$\frac{221}{71}<\pi<\frac{22}{7} \quad \text{y} \quad \frac{221\,872}{67\,441}<\pi<\frac{195\,882}{62\,351}$$

En 1.600, Otho dio una de las mejores aproximaciones a través de la fracción que aparece en el ejercicio anterior ($\frac{355}{113}$). Calcula el error absoluto que se comete con cada una de las aproximaciones anteriores.

53. A partir del S. XVII y con el nacimiento y desarrollo del Cálculo Infinitesimal es cuando se obtienen numerosas expresiones de π en función de sumas o productos infinitos. Algunas de éstas son:

$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\ldots$$

$$\frac{\pi^2}{8}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\ldots$$

$$\frac{\pi}{4}=\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\left(1-\frac{1}{7^2}\right)\left(1-\frac{1}{9^2}\right)\ldots$$

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8\cdot\ldots}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7\cdot\ldots}$$

Calcula la aproximación de π en cada expresión, utilizando los números que se dan en cada una y que son previos a los puntos suspensivos.

54. A una persona se le estima una estatura de 180 cm, siendo en realidad de 187 cm; a uno de sus primos le asignan una estatura de 140 cm, cuando es de 147 cm.

a) Calcula el error absoluto y relativo de cada medida.
b) ¿Cuál de las dos mediciones es más precisa? Razona la respuesta.

55. La expresión decimal del número e es:

$$e=2{,}718\,281\,828\,445\,904\,523\,536\ldots$$

Una forma de obtenerlo de forma aproximada, es utilizando fracciones continuas. Su expresión debida a Euler es:

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{4}{5 + \ldots}}}}}$$

Calcula las cuatro primeras aproximaciones al número e.

56. Si se quiere obtener $\pi \cdot \sqrt{7}$ con cuatro cifras exactas, ¿qué aproximaciones debemos tomar para π y $\sqrt{7}$?

57. ¿Cuántas cifras exactas tendrá una aproximación de $\frac{45}{22}$ para que el error relativo que se comete no exceda del 1%?

58. Se quiere obtener el resultado de $\pi + \sqrt{12}$ y $\pi \cdot \sqrt{12}$ con una precisión de milésimas, es decir, con incertidumbre menor que media milésima. ¿Cuántas cifras exactas se deben tomar en las aproximaciones de π y $\sqrt{12}$?

59. Se desea calcular la capacidad de un depósito cilíndrico. Se toman las siguientes medidas: diámetro del depósito: 95 ± 1 cm, altura: 180 ± 1 cm. Calcula su capacidad en litros y expresa el resultado indicando su incertidumbre.

60. Una habitación rectangular mide $4{,}57$ m por $7{,}32$ .Se han realizado las medidas con una cinta métrica que aprecia 1 cm. Calcula su área y exprésala correctamente.