DISTRIBUCIÓN NORMAL (Laplace-Gauss)

$\boxed{1.\text{-}}$ El nivel de colesterol en una persona adulta sana sigue una distribución normal $\mathcal{N}(192, 12)$. Calcula la probabilidad de que una persona adulta sana tenga un nivel de colesterol:

a) Superior a 200 unidades.

b) Entre 180 y 220 unidades.

Solución:

a) X = nivel de colesterol de una persona adulta sana, $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(192, 12)$.

$$P(X > 200) = P\left(\frac{X - 192}{12} > \frac{200 - 192}{12}\right) = P(Z > 0,67) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 0,67) = 1 - 0,7486 = 0,2514$$

b)

$$P(180 < X < 220) = P\left(\frac{180 - 192}{12} < \frac{X - 192}{12} < \frac{220 - 192}{12}\right) =$$

$$= P(-1 < Z < 2,33) = P(Z < 2,33) - [1 - P(Z < 1)] =$$

$$= 0,9901 - (1 - 0,8413) = 0,8314$$

$\boxed{2.\text{-}}$ La edad de un grupo de personas sigue una distribución $\mathcal{N}(35, 10)$. Calcula la probabilidad de que una persona de ese grupo, elegida al azar, tenga:

a) Más de 40 años.

b) Entre 23 y 47 años.

c) Di entre qué edades estará comprendido el 50 % central de la distribución.

Solución:

Sea X = edad. Se tiene que $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(35, 10)$.

a)

$$P(X > 40) = P\left(\frac{X - 35}{10} > \frac{40 - 35}{10}\right) = P(Z > 0,5) = 1 - P(Z \leq 0,5) =$$

$$= 1 - 0,6915 = 0,3085$$

b)

$$P\left(23 < X < 47\right) = P\left(\frac{23-35}{10} < \frac{X-35}{10} < \frac{47-35}{10}\right) =$$

$$= P\left(-1,2 < Z < 1,2\right) = P\left(Z < 1,2\right) - \left[1 - P\left(Z < 1,2\right)\right] =$$

$$= 2 \cdot 0,8849 - 1 = 0,7698$$

c)

$$P\left(35 - a < X < 35 + a\right) = 0,5 \Rightarrow P\left(\frac{35-a-35}{10} < X < \frac{35+a-35}{10}\right) =$$

$$= P\left(-\frac{a}{10} < Z < \frac{a}{10}\right) = P\left(Z < \frac{a}{10}\right) - \left[1 - P\left(Z < \frac{a}{10}\right)\right] =$$

$$= 2P\left(Z < \frac{a}{10}\right) - 1 = 0,5 \Rightarrow P\left(Z < \frac{a}{10}\right) = 0,75 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a}{10} = 0,68 \Rightarrow a = 6,8$$

$\boxed{3.-}$ Los pesos de los individuos de una población se distribuyen normalmente con media 70 kg y desviación típica 6kg. De una población de 2000 personas, calcular cuántas personas tendrán un peso entre 64 y 76 kg.

Solución:

Tenemos $\left\{\begin{array}{l}\mu = 70\\ \sigma = 6\end{array}\right.$. Si llamamos $X =$ pesos, se tiene que: $X \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(70,6\right)$.

El 68,26 % de los individuos están en el intervalo

$$\left(\mu - \sigma, \mu + \sigma\right) = \left(70-6\ ,\ 70+6\right) = \left(64\ ,\ 76\right).$$

Vamos a calcular el 68.26 % de 2000:

$$\frac{2000}{x} = \frac{100}{68,26} \Rightarrow x = \frac{2000 \cdot 68,26}{100} = 1365,2 \simeq 1365 \text{ individuos}$$

$\boxed{4.-}$ Se ha aplicado a 300 alumnos de 1^o de E.S.O. un test de agresividad y se ha observado que se distribuyen normalmente con media 30 y desviación típica 12. Se pide:

(1) ¿Qué proporción de alumnos tendrá una puntuación en dicho test entre 20 y 35?

(2) ¿Cuántos alumnos tendrán una puntuación superior a 42?

Solución:

Tenemos $\left\{\begin{array}{l}\mu = 30\\ \sigma = 12\\ n = 300\end{array}\right.$. Si llamamos X = puntuación obtenida en el test, se tiene que: $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(30, 12)$.

1)

$$P(20 \leq X \leq 35) = P\left(\frac{20-30}{12} \leq Z \leq \frac{35-30}{12}\right) = P(-0,83 \leq Z \leq 0,42) =$$

$$= P(Z \leq 0,42) - P(Z \geq -0,83) = P(Z \leq 0,42) - [1 - P(Z < 0,83)] =$$

$$= 0,6628 - (1 - 0,7967) = 0,4595$$

es decir, aproximadamente el 46 % de los alumnos tienen puntuación entre 20 y 35.

2)

$$P(X > 42) = P\left(Z > \frac{42-30}{12}\right) = P(Z > 1) = 1 - P(Z \leq 1) =$$

$$= 1 - 0,8413 = 0,1587$$

Haciendo una regla de tres:

$$\frac{300}{x} = \frac{100}{15,87} \Rightarrow x = \frac{15,87 \cdot 300}{100} = 47,61 \simeq 48 \text{ alumnos}$$

$\boxed{\text{5.-}}$ Aplicando un test a un grupo de 400 personas se ha obtenido una distribución normal de media 60 y desviación típica 5. Hallar el percentil 67.

Solución:

Tenemos $\left\{\begin{array}{l}\mu = 60\\ \sigma = 5\end{array}\right.$. Si llamamos X = puntuación obtenida en el test, se tiene que: $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(60, 5)$.

El percentil 67 es el valor de x tal que $P(X \leq x) = 0{,}67$. Vamos a calcularlo:

$$P(X \leq x) = 0{,}67 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{x-60}{5}\right) = 0{,}67$$

Buscando en las tablas obtenemos:

$$\frac{x-60}{5} = 0,44 \Rightarrow x = 62,2$$

Por tanto el percentil 67 es 62,2 puntos.

$\boxed{6.-}$ Después de realizar varios sondeos sobre cierta población, se ha conseguido averiguar que únicamente el 15 % de la misma es favorable a los tratamientos de psicoterapia. Elegida al azar una muestra de 50 personas de dicha población, se desea saber:

(1) La probabilidad de que haya más de cinco personas favorables a dichos tratamientos.

(2) La probabilidad de que a lo sumo haya seis personas favorables.

<u>Solución:</u>

Se trata de una distribución binomial:

$$\begin{aligned} A &= \text{ ser favorable } \Rightarrow P(A) = 0,15 = p \\ \overline{A} &= \text{ ser desfavorable } \Rightarrow P\left(\overline{A}\right) = 0,85 = q \end{aligned}$$

Sea X = n^o de personas favorables a los tratamientos de psicoterapia. Se tiene que:

$$X \rightsquigarrow \mathcal{B}(50, 0{,}15)$$

Dicha distribución binomial no la tenemos tabulada. Veamos si se puede aproximar por una normal. Como

$$\begin{aligned} np &= 50 \cdot 0,15 = 7,5 > 5 \\ nq &= 50 \cdot 0,85 = 42,5 > 5 \end{aligned}$$

aplicando la aproximación de De Moivre se tiene que:

$$X' \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(50 \cdot 0,15 \quad , \quad \sqrt{50 \cdot 0,15 \cdot 0,85}\right) = \mathcal{N}(7,5 \quad , \quad 2,52)$$

a)

$$P(X > 5) = P(X' > 5,5) = P\left(Z > \frac{5,5 - 7,5}{2,52}\right) = P(Z > -0,79) =$$

$$= P(Z \leq 0,79) = 0,7852$$

b)

$$P(X \leq 6) = P(X' \leq 6,5) = P\left(Z \leq \frac{6,5 - 7,5}{2,52}\right) = P(Z \leq -0,4) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 0,4) = 1 - 0,6554 = 0,3446$$

$\boxed{7.-}$ La altura de los individuos en edad militar de un determinado país sigue una $\mathcal{N}(170, 10)$, donde 170 y 10 están medidos en cm. Se pide:

(a) Qué proporción de individuos mide menos de 150 o más de 200.

(b) Si no son admitidos para el servicio militar todos aquellos individuos cuya talla dista más de 30 cm de la talla media, ¿que proporción de individuos se rechaza?

Solución:

Sea $X =$ altura. Se tiene que $X \rightsquigarrow \mathcal{N}\,(170, 10)\,.$

a)

$$P\,(150 > X > 200) = 1 - P\,(150 < X < 200) =$$

$$= 1 - P\left(\frac{150-170}{10} < Z < \frac{200-170}{10}\right) = 1 - P\,(-2 < Z < 3) =$$

$$= 1 - (P\,(Z < 3) - P\,(Z < -2)) = 1 - (P\,(Z < 3) - P\,(Z > 2)) =$$

$$= 1 - (0,99865 - 0,0228) = 0,02415$$

Por tanto, la proporción de individuos que están en las condiciones pedidas es 2,415 %.

b)

$$P\,(140 > X > 200) = 1 - P\,(140 < X < 200) =$$

$$= 1 - P\left(\frac{140-170}{10} < Z < \frac{200-170}{10}\right) = 1 - P\,(-3 < Z < 3) =$$

$$= 1 - (P\,(Z < 3) - P\,(Z < -3)) = 1 - (P\,(Z < 3) - P\,(Z > 3)) =$$

$$= 1 - (0,99865 - 0,00135) = 0,0027$$

Por tanto, la proporción de individuos que están en las condiciones pedidas es 0,27 %.

$\boxed{8.\text{-}}$ Las precipitaciones anuales en una región son, en media, de 2000 ml/m^2, con una desviación típica de 300ml/m^2. Calcular, suponiendo distribución normal, la probabilidad de que un año determinado la lluvia no supere los 1200ml/m^2.

Solución:

Los datos del ejercicio son: $\left\{\begin{array}{l}\mu = 2000\ ml/m^2\\ \sigma = 300\ ml/m^2\end{array}\right.$. Si X = precipitaciones anuales en una región, la distribución de X es $\mathcal{N}\,(2000, 300)\,.$ La probabilidad que nos piden es $P\,(X \leq 1200)$:

$$P\,(X \leq 1200) = P\left(Z \leq \frac{1200-2000}{300}\right) = P\,(Z \leq -2,67) = P\,(Z \geq 2,67) =$$

$$= 1 - P\,(Z < 2,67) = 1 - 0,9962 = 0,0038$$

$\boxed{9.\text{-}}$ Las tallas de 800 recién nacidos se distribuyen normalmente con una media de 66cm y una desviación típica de 5. Calcular cuántos recién nacidos se distribuyen normalmente con una media de 66cm y una desviación típica de 5cm. Calcular cuántos recién nacidos cabe esperar con tallas comprendidas entre 65 y 70 cm.

Solución:

Los datos del ejercicio son: $\left\{ \begin{array}{l} \mu = 66cm \\ \sigma = 5cm \end{array} \right.$. Si X = tallas de los recién nacidos, la distribución de X es $\mathcal{N}(66, 5)$.

a) En $(\mu - \sigma, \mu + \sigma) = (66 - 5, 66 + 5) = (61, 71)$ están el 68.26 % de los recién nacidos, luego:

$$\frac{800}{x} = \frac{100}{68,26} \Rightarrow x = \frac{68,26 \cdot 800}{100} = 546,08$$

es decir, aprox. 546 recién nacidos.

b)

$$P(65 < X < 70) = P\left(\frac{65 - 66}{5} < Z < \frac{70 - 66}{5}\right) = P(-0,2 < Z < 0,8) =$$

$$= P(Z < 0,8) - P(Z < -0,2) = P(Z < 0,8) - P(Z > 0,2) =$$

$$= P(Z < 0,8) - (1 - P(Z \leq 0,2)) = 0,7881 - 1 + 0,5793 = 0,3674$$

es decir, el 36,74 % de los recién nacidos miden entre 65 y 70cm.

$\boxed{10.\text{-}}$ En un examen de selectividad se comprobó que las calificaciones obtenidas correspondían razonablemente a una distribución normal de media 6 y desviación típica 1. Elegido al azar un estudiante, calcular cuál es la probabilidad de que su calificación esté comprendida entre 6,7 y 7,1.

Solución:

Los datos del ejercicio son: $\left\{ \begin{array}{l} \mu = 6 \\ \sigma = 1 \end{array} \right.$. Si X = nota en un examen de selectividad, la distribución de X es $\mathcal{N}(6, 1)$. La probabilidad que nos piden es:

$$P(6,7 < X < 7,1) = P\left(\frac{6,7 - 6}{1} < Z < \frac{7,1 - 6}{1}\right) = P(0,7 < Z < 1,1) =$$

$$= P(Z < 1,1) - P(Z < 0,7) = 0,8643 - 0,7580 = 0,1063$$

$\boxed{11.\text{-}}$ Los ingresos diarios en una empresa tienen una distribución normal, con media 35 600 euros y desviación típica 2 530 euros. Justificar si es razonable o no el esperar obtener un día unas ventas superiores a 55 000 euros. Calcular cuántos días en un año se espera obtener unas ventas superiores a 40 620 euros.

Solución:

Los datos del ejercicio son: $\left\{ \begin{array}{l} \mu = 35600 \text{ euros} \\ \sigma = 2350 \text{ euros} \end{array} \right.$. Si $X =$ ingresos diarios de una empresa, la distribución de X es $\mathcal{N}(35600, 2530)$.

a)

$$P(X > 55000) = 1 - P(X \le 55000) = 1 - P\left(Z \le \frac{55000 - 35600}{2530}\right) =$$

$$= 1 - P(Z < 7,67) = 1 - 1 = 0$$

luego no es razonable obtener esos ingresos.

b)

$$P(X > 40620) = 1 - P(X \le 40620) = 1 - P\left(Z \le \frac{40620 - 35600}{2530}\right) =$$

$$= 1 - P(Z < 1,98) = 1 - 0,9761 = 0,0239$$

es decir, el 2.39 % de los días:

$$\frac{365}{x} = \frac{100}{2} \Rightarrow x = \frac{2 \cdot 365}{100} = 7,3 \simeq 7 \text{ días}$$

$\boxed{12.-}$ El peso de las truchas de una piscifactoría sigue una ley $\mathcal{N}(200, 50)$. Se extrae una al azar:

(1) ¿Cuál es la probabilidad de que su peso no exceda los 175 gramos?

(2) ¿Cuál es la probabilidad de que su peso exceda los 230 gramos?

(3) ¿Cuál es la probabilidad de que su peso esté comprendido entre 225 y 275 gramos?

Solución:

Los datos del ejercicio son: $\left\{ \begin{array}{l} \mu = 200 \; gramos \\ \sigma = 50 \; gramos \end{array} \right.$. Si $X =$ pesos de las truchas, la distribución de X es $\mathcal{N}(200, 50)$.

a)

$$P(X \le 175) = P\left(Z \le \frac{175 - 200}{50}\right) = P(Z \le -0,5) = P(Z \ge 0,5) =$$

$$= 1 - P(Z < 0,5) = 1 - 0,6915 = 0,3085$$

b)

$$P\left(X>230\right)=1-P\left(X\leq 230\right)=1-P\left(Z\leq \frac{230-200}{50}\right)=$$

$$=1-P\left(Z<0,6\right)=1-0,7257=0,2743$$

$\boxed{13.\text{-}}$ El peso de los toros de una determinada ganadería se distribuye como una distribución normal de 500kg de media y 45kg de desviación típica. Si la ganadería tiene 2000 toros:

(1) ¿Cuántos pesarán más de 540kg?
(2) ¿Cuántos pesarán menos de 480kg?
(3) ¿Cuántos pesarán entre 490 y 510 kg?

Solución:

Los datos del ejercicio son: $\left\{\begin{array}{l}\mu=500kg\\ \sigma=45kg\end{array}\right.$. Si $X=$ pesos de los toros de la ganadería, la distribución de X es $\mathcal{N}\left(500,45\right)$.

a)

$$P\left(X>540\right)=1-P\left(X\leq 540\right)=1-P\left(Z\leq \frac{540-500}{45}\right)=1-P\left(Z\leq 0,89\right)=$$

$$=1-0,8133=0,1867$$

es decir, el 18.67 % de los toros pesarán más de 540kg:

$$\frac{2000}{x}=\frac{100}{18,67}\Rightarrow x=\frac{18,67\cdot 2000}{100}=373,4\simeq 373 \text{ toros}$$

b)

$$P\left(X<480\right)=P\left(Z<\frac{480-500}{45}\right)=P\left(Z\leq -0,44\right)=P\left(Z>0,44\right)=$$

$$=1-P\left(Z\leq 0,44\right)=1-0,6700=0,33$$

es decir, el 33 % de los toros pesarán menos de 480kg:

$$\frac{2000}{x}=\frac{100}{33}\Rightarrow x=\frac{33\cdot 2000}{100}=660 \text{ toros}$$

c)

$$P(490 < X < 510) = P(X < 510) - P(X < 490) = P\left(Z < \frac{510-500}{45}\right) -$$

$$-P\left(Z < \frac{490-500}{45}\right) = P(Z < 0,22) - P(Z < -0,22) =$$

$$= P(Z < 0,22) - P(Z > 0,22) = P(Z < 0,22) - (1 - P(Z \leq 0,22)) =$$

$$= 0,5871 - 1 + 0,5871 = 0,1742$$

es decir, el 17,42 % de los toros pesarán entre 490 y 510 kg:

$$\frac{2000}{x} = \frac{100}{17,42} \Rightarrow x = \frac{17,42 \cdot 2000}{100} = 348,4 \simeq 348 \text{ toros}$$

$\boxed{14.\text{-}}$ La compañía aérea "Avión" sabe que el tiempo de retraso de sus vuelos sigue una ley normal, con un retraso medio de 10 minutos y desviación típica de 5 minutos. Calcular:

(a) La probabilidad de que un vuelo no tenga retraso

(b) La probabilidad de que el próximo vuelo llegue con no más de 10 minutos de retraso

(c) Probabilidad de que el próximo vuelo llegue con no más de 20 minutos de retraso.

Exercise 1 *(Datos: $F(0) = 0{,}5$, $F(2) = 0{,}9772$; F función de distribución de la $\mathcal{N}(0,1)$)*

Solución:

Los datos del ejercicio son: $\left\{ \begin{array}{l} \mu = 10 \,\text{mín} \\ \sigma = 5 \,\text{mín} \end{array} \right.$. Si X = retraso (en minutos) en los vuelos de la compañía "Avión", la distribución de X es $\mathcal{N}(10,5)$.

a)

$$P(X = 0) = 0$$

b)

$$P(X \leq 10) = P\left(Z \leq \frac{10-10}{5}\right) = P(Z \leq 0) = F(0) = 0,5$$

c)

$$P(X \leq 20) = P\left(Z \leq \frac{20-10}{5}\right) = P(Z \leq 2) = F(2) = 0,9772$$

$\boxed{15.\text{-}}$ Las calificaciones obtenidas por un grupo de alumnos en un examen de Matemáticas sigue una distribución $\mathcal{N}(5.2,\, 1.6)$. Calcula la probabilidad de que elegido un alumno al azar halla sacado una nota:

a) Superior a 7
b) Inferior a 9
c) Entre 3 y 4,5.

Solución:

Sea X = nota obtenida.

a)

$$P\left(X > 7\right) = P\left(Z > \frac{7-5,2}{1,6}\right) = P\left(Z > 1,12\right) = 1 - P\left(Z \leq 1,12\right) =$$

$$= 1 - 0,8686 = 0,1314$$

b)

$$P\left(X < 9\right) = P\left(Z < \frac{9-5,2}{1,6}\right) = P\left(Z < 2,37\right) = 0,9911$$

c)

$$P\left(3 < X < 4,5\right) = P\left(\frac{3-5,2}{1,6} < X < \frac{4,5-5,2}{1,6}\right) = P\left(-1,38 < X < -0,48\right) =$$

$$= P\left(X < -0,48\right) - P\left(X < -1,38\right) = 1 - P\left(X < 0,48\right) - \left[1 - P\left(X < 1,38\right)\right] =$$

$$= 1 - 0,6844 - (1 - 0,9162) = 0,2318$$

$\boxed{16.\text{-}}$ El peso (P) de los socios del Club de Amigos del Buen Comer ha resultado que se distribuye conforme a una normal $\mathcal{N}(92,\, 20)$. ¿Qué peso máximo tienen el 10 % de los individuos menos obesos de tan opíparo Club?

Solución:

Queremos calcular el valor p_0, tal que si una persona posee un peso inferior a p_0 se cumpla:

$$P\left(P < p_0\right) = 0,1 \Leftrightarrow P\left(Z < \frac{p_0 - 92}{20}\right) = 0,1$$

Las tablas de la normal muestran probabilidades superiores a 0.5, por ello, calculamos la probabilidad del simétrico:

$$P\left(Z < -\frac{p_0 - 92}{20}\right) = 0,9 \qquad (*)$$

En la tabla de la normal encontramos: $P\left(Z < 1,28\right) = 0,8997$ y $P\left(Z < 1,29\right) = 0,9015$

Por interpolación lineal, a la probabilidad 0.9 le corresponde la abscisa

$$z = 1,28 + \frac{0,01 \cdot 0,0003}{0,9015 - 0,8997} = 1,2817$$

Volviendo a $(*)$ resulta:

$$-\frac{p_0 - 92}{20} = 1,2817 \Leftrightarrow p_0 = 92 - 20 \cdot 1,2817 \simeq 66 \text{ kg}$$

$\boxed{17.\text{-}}$ Los deciles tercero y octavo de una variable normal $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, son $D_3 = P_{3/10} = 45$ y $D_8 = P_{8/10} = 80$. Calcula la media y la desviación típica de dicha normal.

<u>**Solución:**</u>

Sabemos que los deciles dividen a la población en 10 partes con el 10 % de individuos cada una, luego:

$$P(X < D_3) = 0,3 \;\text{ y }\; P(X < D_8) = 0,8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(X < 45) = 0,3 \;\text{ y }\; P(X < 80) = 0,8$$

ya que $D_3 = P_{3/10} = 45$ y $D_8 = P_{8/10} = 80$.

Como la tabla de la normal no contempla probabilidades inferiores a 0.5, para el tercer decil procedemos como en el problema anterior, y hallamos:

$$P\left(Z < -\frac{45 - \mu}{\sigma}\right) = 0,7$$

En las tablas aparecen $P(Z < 0,52) = 0,6985$ y $P(Z < 0,53) = 0,7019$.

Por interpolación lineal:

$$z = 0,5 + \frac{0,01 \cdot 0,0015}{0,7019 - 0,6985} = 0,5244$$

con lo que:

$$-\frac{45 - \mu}{\sigma} = 0,5244 \Leftrightarrow \mu = 45 + 0,5244\sigma \qquad (1)$$

En el caso del octavo decil:

$$P\left(Z < \frac{80 - \mu}{\sigma}\right) = 0,8$$

En las tablas aparecen $P(Z < 0,84) = 0,7995$ y $P(Z < 0,85) = 0,8023$.

Por interpolación lineal:

$$z = 0,84 + \frac{0,0005 \cdot 0,01}{0,8023 - 0,7995} = 0,8412$$

con lo que:

$$\frac{80 - \mu}{\sigma} = 0,8412 \Leftrightarrow \mu = 80 - 0,8412\sigma \qquad (2)$$

Las ecuaciones (1) y (2) forman un sistema lineal , cuya solución es

$$(\mu, \sigma) = (58,44 \;,\; 25,63)$$