Definición de función continua en un punto

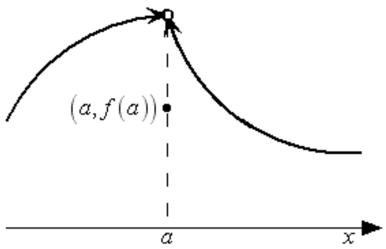
Una función $y = f(x)$, que supondremos definida en un entorno de a, es continua en $a \in \mathrm{Dom}(f)$, cuando

$$f \text{ continua en } a \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Discontinuidades: clasificación

Si una función no es continua en un punto del dominio se dice que es discontinua en dicho punto.

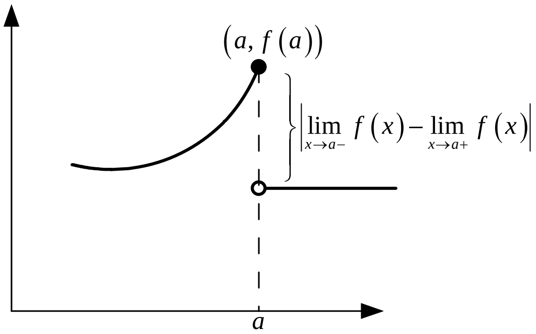
1) Si $\exists \lim_{x \to a} f(x) = L$ y $L \neq f(a)$ entonces se dice que f tiene una **discontinuidad evitable en el punto $x = a$**.



El valor que deberíamos darle a la función en dicho punto para que fuera continua en él se llama valor verdadero de la función en a, y es:

$$f(a) := \lim_{x \to a} f(x)$$

2) Si $\exists \lim_{x \to a-} f(x) = L$, $\exists \lim_{x \to a+} f(x) = L'$ y $L \neq L'$ se dice que f presenta una **discontinuidad de salto o de primera especie en a**.

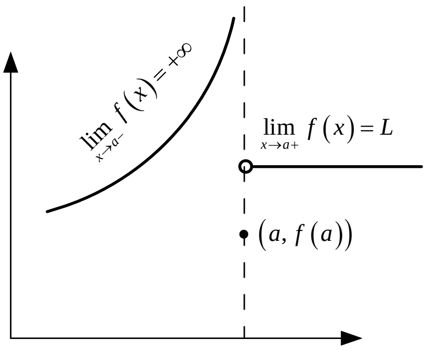


En este caso, el valor

$$\left| \lim_{x \to a-} f(x) - \lim_{x \to a+} f(x) \right|$$

se llama salto de la función en a, y puede ser finito o infinito.

3) Las discontinuidades que no sean ni evitables ni de primera especie se denominan **discontinuidades de segunda especie o esenciales**, es decir, cuando al menos uno de los límites laterales no exista.



Teorema de Bolzano

Teorema de Bolzano: Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$ y en los extremos del intervalo toma valores de signo contrario, entonces $\exists c \in \left]a,b\right[: f(c) = 0$.

Interpretación geométrica: Si $f(a) > 0$ y $f(b) < 0$, y se debe dibujar una curva desde el punto $(a, f(a))$ al punto $(b, f(b))$ sin levantar el lápiz del papel, dicha curva debe cortar, al menos una vez, al eje OX.