DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

$\boxed{1.-}$ El 10 % de los artículos producidos en un cierto proceso de fabricación resulta ser defectuoso. Calcular:

(1) La probabilidad de que en una muestra de 10 artículos elegidos al azar sean exactamente dos los defectuosos.

(2) La probabilidad de que en una muestra de 8 artículos elegidos al azar existan al menos dos defectuosos.

Solución:

(1) Sea $X =$ número de piezas defectuosas. Se tiene que:

$$X \rightsquigarrow \mathcal{B}\,(10, 0{,}1)$$

y por tanto: $P\,(X = 2) = 0{,}1937$

(2) Ahora

$$X \rightsquigarrow \mathcal{B}\,(8, 0{,}1)$$

y tenemos que calcular $P\,(X \geq 2)$:

$$P\,(X \geq 2) = P\,(X = 2) + P\,(X = 3) + P\,(X = 4) + P\,(X = 5) + P\,(X = 6) +$$

$$+P\,(X = 7) + P\,(X = 8) = 0{,}1488 + 0{,}0331 + 0{,}0046 + 0{,}0004 = 0{,}1869$$

$\boxed{2.-}$ En una nave industrial hay 6 máquinas que trabajan independientemente con un porcentaje de paro del 10 % de tiempo. Calcular:

(1) La probabilidad de que en un momento dado esten paradas la tercera parte de las máquinas.

(2) La probabilidad de que esten paradas al menos la tercera parte de ellas.

Solución:

Sea $X =$ número de máquinas paradas de 6. Se tiene que:

$$X \rightsquigarrow \mathcal{B}\,(6, 0{,}1)$$

(1)

$$P\,(X = 2) = 0{,}0984$$

(2)

$$P\,(X \geq 2) = 1 - P\,(X < 2) = 1 - (P\,(X = 0) + P\,(X = 1)) =$$

$$= 1 - 0{,}3543 - 0{,}5314 = 0{,}1143$$

$\boxed{3.-}$ Si se lanzan dos dados distintos 10 veces, ¿cuál es la probabilidad de que en más de la mitad de las ocasiones se obtenga una suma par de puntos?

Solución:

Sea X = número de veces que los dos dados suman par, y consideremos A = sumar par. Se tiene que $P(A) = 0{,}5$ y por tanto:

$$X \rightsquigarrow \mathcal{B}(10, 0{,}5)$$

Hay que calcular $P(X > 5)$:

$$P(X > 5) = P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) =$$

$$= 0{,}0010 + 0{,}0098 + 0{,}0439 + 0{,}1172 + 0{,}2051 = 0{,}377$$

$\boxed{4.-}$ Hallar la probabilidad de que una familia con 4 hijos tenga:

(1) al menos un niño
(2) ninguna niña
(3) dos niños
(4) a lo más dos niñas.

Solución:

Sea X = número de hijos de una familia y A = ser niño. Se tiene que $P(A) = 0{,}5$, y por tanto:

$$X \rightsquigarrow \mathcal{B}(4, 0{,}5)$$

(1)

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}0625 = 0{,}9375$$

(2)

$$P(X = 4) = 0{,}0625$$

(3)

$$P(X = 2) = 0{,}3750$$

(4)

$$P(X \leq 2) = 0{,}3750 + 0{,}25 + 0{,}0625 = 0{,}6875$$

$\boxed{5.-}$ Una máquina automática dedicada a la fabricación de comprimidos produce comprimidos defectuosos a razón del 1 %.

(1) Si los comprimidos se colocan en tubos de 25, ¿cuál es la probabilidad de que en un tubo todos los comprimidos sean buenos?

(2) Si los tubos se colocan en cajas de 10, cual es la probabilidad de que una caja contengaa los 10 tubos con ningún comprimido defectuoso?

Solución:

(1) Sea X = número de comprimidos defectuosos.Se tiene que $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(25, 0{,}1)$

$$P(X = 0) = \binom{25}{0} \cdot 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^{25} = 0{,}9^{25} = 0{,}0717898$$

(2) Sea ahora $X =$ número de tubos con ningún comprimido defectuoso. Se tiene que $X \rightsquigarrow \mathcal{B}\left(10, 0{,}07179\right)$. Entonces:

$$P\left(X = 0\right) = 0{,}07179^{10} = 3{,}636 \cdot 10^{-12}$$

$\boxed{6.\text{-}}$ En una distribución binomial de parámetros $n = 4$ y p desconocida, encontrar el valor de p que hace que

$$P\left(X \leq 3\right) = 0{,}84$$

Solución:

Se tiene que $X \rightsquigarrow \mathcal{B}\left(4, p\right)$, y sabemos que $P\left(X \leq 3\right) = 0{,}84$. Desarrollamos esta probabilidad:

$$P\left(X \leq 3\right) = P\left(X = 0\right) + P\left(X = 1\right) + P\left(X = 2\right) + P\left(X = 3\right) =$$

$$= \binom{4}{0} p^0 q^4 + \binom{4}{1} pq^3 + \binom{4}{2} p^2 q^2 + \binom{4}{3} p^3 q =$$

$$= q^4 + 4pq^3 + 6p^2q^2 + 4p^3q = 1 - p^4$$

luego

$$1 - p^4 = 0{,}84 \Rightarrow p = \sqrt[4]{0{,}16} = 0{,}63246$$

$\boxed{7.\text{-}}$ En un grupo de 10 alumnos de un centro educativo se ha comprobado que cada uno de ellos falta a clase el 5 % de los días. Calcular la probabilidad de que un día determinado:

a) no se registre ninguna ausencia
b) falten a clase más de 5 alumnos
c) no asista a clase ningún alumno
d) falte a clase un único alumno
e) falten a clase menos de 3 alumnos

Solución:

Tenemos $\left\{ \begin{array}{l} n = 10 \\ p = 5\ \% = 0{,}05 \end{array} \right.$

Si llamamos $X =$ número de faltas de asistencia, se tiene que $X \rightsquigarrow \mathcal{B}\left(10, 0{,}05\right)$.

a)

$$P\left(X = 0\right) = 0{,}5987$$

b)

$$P\left(X > 5\right) = P\left(X = 6\right) + P\left(X = 7\right) + P\left(X = 8\right) + P\left(X = 9\right) + P\left(X = 10\right) =$$

$$= 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

c)

$$P(X=10)=0$$

d)

$$P(X=1)=0{,}3151$$

e)

$$P(X<3)=P(X=2)+P(X=1)+P(X=0)=$$

$$=0{,}0746+0{,}3151+0{,}5987=0{,}9884$$

$\boxed{8.\text{-}}$ Una prueba de inteligencia está compuesta por 10 preguntas, cada una de las cuales tiene cuatro respuestas, siendo solo una de ellas correcta. Un alumno tiene prisa por acabar y decide contestar a lo loco, aleatoriamente. Se pide:

a) Probabilidad de acertar exactamente cuatro preguntas
b) Probabilidad de no acertar ninguna
c) Probabilidad de acertar todas
d) Probabilidad de acertar al menos ocho
e) Probabilidad de acertar a lo sumo tres

<u>Solución:</u>

Sea X =número de respuestas correctas. Se tiene que $X \rightsquigarrow \mathcal{B}\left(10, \frac{1}{4}\right) = \mathcal{B}(10, 0{,}25)$ ya que la probabilidad de responder correctamente es $\frac{1}{4}=0{,}25$

a)

$$P(X=4)=0{,}1460$$

b)

$$P(X=0)=0{,}8563$$

c)

$$P(X=10)=0$$

d)

$$P(X<8)=1-P(X\geq 8)=1-(P(X=8)+P(X=9)+P(X=10))=$$

$$=1-0{,}0004-0{,}0001-0=0{,}9995$$

e)

$$P(X\leq 3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)\,P(X=3)=$$

$$=0{,}0563+0{,}1877+0{,}2816+0{,}2503=0{,}7759$$

$\boxed{9.\text{-}}$ Se ha pasado una prueba sobre fluidez verbal a un numeroso grupo de niños de una comarca socialmente deprimida, y se ha detectado que el 35 % tiene una fluidez verbal prácticamente nula; el resto se puede considerar aceptable. De una muestra aleatoria formada por siete niños, hallar:

a) La media y la varianza

b) La función de probabilidad

Solución:

Los datos del ejercicio son: $\left\{ \begin{array}{l} p = 35\ \% = 0{,}35 \\ n = 7 \end{array} \right.$

Si llamamos $X =$ número de respuestas correctas en el test, se tiene que

$$X \rightsquigarrow \mathcal{B}\,(7, 0{,}35)$$

a) $\left\{ \begin{array}{l} EX = np = 7 \cdot 0{,}35 = 2{,}45 \\ Var\,(X) = npq = 7 \cdot 0{,}35 \cdot 0{,}65 = 1{,}5925 \end{array} \right.$

b)

$$P\,(X = r) = \binom{10}{r} \cdot 0{,}35^r \cdot 0{,}65^{10-r} \quad \text{con} \quad r = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$$

$\boxed{10.\text{-}}$ En una manzana de casas hay 10 aparcamientos. En cada aparcamiento puede encontrarse o no un automóvil, con independencia de lo que ocurra en los otros. Si la probabilidad de que un aparcamiento esté ocupado es 0.4. Se pide:

a) Identificar y describir este modelo de probabilidad

b) Calcular la probabilidad de que en cierto día se encuentren 8 automóviles aparcados

Solución:

Los datos del ejercicio son: $n = 10$, $p = 0{,}4$. Llamamos $X =$ número aparcamientos ocupados.

a) * Solo tenemos dos posibilidades: $\left\{ \begin{array}{l} \text{ocupado} \\ \text{no ocupado} \end{array} \right.$

* Los sucesos son independientes

* La probabilidad de que un aparcamiento esté ocupado es $p = 0{,}4$ que es constante

Así, la variable aleatoria anterior tiene el siguiente modelo: $X \rightsquigarrow \mathcal{B}\,(10, 0{,}4)$

b) $P\,(X = 8) = 0{,}0106$

$\boxed{11.\text{-}}$ Una encuesta revela que el 20 % de la población es favorable a un político y el resto es desfavorable. Elegidas 6 personas al azar, se desea saber:

a) La probabilidad de que las 6 personas sean desfavorables.

b) La probabilidad de que las 6 personas sean favorables.

Solución:

Sea $X =$número de personas favorables al político en cuestión. Como $p = 20$ $\% = 0{,}2$ y $n = 6$ se tiene que $X \rightsquigarrow \mathcal{B}\,(6, 0{,}2)$

a)

$$P\,(X = 0) = 0{,}2621$$

b)

$$P(X=6)=0{,}0001$$

$\boxed{12.-}$ Una determinada raza de perros tiene 4 cachorros en cada camada. Si la probabilidad de que un cachorro sea macho es de 0.55, se pide:

a) Calcular la probabilidad de que, en una camada, dos exactamente sean hembras.

b) Calcular la probabilidad de que, en una camada, al menos dos sean hembras.

Solución:

Sea $X =$ número de cachorros macho de una camada. Como $\left\{\begin{array}{l} p=0{,}55 \\ n=4 \end{array}\right.$ se tiene que $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(4, 0{,}55)$.

a)

$$P(X=2)=\binom{4}{2}0{,}55^2 0{,}45^{4-2}=\frac{4!}{2!2!}0{,}55^2 0{,}45^2=6\cdot 0{,}3025\cdot 0{,}2025=0{,}368$$

b)

$$P(X\le 1)=P(X=1)+P(X=0)=$$
$$=\binom{4}{1}0{,}55^1 0{,}45^{4-1}+\binom{4}{2}0{,}55^0 0{,}45^{4-0}=0{,}44651$$

$\boxed{13.-}$ Un jugador de tenis tiene una probabilidad de ganar una partida de 0.25. Si juega cuatro partidos, calcular la probabilidad de que gane más de la mitad.

Solución:

Llamamos $X =$ número de partidas ganadas. Los datos del problema son: $\left\{\begin{array}{l} p=0{,}25 \\ n=4 \end{array}\right.$ y por tanto:

$$X \rightsquigarrow \mathcal{B}(4, 0{,}25)$$

Así

$$P(X>2)=P(X=3)+P(X=4)=0{,}0469+0{,}0039=0{,}0508$$

$\boxed{14.-}$ Si el 20 % de los cerrojos producidos por una máquina son defectuosos, determinar la probabilidad de que de 4 cerrojos elegidos al azar:

a) uno sea defectuoso

b) a lo más, dos sean defectuosos.

Solución:

Llamamos X = número de partidas ganadas. Los datos del problema son: $\begin{cases} p = 0{,}25 \\ n = 4 \end{cases}$ y por tanto:

$$X \rightsquigarrow \mathcal{B}\left(4, 0{,}25\right)$$

Así

$$P\left(X > 2\right) = P\left(X = 3\right) + P\left(X = 4\right) = 0{,}0469 + 0{,}0039 = 0{,}0508$$

$\boxed{15.\text{-}}$ En un torneo de ajedrez, Karpov y Kasparov disputan la final. Gana el que antes gane 5 partidas. Karpov ganó la primera partida, pero Kasparov es igual de bueno que él. ¿Qué probabilidad tiene Karpov de ganar el torneo, sin contar las tablas?.

Solución:

Sean $\begin{cases} K_1 = & \text{gana Karpov (una partida)} \\ K_2 = & \text{gana Kasparov (una partida)} \end{cases}$. Como ambos son igual de buenos,

$$P\left(K_1\right) = P\left(K_2\right) = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

pero no nos dan el número de partidas a disputar, por lo que

$$X \rightsquigarrow \mathcal{B}\left(n, 0{,}5\right)$$

donde X = número de partidas ganadas por Karpov.

La probabilidad que nos piden, dependerá por tanto de n :

$$P\left(X = 4\right) = \binom{n}{4} 0{,}5^4 0{,}5^{n-4} = \frac{n!}{4!\left(n-4\right)!} 0{,}0625 \cdot 0{,}5^{n-4} =$$

$$= \frac{n\left(n-1\right)\left(n-2\right)\left(n-3\right)\left(n-4\right)!}{4!\left(n-4\right)!} 0{,}0625 \cdot 0{,}5^{n-4} =$$

$$= n\left(n-1\right)\left(n-2\right)\left(n-3\right) \cdot 0{,}0026 \cdot 0{,}5^{n-4}$$

$\boxed{15.\text{-}}$ Se lanza una moneda cuatro veces. Calcular la probabilidad de que salgan más caras que cruces.

Solución:

Sea X = número de caras obtenidas en los 4 lanzamientos. Resulta que $X \rightsquigarrow \mathcal{B}\left(4, 0{,}5\right)$. La probabilidad pedida es:

$$P\left(X > 2\right) = P\left(X = 3\right) + P\left(X = 4\right) = 0{,}0005 + 0 = 0{,}0005$$

$\boxed{16.\text{-}}$ La probabilidad de que salga cara con una moneda trucada es 0.45. Se lanza la moneda 7 veces. Calcular la probabilidad de que:

a) Salgan exactamente tres caras.

b) Al menos tres caras.
c) A lo sumo tres caras.

Solución:

Tenemos que $p = 0{,}45$ y $n = 7$, luego si llamamos $X =$ número de caras al lanzar la moneda trucada, $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(7, 0{,}45)$.

a)

$$P(X = 3) = 0{,}2918$$

b)

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(X = 2) - P(X = 1) - P(X = 0) =$$

$$= 1 - 0{,}2140 - 0{,}0872 - 0{,}0152 = 0{,}6836$$

c)

$$P(X \leq 3) = P(X = 3) + P(X = 2) + P(X = 1) + P(X = 0) =$$

$$= 0{,}2918 + 0{,}2140 + 0{,}0872 + 0{,}0152 = 0{,}6082$$

$\boxed{17.\text{-}}$ Un laboratorio afirma que una droga causa efectos secundarios en una proporción de 3 de cada 100 pacientes. Para contrastar esta afirmación, otro laboratorio elige al azar a 5 pacientes a los que aplica la droga. ¿Cuál es la probabilidad de los siguientes sucesos?

a) Ningún paciente tenga efectos secundarios.
b) Al menos dos tengan efectos secundarios.
c) ¿Cuál es el número medio de pacientes que espera el laboratorio que sufran efectos secundarios si se elige 100 pacientes al azar?

Solución:

Los datos son: $\left\{\begin{array}{l} p = 3\ \% = 0{,}03 \\ n = 5 \end{array}\right.$. Si $X =$ número de pacientes con efectos secundarios al tomar la droga, $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(5, 0{,}03)$.

a)

$$P(X = 0) = \binom{5}{0} 0{,}03^0 (1 - 0{,}03)^{5-0} = 1 \cdot 1 \cdot 0{,}8587 = 0{,}8587$$

b)

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - (P(X = 1) + P(X = 0)) =$$

$$= 1 - \binom{5}{1} \cdot 0{,}03^1 \cdot 0{,}97^{5-1} - 0{,}8587 = 0{,}0085$$

c) Ahora $n = 100$, y por tanto $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(100, 0{,}03)$. Así:

$$EX = np = 100 \cdot 0{,}03 = 3$$