Definición de derivada de una función en un punto

Definición: Sea $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y $a \in A \cap A'$. Entonces

$$f \text{ es derivable en } x = a \Leftrightarrow \exists \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \in \mathbb{R}$$

o equivalentemente, si

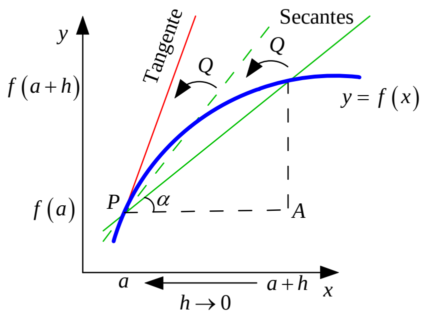
$$\exists \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R}$$

en cuyo caso dicho límite se representa por $f'(a)$.

Interpretación geométrica de la derivada

Sea $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y

$$P = (a, f(a)),\ Q = (a+h, f(a+h))$$



dos puntos de su gráfica. Geométricamente se tiene que

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \operatorname{tg} \alpha = m_{\text{secantes}}$$

que es el valor que mide la pendiente de la recta secante en los puntos P y Q a la curva.

Tomando límites en la igualdad anterior resulta:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \operatorname{tg} \alpha = \lim_{h \to 0} m_{\text{secantes}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{f'(a) = \operatorname{tg} \alpha = m_{\text{secantes}} = m_{\text{tangente}}}$$

es decir, *la derivada de una función en un punto es igual a la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto*.

Operaciones con funciones derivables

Suma $\quad (f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

Producto por un número real $\quad (\alpha f)'(x) = \alpha \cdot f'(x)$

Producto de funciones $\quad (f \cdot g)'(x) = f'(x) g(x) + f(x) g'(x)$

Cociente de funciones $\quad \left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x) g(x) - f(x) g'(x)}{g(x)^2}$

Composición de funciones: regla de la cadena $\quad (g \circ f)'(a) = g'(f(a)) f'(a)$

Derivación logarítmica $\quad f(x)^{g(x)} = \underbrace{g(x) f(x)^{g(x)-1} f'(x)}_{\text{derivada función potencial}} + \underbrace{f(x)^{g(x)} g'(x) \ln f(x)}_{\text{derivada función exponencial}}$

TABLAS DE DERIVADAS

Función	Derivada	Función	Derivada
$y=c\in\mathbb{R}$	$y'=0$	$y=f(x)^n$	$y'=n\cdot f(x)^{n-1}\cdot f'(x)$
$y=x$	$y'=1$	$y=\sqrt{f(x)}$	$y'=\dfrac{f'(x)}{2\cdot\sqrt{f(x)}}$
$y=x^n$	$y'=nx^{n-1}$	$y=\sqrt[n]{f(x)}$	$y'=\dfrac{f'(x)}{n\cdot\sqrt[n]{f(x)^{n-1}}}$
$y=\sqrt{x}$	$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$y=a^{f(x)}$ con $a>0$	$y'=f'(x)\cdot a^{f(x)}\cdot\ln a$
$y=\sqrt[n]{x}$	$y'=\dfrac{1}{n\cdot\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$y=e^{f(x)}$	$y'=f'(x)\cdot e^{f(x)}$
$y=a^x$ con $a>0$	$y'=a^x\ln a$	$y=\log_a f(x)$	$y'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}\cdot\log_a e$
$y=e^x$	$y'=e^x$	$y=\ln f(x)$	$y'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$
$y=\log_a x$	$y'=\dfrac{1}{x}\log_a e$	$y=\operatorname{sen} f(x)$	$y'=f'(x)\cdot\cos f(x)$
$y=\log x$	$y'=\dfrac{1}{x}$	$y=\cos f(x)$	$y'=-f'(x)\cdot\operatorname{sen} f(x)$
$y=\operatorname{sen} x$	$y'=\cos x$	$y=\operatorname{tg} f(x)$	$y'=f'(x)\cdot\left[1+\operatorname{tg}^2 f(x)\right]$
$y=\cos x$	$y=-\operatorname{sen} x$	$y=\operatorname{arcsen} f(x)$	$y'=\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$
$y=\operatorname{tg} x$	$y'=1+\operatorname{tg}^2 x$	$y=\arccos f(x)$	$y'=\dfrac{-f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$
$y=\operatorname{arcsen} x$	$y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y=\operatorname{arctg} f(x)$	$y'=\dfrac{f'(x)}{1+f(x)^2}$
$y=\arccos x$	$y'=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$		
$y=\operatorname{arctg} x$	$y'=\dfrac{1}{1+x^2}$		