UNIDAD 0: CONCEPTOS BÁSICOS DE NÚMEROS

1. NÚMEROS REALES

1.1. NÚMEROS NATURALES

$$\mathbb{N}=\{1,2,3,4,...\}$$

Operaciones internas (el resultado es un número natural)

- Suma y producto

Operaciones externas (el resultado puede no ser un número natural)

- Resta y división

Como no todas las operaciones que realizamos con números naturales dan como resultado otro número natural, se hace necesario ampliar dicho conjunto.

1.2. NÚMEROS ENTEROS

$$\mathbb{Z}=\{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$$

Operaciones:

Suma:

a) Si los dos números tienen el mismo signo se suman y se pone el signo común.

$$(+2)+(+3)=+5$$

$$(-2)+(-3)=-5$$

b) Si tienen distinto signo, se restan y se pone el signo "del mayor".

$$-2+(+2)=0$$

$$2+(-3)=-1$$

Resta:

Se suma el primero con el opuesto[1] del segundo número.

$$(-2)-(+2)=-2+(-2)=-4$$

$$-2-(-3)=-2+(+3)=1$$

Multiplicación:

Primero se multiplican los signos (aplicando la regla de los signos) y después los números (como siempre).

Regla de los signos:

[1] Recuerda que el opuesto de un número se obtiene cambiándole el signo.

$$\begin{array}{ccccc} + & \cdot & + & = & + \\ + & \cdot & - & = & - \\ - & \cdot & + & = & - \\ - & \cdot & - & = & + \end{array}$$

División:
Primero se dividen los signos (aplicando la regla de los signos) y después se dividen los números (como siempre).

Regla de los signos:

$$\begin{array}{ccccc} + & : & + & = & + \\ + & : & - & = & - \\ - & : & + & = & - \\ - & : & - & = & + \end{array}$$

La suma, la resta y la multiplicación de números enteros son operaciones internas. Sin embargo, la división no es una operación interna (ya que, por ejemplo, 3 : 2 = 1,5 que no es un número entero. Esto se escribe $1{,}5 \notin \mathbb{Z}$). Por lo tanto, es necesario ampliar el conjunto de los números enteros.

1.3. NÚMEROS RACIONALES

Fracción: división (cociente) de números enteros

$$\frac{a}{b} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Numerador} \\ \leftarrow \text{Denominador} \end{array}$$

Numerador: partes que se toman
Denominador: partes en que se divide la "unidad"

Expresión decimal de una fracción: para hallarla basta con efectuar la división correspondiente.

Fracciones equivalentes: Dos fracciones son equivalentes cuando sus productos cruzados son iguales o cuando tienen el mismo valor decimal.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

Fracción irreducible: Aquella que no se puede simplificar más, es decir, no podemos dividir numerador y denominador por un número distinto de uno (1).

Números racionales:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, \;\; b \neq 0 \;\text{ y }\; m.c.d.(a,b) = 1 \right\}$$

Un número racional es una fracción y todas sus equivalentes. Generalmente, se representa mediante su fracción irreducible.

Operaciones con números racionales:

Suma y resta:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{(m:b)\cdot a}{m} \pm \frac{(m:d)\cdot c}{m} = \frac{(m:b)\cdot a \pm (m:d)\cdot c}{m}$$

donde $m = m.c.m.(b,d)$.

Multiplicación: (en línea; numerador por numerador y denominador por denominador)

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

División: (en cruz)

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d} = \frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

Números decimales exactos y periódicos:

- Decimal Exacto: Tiene un número limitado de cifras decimales.
- Periódico: Se llama período a la cifra o grupo de cifras que se repiten a partir de un determinado lugar y de forma indefinida.
  - Puro: El período empieza justo después de la coma.
  - Mixto: Entre la coma y el período hay una o varias cifras que reciben el nombre de anteperíodo.

Fracción generatriz de un número decimal: es la fracción que representa a dicho número.

a) De un número decimal exacto

Numerador: Número sin coma

Denominador: Un uno (1) seguido de tantos ceros (0) como cifras decimales tenga el número.

b) De un número periódico puro

Numerador: (Número sin coma) – (Parte entera)

Denominador: Tantos nueves (9) como cifras tenga el período.

c) De un número periódico mixto

Numerador: (Número si coma) – (Número que resulta de quitar la coma y el período)

Denominador: Tantos nueves (9) como cifras tenga el período seguidos de tantos ceros (0) como cifras tenga el anteperíodo.

Caracterización de los racionales:

$$\mathbb{Q} = \{\text{números racionales}\} = \{\text{números decimales exactos o periódicos}\}$$

Esto quiere decir que "todo número racional se expresa como un número decimal exacto o periódico, y que todo número decimal exacto o periódico se puede expresar como un número racional (esto es, en forma de fracción)".

Sin embargo, también conocemos otros números decimales que no son ni exactos ni periódicos, y que son los que se estudian en el apartado siguiente.

1.4. NÚMEROS IRRACIONALES

Son los números decimales que no son ni exactos ni periódicos.

$$\mathbb{I} = \{\text{números irracionales}\} = \{\text{números decimales que no son ni exactos ni periódicos}\}$$

Ejemplos: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi, e, \Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \ldots$

1.5. NÚMEROS REALES

$$\mathbb{R} = \{\text{números reales}\} = \{\text{números racionales}\} \cup \{\text{números irracionales}\} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Recuerda que hay números que no son reales: $\sqrt{-1}, \sqrt{-2}, \sqrt[4]{-3}, \ldots$

2. POTENCIAS

- De exponente natural: $x^n = x \cdot x \cdot \overset{n)}{\ldots} \cdot x$ con $n \in \mathbb{N}$
- De exponente uno: $x^1 = x$
- De exponente cero: $x^0 = 1$ siempre que $x \neq 0$
- De exponente negativo: $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$ con $n \in \mathbb{N}$
- De exponente fraccionario: $x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n}$

Propiedades de las potencias:

(1) $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$

(2) $x^n : x^m = x^{n-m}$

(3) $\left(x^n\right)^m = x^{n \cdot m}$

(4) $\left(x \cdot y\right)^n = x^n \cdot y^n$

(5) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^n = \dfrac{x^n}{y^n}$ (esta propiedad también se puede escribir en la forma $\left(x : y\right)^n = x^n : y^n$)

3. JERARQUÍA DE LAS OPERACIONES

(1) Paréntesis (de dentro hacia fuera): $(\;),\ [\;],\ \{\;\}, \ldots$

(2) Potencias y raíces

(3) Multiplicaciones y divisiones

(4) Sumas y restas

Las operaciones que están en el mismo nivel de la jerarquía tienen la misma importancia y por tanto se pueden realizar en el orden que más nos convenga.

Cuando haya varias operaciones consecutivas del mismo nivel y no estén separadas por paréntesis, se realizarán siempre de izquierda a derecha.

4. EJERCICIOS

1. Calcular:

a) $6-6+3-2$

b) $-6-8:4$

c) $9-9:3-2$

d) $5-(-2)+(-8):(-4)-5$

e) $4+[5-(3+8)]$

f) $7-3\cdot 4^2$

g) $7-(-3)-(-8):(-8)-3:(-1)$

h) $6:(-2)+(-7)\cdot(-15):(-3)$

i) $2^2-4^2:8+2^5$

j) $2\cdot 3^2-5^2:5+5^3$

k) $3^2\cdot 3-3^3+1-2^5$

l) $4^2:2-1-8^2:2-1$

2. Calcula:

a) $(-8)^3\cdot\left[2-(-6)^2\cdot(-3)\right]-4\cdot(-10)^2$

b) $3\cdot\left\{5-3\cdot\left[6-2\cdot(3-1)^4-7\cdot(-5)^3\right]\right\}$

c) $2-3\cdot(-4)^3-5\cdot\left\{(-2)^2\cdot(-3)-4\cdot 5\cdot(-1)^{15}-3\cdot\left[1-2\cdot(-3)-4\cdot(-1)\right]\right\}$

d) $(-7)^2-\left\{3\cdot(-5)^2-(-4)^2\cdot\left[(-3)\cdot(-4)-2^3\right]-3^2\right\}^5$

e) $(-3)\cdot(-5)^2-\left[4+2^5-3^2\cdot(-2)^2\right]^5-(-1)^{10}$

3. Calcular y simplificar el resultado:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}-\frac{3}{2}:\frac{5}{2}-10^0$

b) $\frac{5}{9}-\left(-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)+\frac{10}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{5}\right)$

c) $\frac{3}{8}\left(\frac{5}{3}-\frac{-1}{2}\right)-\frac{4}{11}\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{5}\right)$

d) $\frac{3}{7}\left(\frac{4}{5}-3\right)-\frac{11}{4}\left(\frac{7}{3}-(-2)\right):(-1)$

e) $\left(\frac{5}{7}-3\right)-\frac{1}{6}+2:\left(-\frac{4}{3}+\frac{5}{2}-\frac{1}{6}\right)$

f) $\dfrac{\frac{2}{3}\left(\frac{3}{8}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\right)-\frac{2}{8}\cdot\frac{5}{3}}{\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}:\frac{1}{2}-\frac{5}{6}\right)}$

g) $\dfrac{2-\left[\left(\frac{7}{4}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{4}{5}-\frac{1}{2}\right)\right]}{\left(\frac{3}{5}-\frac{4}{9}\right):\left(\frac{2}{5}-\frac{5}{3}\right)}$

4. Calcula y simplifica el resultado:

a) $\left(\frac{-2}{5}\right)^2:\left(\frac{-4}{8}\right)^3$

b) $\left(\frac{-9}{4}\right)^{-4}\cdot\left(\frac{6}{10}\right)^{-3}$

c) $\left(\frac{-3}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^{-2}$

d) $\left(\frac{-7}{2}\right)^3:\left(\frac{5}{-2}\right)^{-2}$

5. Opera y expresa el resultado en forma de potencia:

a) $\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{-4}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right]^{-1}$

b) $\left[\left(\frac{-1}{4}\right)^{-4}:4^{3}:\left(\frac{1}{4}\right)^{-5}\right]^{-2}$

c) $\left[2^{-2}:\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\right]^{7}$

d) $\left[\left(\frac{5}{6}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{6}{5}\right)^{5}\right]^{3}$

e) $\left[\left(\frac{25}{2}\right)^{-2}:\left(\frac{25}{2}\right)^{-6}\cdot\left(\frac{2}{25}\right)^{8}\right]^{2}$

f) $\left[9^{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{2}:2\right]^{-2}$

6. Realiza las siguientes operaciones:

a) $\left(\frac{5}{2}-\frac{3}{4}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{-3}{5}\right)^{-1}-\left(\frac{17}{8}-2\right)^{-2}$

b) $\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{-7}{2}\right)^{-1}+2:\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{6}\right)^{-2}$

c) $\left(\frac{3}{2}-\frac{5}{4}\right)^{-2}-\left(\frac{1}{3}-1\right)^{-1}$

d) $\left(\frac{1}{5}-\frac{3}{10}\right)^{-1}:\left(1-\frac{2}{5}\right)-\left(\frac{-3}{2}\right)^{-2}$

7. Clasifica y halla la fracción generatriz de los siguientes números decimales:

a) $0,016$ b) $0,001$ c) $-3,\widehat{24}$ d) $-1,25\widehat{26}$

e) $-9,\widehat{02}$ f) $5,26\widehat{985}$ g) $-32,23\widehat{568}$

8. Realiza las siguientes operaciones, expresando previamente los números decimales en forma de fracción:

a) $0,34+6,\widehat{5}+8,\widehat{9}$

b) $0,0\widehat{5}:0,50\cdot 0,\widehat{50}$

c) $2,\widehat{3}+2,3-2,\widehat{23}$

d) $0,\widehat{27}+6,\widehat{5}$

e) $-9,5\widehat{6}+3,2\widehat{45}$

f) $-2+0,\widehat{3}+3,\widehat{2}$

g) $0,7\widehat{5}-1+4\cdot 2,3\widehat{5}$

h) $5,25+5,\widehat{25}+5,2\widehat{5}$

i) $\left(2,\widehat{6}-3,2\right)\cdot 2$

j) $\frac{5}{10}-\left(0,5\widehat{4}+\frac{1}{9}\right)$

9. Razonar si los siguientes números son racionales o irracionales:

a) 3,342 224 443 332 224 443 33 …
b) 5,645 797 997 999 799 997 999 997 …
c) –3,22 228 2288 22888 228888 …
d) 7,446 060 060 006 …
e) –9,727 272 727 272 72 …