Definición: Sea $P(x)=a_n x^n+...+a_1x+a_0\in\mathbb{Z}[x]$. Un número complejo $\omega\in\mathbb{C}$ se denomina algebraico si $P(\omega)=0$, es decir, si es solución de una ecuación polinómica con coeficientes enteros. Los números complejos que no son algebraicos se denominan trascendentes.

Teorema de Liouville, 1844: Existen números trascendentes.

Teorema de Cantor, 1874: El conjunto de los números algebraicos es numerable.

Corolario de Cantor, 1874: El conjunto de los números trascendentes es no numerable.

Teorema de Hermite, 1873: El número e es trascendente.

***Demostración:* (Hilbert)**

Sea $k\in\mathbb{N}$ y llamemos $I_k=\int_0^{+\infty}x^ke^{-x}\ \mathrm{d}x$. Integrando por partes, se tiene que

$$I_k=\int_0^{+\infty}x^ke^{-x}\ \mathrm{d}x=\left[-x^ke^{-x}\right]_{x=0}^{x=+\infty}+k\int_0^{+\infty}x^{k-1}e^{-x}\ \mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x^{k-1}e^{-x}\ \mathrm{d}x$$

es decir,

$$I_k=kI_{k-1}=k(k-1)I_{k-2}=...=k!I_0=k!$$

por inducción.

Sea ahora $p(x)\in\mathbb{Z}[x]$ y con término constante $p(0)$. Para $m\geq 0$

$$\int_0^{+\infty}x^mp(x)e^{-x}\ \mathrm{d}x\equiv p(0)m!\big(\mathrm{mod}\,(m+1)!\big)$$

y como consecuencia $\int_0^{+\infty}x^mp(x)e^{-x}\ \mathrm{d}x$ no es igual a cero si $(m+1)$ no divide a $p(0)$.

Supongamos que e es algebraico. Entonces, $\exists a_0,...,a_n\in\mathbb{Z},\ a_0\neq 0$ tales que

$$a_0+a_1e+...+a_ne^n=0 \qquad [1]$$

Sea $r\in\mathbb{N}$ e $I_b^c=\int_b^c x^r\left\{(x-1)(x-2)...(x-n)\right\}^{r+1}e^{-x}\ \mathrm{d}x$ con $0\leq b\leq c\leq+\infty$. Multiplicando [1] por $I_0^{+\infty}$ obtenemos:

$$P_1+P_2=0$$

donde

$$\begin{cases}P_1=a_0I_0^{+\infty}+a_1eI_1^{+\infty}+...+a_ne^nI_n^{+\infty}\\ P_2=\qquad\quad a_1eI_1^0+...+a_ne^nI_0^{+\infty}\end{cases} \qquad [2]$$

Obtendremos una contradicción al demostrar que $\frac{P_1}{r!}$ es un entero distinto de cero, mientras que $\frac{|P_2|}{r!}<1$ para r suficientemente grande.

Haciendo el cambio de variable $y=x-k$ resulta que

$$a_ke^kI_k^{+\infty}=a_k\int_k^{+\infty}x^r\left\{(x-1)...(x-n)\right\}^{r+1}e^{-(x-k)}\ \mathrm{d}x=$$

$$=a_k\int_0^{+\infty}(y+k)^r\left\{(y+k-1)...(y+k-n)^{r+1}\right\}e^{-y}\ \mathrm{d}y=$$

$$=\begin{cases} a_0\int_0^{+\infty} y^r p_0(y)e^{-r}\ \mathrm{d}y & \text{si} \quad k=0 \\ a_0\int_0^{+\infty} y^{r+1} p_k(y)e^{-y}\ \mathrm{d}y & \text{si} \quad 0<k\le n \end{cases}$$

donde $p_0(y),...,p_n(y)\in\mathbb{Z}$.

Por tanto, todos los términos que contribuyen a P_1 en [2] son números enteros y todos estos términos menos el primero son múltiplos de $(r+1)!$. Como consecuencia,

$$P_1\equiv a_0p_0(0)r!\equiv a_0(-1)^{n(r+1)}(n!)^{r+1}r!\big(\operatorname{mod}(r+1)!\big)$$

es decir,

$$P_1\equiv a_0(-1)^{n(r+1)}(n!)^{r+1}r!+q(r+1)! \text{ con } q\in\mathbb{Z}$$

es un múltiplo de $r!$. Además, $P_1=0$ implica que $a_0(-1)^{n(r+1)}(n!)^{r+1}r!+q(r+1)!=0$, pero esto es imposible siempre que $(r+1)$ tenga un factor primo que no divida a $a_0n!$. Por lo tanto, si r es suficientemente grande, entonces $P_1\ne 0$.

Para obtener una cota superior de $|P_2|$, consideramos

$$M=\max_{0\le x\le n}\left|x(x-1)...(x-n)\right| \quad \text{y} \quad N=\max_{0\le x\le n}\left|(x-1)...(x-n)e^{-x}\right|$$

Para $1\le k\le n$

$$\left|a_0I_0^k\right|\le|a_k|\left|\int_0^k M^rN\ \mathrm{d}x=k|a_k|M^rN\right.$$

Como consecuencia,

$$|P_2|\le\left\{|a_1|e+2|a_2|e^2+...+n|a_n|e^n\right\}M^rN$$

y como

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{M^r}{r!}=0$$

se obtiene que

$$|P_2|<r!$$

si r es suficientemente grande.

C.Q.D.

Resultados sobre la trascendencia de números:

Teorema: Si α y β son números trascendentes, entonces al menos uno de los números $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$ es trascendente.

Teorema de Lindemann, 1882: El número e^α es trascendente para todo número algebraico $\alpha\ne 0$.

Corolario: Si $\alpha\in\mathbb{C}-\{0,1\}$ es un número algebraico, entonces $\log\alpha$ es trascendente.

Teorema de Lindemann-Weierstrass, 1885: Si $\alpha_1,...,\alpha_n$ son números algebraicos linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$, entonces $e^{\alpha_1},...,e^{\alpha_n}$ son algebraicamente independientes sobre $\mathbb{Q}$, es decir, $\left[\mathbb{Q}\left(e^{\alpha_1},...,e^{\alpha_n}\right):\mathbb{Q}\right]=n$.

Corolario: $\alpha \in \mathbb{C} - \{0\}$ es un número algebraico, entonces e^{α}, $\cos\alpha$, $\operatorname{sen}\alpha$ y $\operatorname{tg}\alpha$ son trascendentes.

Teorema de Gelfond-Schneider, 1934-1935: Si α y β son números algebraicos $\neq 0,1$, y si $\beta \notin \mathbb{Q}$, entonces α^{β} es un número trascendente.

Teorema: Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ un número algebraico e $i \in \mathbb{C}$ la unidad imaginaria. Entonces, $i\alpha$ también es algebraico.

Teorema: Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ dos números algebraicos y $P \in \mathbb{Q}[x, y]$. Entonces, $P(\alpha, \beta)$ es un número algebraico.

Teorema de Thue-Siegel-Roth, 1955: Si $\alpha \in \mathbb{R}$ es algebraico, entonces para cada $\varepsilon > 0$, la inecuación $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}$ solo tiene un número finito de soluciones racionales $\frac{p}{q}$.

Corolario (Criterio de trascendencia): Si para algún $\varepsilon > 0$ hay infinitas soluciones racionales, el número $\alpha \in \mathbb{R}$ es trascendente.

Limitación del criterio de Thue-Siegel-Roth: El conjunto de números trascendentes que pueden ser identificados por el criterio de Thue-Siegel-Roth es un conjunto de medida (de Lebesgue) nula.

Conjetura de Schanuel, ~ 1960: Sean $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$. Entonces, $\left[\mathbb{Q}\left(z_1, \ldots, z_n, e^{z_1}, \ldots, e^{z_n}\right) : \mathbb{Q}\right] \geq n$.