Definición: Sea $P(x)=a_nx^n+...+a_1x+a_0\in\mathbb{Z}[x]$. Un número complejo $\omega\in\mathbb{C}$ se denomina algebraico si $P(\omega)=0$, es decir, si es solución de una ecuación polinómica con coeficientes enteros. Los números complejos que no son algebraicos se denominan trascendentes.

Teorema de Liouville, 1844: Existen números trascendentes.

Teorema de Cantor, 1874: El conjunto de los números algebraicos es numerable.

Corolario de Cantor, 1874: El conjunto de los números trascendentes es no numerable.

Teorema de Hermite, 1873: El número e es trascendente.

Demostración:* *(Hermite)
Para cada primo p consideramos el polinomio

$$h_p(x)=\frac{1}{(p-1)!}x^{p-1}(x-1)^p...(x-r)^p\in\mathbb{Q}[x]$$

Claramente, $\deg h_p=(r+1)p-1:=s$, luego las derivadas $h_p^{l)}$ de orden $l>s$, son idénticamente nulas. Pongamos

$$m(k,l)=h_p^{l)}(k) \text{ para } k=0,...,r;\ l=0,...,s$$

Lema: Las funciones $m(l,k)$ verifican:

i) $m(l,k)$ es un entero múltiplo de p para $(k,l)\neq(0,p-1)$

ii) $m(0,p-1)=(-1)^p...(-r)^p$

Demostración:
Distinguimos casos:
Caso $\boxed{k\geq 1}$.Escribamos

$$(p-1)!h_p=gh \text{ con } g=(x-k)^p \text{ y } h=\frac{(p-1)!h_p}{g}\in\mathbb{Z}(x)$$

Derivando esta última igualdad por la regla de Leibniz

$$(p-1)!h_p^{l)}=\sum_{j=1}^{l}\binom{l}{j}g^{j)}h^{l-j)}$$

Ahora bien, es evidente que $g^{j)}(k)=0$ salvo $g^{p)}(k)=p!$, luego

$$(p-1)!h_p^{l)}(k)=\begin{cases}0 & \text{si } l<p\\ \binom{l}{j}p!h^{l-p)}(k) & \text{si } l\geq p\end{cases}$$

Si $l<p$ entonces ya hemos concluido, y si $l\geq p$, entonces

$$h_p^{l)}(k)=p\binom{l}{p}h^{l-p)}(k)$$

y puesto que $h\in\mathbb{Z}[x]$, lo mismo ocurre con los coeficientes de sus derivadas, con lo que $p\binom{l}{p}h^{l-p)}(k)\in\mathbb{Z}$. Así, $m(k,l)=h_p^{l)}(k)$ es un múltiplo entero de p, y con esto hemos demostrado el apartado i) en el caso $k\neq 0$.

Caso $\boxed{k=0}$. Sea

$$(p-1)!h_p = gh \text{ con } g = x^{p-1} \text{ y } h = (x-1)^p \dots (x-r)^p \in \mathbb{Z}(x)$$

De nuevo, derivando

$$(p-1)!h_p = \sum_{j=1}^{l} \binom{l}{j} g^{j)} h^{l-j)}$$

Ahora tenemos que $g^{j)}(0) = 0,$ excepto $g^{p-1)}(0) = (p-1)!$, con lo que

$$(p-1)!h_p^{l)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } \quad l < p-1 \\ \binom{l}{p-1}(p-1)!h^{l-p+1)}(0) & \text{si } \quad l \geq p-1 \end{cases}$$

Si $l < p-1$ hemos terminado, y si $l \geq p-1$ se tiene que

$$h_p^{l)}(0) = \binom{l}{p-1} h^{l-p+1)}(0)$$

Además, como estamos suponiendo que $l \geq p-1$, el polinomio h será de la forma

$$h = \dots + cx^{l-p+1} + \dots \text{ con } c \in \mathbb{Z}$$

(incluso puede ser $c = 0$) donde solo hemos destacado el monomio que nos interesa. Evidentemente,

$$h^{l-p+1)}(0) = (l-p+1)!c$$

y de $h_p^{l)}(0) = \binom{l}{p-1} h^{l-p+1)}(0)$ resulta:

$$h_p^{l)}(0) = \binom{l}{p-1}(l-p+1)!c = \frac{l!}{(p-1)!}c$$

Como $l > p-1$, se tiene que $m(0,l) = h_p^{l)}(0) = p \cdot \dots \cdot l \cdot c$, que es claramente múltiplo de p. Con esto, hemos demostrado el apartado i) para $k = 0$ y $l \neq p-1$.

Vamos a demostrar ahora el apartado ii). Si $l = p-1$, entonces $m(0, p-1) = h_p^{p-1)}(0) = c$ que es en esta hipótesis el término independiente de h. Así,

$$m(0, p-1) = h(0) = (-1)^p \dots (-r)^p$$

C.Q.D.

Por reducción al absurdo, supongamos que e es algebraico sobre $\mathbb{Q}$. Entonces, existirá un polinomio no nulo $g \in \mathbb{Q}[x]$ tal que $g(e) = 0$. Multiplicando por un número entero conveniente, podemos eliminar los denominadores de los coeficientes de g y suponer que $g \in \mathbb{Z}[x]$. Sea

$$g = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_r x^{m-r}$$

con $a_0 \neq 0$ y $a_r \neq 0$. Evidentemente, $g = (a_0 x^r + a_1 x^{r-1} + \dots + a_r) x^{m-r}$, y puesto que $e^{m-r} \neq 0$, concluimos que

$$a_0 e^r + a_1 e^{r-1} + \dots + a_r = 0 \text{ con } a_0, a_r \neq 0,\ a_j \in \mathbb{Z} \qquad [1]$$

Definimos el polinomio

$$H_p = \sum_{l=0}^{s} \frac{\partial^l h_p}{\partial x^l} \in \mathbb{Q}[x] \text{ con } s = rp + p - 1 = \deg h_p$$

Se tiene que

$$\frac{\partial H_p}{\partial x}=\sum_{l=0}^{s}\frac{\partial^{l+1}h_p}{\partial x^{l+1}}=\left[k=l+1\right]=\sum_{k=1}^{s+1}\frac{\partial^{k}h_p}{\partial x^{k}}=\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial^{k}h_p}{\partial x^{k}}$$

puesto que $\frac{\partial^{s+1}h_p}{\partial x^{s+1}}=0$, y así

$$\frac{\partial H_p}{\partial x}=H_p-h_p \quad \text{o bien} \quad h_p=H_p-\frac{\partial H_p}{\partial x} \qquad [2]$$

Consideramos ahora la función real de variable real:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$f(t)=e^{-t}H_p(t)$$

Es una función derivable, y derivando,

$$f'(t)=-e^{-t}H_p(t)+e^{-t}H_p'(t)=-e^{-t}\left(H_p(t)-H_p'(t)\right)$$

Como H_p es un polinomio, su derivada formal coincide con su derivada como función, y teniendo en cuenta [2], resulta:

$$f'(t)=-e^{-t}h_p(t) \quad \forall t\in\mathbb{R}$$

Con esta primitiva, podemos calcular la integral

$$I_k(p)=\int_0^k -e^{-t}h_p(t)\,dt=\int_0^k f'(t)\,dt=f(k)-f(0)=e^{-k}H_p(k)-H_p(0)$$

para $k=0,\dots,r$. Como consecuencia,

$$\delta(p):=\sum_{k=0}^{r}a_k e^k I_k(p)=\sum_{k=0}^{r}a_k e^k\left(e^{-k}H_p(k)-H_p(0)\right)=\sum_{k=0}^{r}a_k H_p(k)-H_p(0)\sum_{k=0}^{r}a_k e^k$$

Teniendo en cuenta [1], $\sum_{k=0}^{r}a_k e^k=0$, con lo que

$$\delta(p)=\sum_{k=0}^{r}a_k H_p(k)$$

Vamos a probar que esta igualdad es imposible para p suficientemente grande, lo que contradiría el que e es algebraico.
Veamos primero que

$$\lim_{p\to+\infty}\delta(p)=0$$

En efecto, por la definición de δ como suma de integrales:

$$\left|\delta(p)\right|\le\sum_{k=0}^{r}\left|a_k e^k I_k(p)\right|=\sum_{k=0}^{r}\left|a_k e^k\right|\left|\int_0^k -e^{-t}h_p(t)\,dt\right|\le\sum_{k=0}^{r}\left|a_k e^k\right|\int_0^k\left|-e^{-t}h_p(t)\right|dt=\sum_{k=0}^{r}\left|a_k e^k\right|\int_0^k\frac{\left|h_p(t)\right|}{\left|e^t\right|}dt$$

Se tiene que $\left|e^t\right|\ge1$ en $[0,r]$ y

$$\left|h_p(t)\right|\le\frac{1}{(p-1)!}r^{p-1}r^p\overset{r)}{\dots}r^p=\frac{r^{(r+1)p-1}}{(p-1)!}\le\frac{n^p}{(p-1)!}:=\varepsilon(p)$$

donde $n=r^{r+1}$, y como consecuencia

$$\left|\delta(p)\right|\le\sum_{k=0}^{r}\left|a_k e^k\right|\int_0^k\varepsilon(p)\,dt=\sum_{k=0}^{r}\left|a_k e^k\right|k\varepsilon(p)=\varepsilon(p)\sum_{k=0}^{r}k\left|a_k e^k\right|$$

Al ser el sumatorio una constante que no depende de p, bastará probar que

$$\lim_{p\to+\infty}\varepsilon(p)=0$$

Tomamos p suficientemente grande ($>n+1$ para ser exactos). Entonces:

$$\varepsilon(p)=\frac{n^p}{(p-1)!}=\frac{n^{n+1}}{n!}\cdot\frac{n}{n+1}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{p-2}\cdot\frac{n}{p-1}$$

y se tiene que:

$$\frac{n}{n+1}\le 1,\ldots,\frac{n}{p-2}\le 1$$

Como consecuencia,

$$0\le\varepsilon(p)\le\frac{n^{n+1}}{n!}\cdot\frac{n}{p-1}=\frac{d}{p-1}$$

donde $d=\frac{n^{n+1}}{n!}\cdot n$ es constante.

Obviamente, $\lim_{p\to+\infty}\frac{d}{p-1}=0$, y eso implica que $\lim_{p\to+\infty}\varepsilon(p)=0$, lo que a su vez implica que $\lim_{p\to+\infty}\delta(p)=0$.

Teniendo en cuenta que $\lim_{p\to+\infty}\delta(p)=0$ y que $\delta(p)=\sum_{k=0}^{r}a_kH_p(k)$, obtenemos:

$$0=\lim_{p\to\infty}\sum_{k=0}^{r}a_kH_k(k)=\lim_{p\to\infty}\sum_{k=0}^{r}a_k\sum_{l=0}^{s}\frac{\partial^l h_p}{\partial x^l}(k)=\lim_{p\to\infty}\sum_{\substack{k=0,\ldots,r\\ l=0,\ldots,s}}a_k\frac{\partial^l h_p}{\partial x^l}(k)=\lim_{p\to\infty}\sum_{\substack{k=0,\ldots,r\\ l=0,\ldots,s}}a_km(k,l)$$

es decir,

$$0=\lim_{p\to\infty}\sum_{\substack{k=0,\ldots,r\\ l=0,\ldots,s}}a_km(k,l)\qquad[3]$$

Aplicando el lema previo,

$$\sum_{\substack{k=0,\ldots,r\\ l=0,\ldots,s}}a_km(k,l)=up+a_0(-1)^p\ldots(-r)^p\ \text{ para cierto } u\in\mathbb{Z}$$

Si p es suficientemente grande ($>|a_0|$ y $>r$, con precisión), entonces p no divide al sumando $a_0(-1)^p\ldots(-r)^p$, y por ello, $up+a_0(-1)^p\ldots(-r)^p$ es un número entero no nulo. Esto significa:

$$\left|\sum_{\substack{k=0,\ldots,r\\ l=0,\ldots,s}}a_km(k,l)\right|=\left|up+a_0(-1)^p\ldots(-r)^p\right|\ge 1$$

y, por tanto,

$$\lim_{p\to\infty}\left|\sum_{\substack{k=0,\ldots,r\\ l=0,\ldots,s}}a_km(k,l)\right|\ge 1$$

Lo que no puede ser, a la vista de [3].

C.Q.D.

Resultados sobre la trascendencia de números:

Teorema: Si α y β son números trascendentes, entonces al menos uno de los números $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$ es trascendente.

Teorema[1]: Cualquier operación algebraica con números algebraicos proporciona un nuevo número algebraico.

Teorema de Lindemann, 1882: El número e^{α} es trascendente para todo número algebraico $\alpha \neq 0$.

Teorema de Lindemann, 1882: El número π es trascendente.

Demostración:
Sabemos que $e^{x+iy} = e^{x}\left(\cos y + i \operatorname{sen} y\right) \quad \forall x+iy \in \mathbb{C}$, luego

$e^{i\pi} = \cos \pi + i \operatorname{sen} \pi = -1$

Así, si $i\pi$ fuera algebraico, $e^{i\pi} = -1$ sería trascendente, lo que es absurdo. Por tanto, $i\pi$ es trascendente, e i es algebraico, luego π es trascendente.

C.Q.D.

Corolario: Si $\alpha \in \mathbb{C} - \{0,1\}$ es un número algebraico, entonces $\log \alpha$ es trascendente.

Teorema de Lindemann-Weierstrass, 1885: Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son números algebraicos linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$, entonces $e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_n}$ son algebraicamente independientes sobre $\mathbb{Q}$, es decir, $\left[\mathbb{Q}\left(e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_n}\right) : \mathbb{Q}\right] = n$.

Corolario: Si $\alpha \in \mathbb{C} - \{0\}$ es un número algebraico, entonces los números e^{α}, $\cos \alpha$, $\operatorname{sen} \alpha$ y $\operatorname{tg} \alpha$ son trascendentes.

Teorema de Gelfond-Schneider, 1934-1935: Si α y β son números algebraicos $\neq 0,1$, y si $\beta \notin \mathbb{Q}$, entonces α^{β} es un número trascendente.

Teorema: Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ un número algebraico e $i \in \mathbb{C}$ la unidad imaginaria. Entonces, $i\alpha$ también es algebraico.

Teorema: Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ dos números algebraicos y $P \in \mathbb{Q}[x,y]$. Entonces, $P(\alpha, \beta)$ es un número algebraico.

Teorema de Thue-Siegel-Roth, 1955: Si $\alpha \in \mathbb{R}$ es algebraico, entonces para cada $\varepsilon > 0$, la inecuación $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}$ solo tiene un número finito de soluciones racionales $\frac{p}{q}$.

---

[1] Enunciado formal: Sea E/K una extensión de cuerpos, y $L \subset E$ el conjunto de los elementos algebraicos sobre K. Se tiene que:

i) $L \subset K(L)$

ii) $K(L)/L$ es algebraica (y, por tanto, $K(L) \subset L$)

Como consecuencia, el conjunto L es un cuerpo (cierre algebraico de K en E).

Corolario (Criterio de trascendencia): Si para algún $\varepsilon > 0$ hay infinitas soluciones racionales, el número $\alpha \in \mathbb{R}$ es trascendente.

Limitación del criterio de Thue-Siegel-Roth: El conjunto de números trascendentes que pueden ser identificados por el criterio de Thue-Siegel-Roth es un conjunto de medida (de Lebesgue) nula.

Conjetura de Schanuel, $\sim$ 1960: Sean $z_1, ..., z_n \in \mathbb{C}$ linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$. Entonces, $\left[\mathbb{Q}\left(z_1, ..., z_n, e^{z_1}, ..., e^{z_n}\right) : \mathbb{Q}\right] \geq n$.