Definición: Los números reales que no son racionales se denominan irracionales, es decir, son los números reales que no se pueden escribir en forma de fracción.

Aristóteles (384-322 a.C.) fue el primero que conjeturó que π es irracional, y Johann Heinrich Lambert lo demostró en 1766.
La demostración que aquí se presenta se debe es de 1947 y se debe al matemático estadounidense-canadiense Ivan Morton Niven (1915-1999).

$\boxed{\textbf{Teorema de Lambert, 1766: } \text{El número } \pi \text{ es irracional.}}$

<u>Demostración:</u> (Ivan Niven, 1947)

Supongamos que $\pi = \dfrac{a}{b}$ con $a,b \in \mathbb{Z}$ y $b \neq 0$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ definimos } f(x) = \frac{x^n (a-bx)^n}{n!} \text{ para } x \in \mathbb{R}$$

y

$$F(x) = f(x) + ... + (-1)^j f^{2j)}(x) + ... + (-1)^n f^{2n)}(x)$$

es decir, F es la suma alternada de f y de sus primeras n derivadas pares.

Lema 1: $F(0) = F(\pi)$

<u>Demostración:</u>

Como

$$f(x) = \frac{x^n (a-bx)^n}{n!} = f\left(\frac{a}{b} - x\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

y dado que $\pi = \dfrac{a}{b}$, la regla de la cadena y el principio de inducción implican que

$$f^{i)}(x) = (-1)^j f^{j)}(\pi - x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

para todas las derivadas, luego en particular

$$f^{2j)}(0) = f^{2j)}(\pi) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

C.Q.D.

Lema 2: $F(0) \in \mathbb{Z}$

<u>Demostración:</u>

Usando el binomio de Newton para expandir $(a-bx)^n$ y haciendo un cambio de índice, $j = k + n$, obtenemos:

$$f(x) = \frac{1}{n!} \sum_{j=n}^{2n} \binom{n}{j-n} a^{2n-j} (-b)^{j-n} x^j$$

Dado que los coeficientes de $x^n, x^{n+1}, ..., x^{2n}$ son cero y el grado del polinomio es a lo sumo $2n$, se tiene que:

$$f^{j)}(0) = 0$$

y que

$$f^{j)}(0) = \frac{j!}{n!} \binom{n}{j-n} a^{2n-j} (-b)^{j-n} \quad \forall n \leq j \leq 2n$$

Como $\frac{j!}{n!}\binom{n}{j-n} \in \mathbb{Z}$, se tiene que $f^{j)}(0) \in \mathbb{Z} \quad \forall j$ y por tanto, $F(0) \in \mathbb{Z}$.

C.Q.D.

Lema 3: $F(0) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x$

<u>Demostración:</u>

Como $f^{2n+2)}(0) = 0$, se tiene que F verifica la ecuación diferencial $F'' + F = f$ y por tanto,

$$\left(F'(x)\operatorname{sen} x - F(x)\cos x\right)' = f(x)\operatorname{sen} x$$

luego por el teorema fundamental del Cálculo

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi} f(x)\operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(F'(x)\operatorname{sen} x - F(x)\cos x\right)\Big|_0^{\pi} \underset{[1]}{=} F(0)$$

donde en [1] hemos aplicado el lema 1.

C.Q.D.

Puesto que $f(x) > 0$ y $\operatorname{sen} x > 0$ para $0 < x < \pi$, porque π es el más pequeño positivo que anula la función seno, aplicando los lemas 2 y 3, se tiene que $F(0) \in \mathbb{N}$.

Así,

$$x(\pi - x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \le \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

y $0 \le \operatorname{sen} x \le 1$ para $0 \le x \le \pi$, luego

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi} f(x)\operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x \le \frac{b^n}{n!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1} < 1$$

para n grande.

Aplicando ahora el lema 3, para el n anterior, $F(0) < 1$!! ya que $F(0) \in \mathbb{N}$.

C.Q.D.

Teorema: El conjunto de los números irracionales es no numerable y su cardinal es $c = |\mathbb{R}|$.

Problema abierto: No se sabe si 2^e, 2^{π}, π^e, $e + \pi$ o γ son racionales o irracionales.