POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS

Sean $\begin{cases} x = a_1 + \lambda v_1 \\ y = a_2 + \lambda v_2 \\ z = a_3 + \lambda v_3 \end{cases}$ y $\begin{cases} x = a'_1 + \mu v'_1 \\ y = a'_2 + \mu v'_2 \\ z = a'_3 + \mu v'_3 \end{cases}$ dos rectas y llamemos $M = \begin{pmatrix} v_1 & v'_1 \\ v_2 & v'_2 \\ v_3 & v'_3 \end{pmatrix}$ y $\widetilde{M} = \begin{pmatrix} v_1 & v'_1 & a'_1 - a_1 \\ v_2 & v'_2 & a'_2 - a_2 \\ v_3 & v'_3 & a'_3 - a_3 \end{pmatrix}$. Se pueden presentar las siguientes posiciones relativas:

rango M	rango $\widetilde{M}$	Sistema	Posición relativa
2	3	Incompatible	Se cruzan
2	2	Compatible determinado	Se cortan en un punto
1	2	Incompatible	Son paralelas
1	1	Compatible indeterminado	Son coincidentes

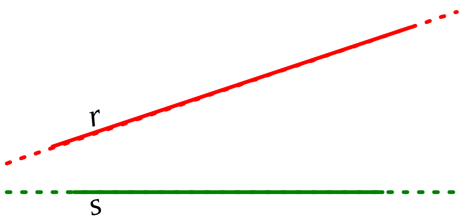
Si las rectas vienen dadas por sus ecuaciones implícitas, entonces:

$$\begin{cases} r \equiv \begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases} \\ s \equiv \begin{cases} A_3 x + B_3 y + C_3 z + D_3 = 0 \\ A_4 x + B_4 y + C_4 z + D_4 = 0 \end{cases} \end{cases}$$

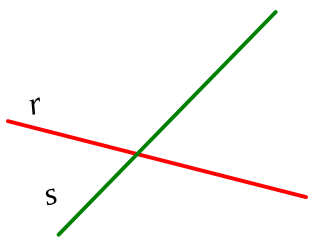
$$M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{pmatrix} \text{ y } \widetilde{M} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{pmatrix}$$

y se pueden presentar las siguientes posiciones relativas:

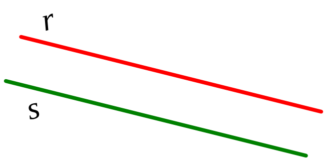
rango M	rango $\widetilde{M}$	Sistema	Posición relativa
3	4	Incompatible	Se cruzan
3	3	Compatible determinado	Se cortan en un punto
2	3	Incompatible	Paralelas
2	2	Compatible indeterminado	Coincidentes



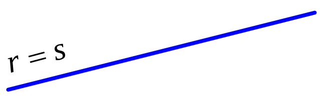
Rectas que se cruzan



Rectas secantes (en un punto)



Rectas paralelas



Rectas coincidentes

Esto, se puede escribir **de otra forma**:

Sean $\overrightarrow{u_r}$ y $\overrightarrow{u_s}$ los vectores directores de las rectas r y s, y P_r y P_s puntos cualesquiera de r y de s respectivamente. Se tiene:

Vectores directores			
Proporcionales		No proporcionales	
$\overrightarrow{u_r} \parallel \overrightarrow{u_s}$		$\overrightarrow{u_r} \nparallel \overrightarrow{u_s}$	
Coincidentes	Paralelas	Secantes	Se cruzan
$\overrightarrow{u_r} \parallel \overrightarrow{P_rP_s}$	$\overrightarrow{u_r} \nparallel \overrightarrow{P_rP_s}$	$\det\left(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{P_rP_s}\right)=0$	$\det\left(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{P_rP_s}\right)\neq 0$

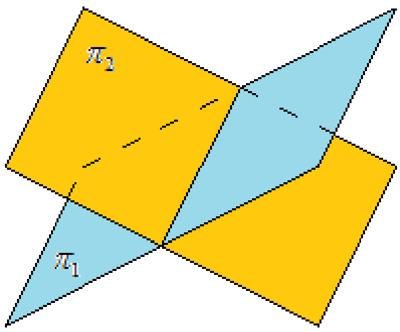
POSICIONES RELATIVAS DE DOS PLANOS

Sean $\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0,\ \pi' \equiv A'x+B'y+C'z+D'=0$ dos planos y llamemos

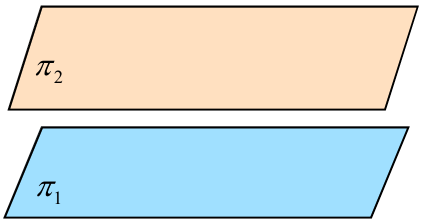
$$M=\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} \text{ y } \widetilde{M}=\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{pmatrix}.$$

Se tienen las siguientes posiciones relativas:

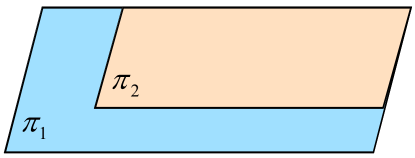
rango M	rango $\widetilde{M}$	Sistema	Posición relativa
2	2	Compatible indeterminado	Se cortan en una recta
1	2	Incompatible	Son paralelos
1	1	Compatible indeterminado	Son coincidentes



Planos secantes (en una recta)



Planos paralelos

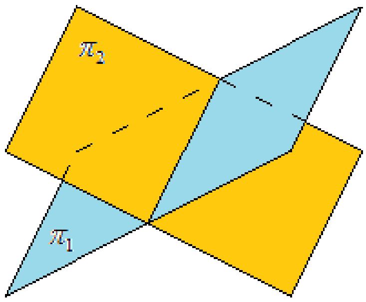


Planos coincidentes

Sean $\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0,\ \pi' \equiv A'x+B'y+C'z+D'=0$ dos planos con vectores normales $\overrightarrow{n_\pi}=(A,B,C)$ y $\overrightarrow{n_{\pi'}}=(A',B',C')$, respectivamente.

Se tienen las siguientes ***posiciones relativas***:

- $\overrightarrow{n_\pi} \nparallel \overrightarrow{n_{\pi'}} \Rightarrow$ Planos secantes (en una recta)
- $\overrightarrow{n_\pi} \parallel \overrightarrow{n_{\pi'}} \Rightarrow \begin{cases} \text{Paralelos: } P\in\pi \Rightarrow P\notin\pi' \\ \text{Coincidentes: } P\in\pi \Rightarrow P\in\pi' \end{cases}$

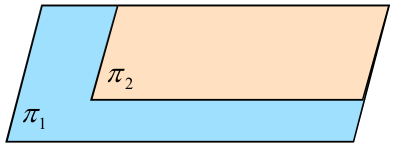


Planos secantes (en una recta)

$$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$$

Planos paralelos

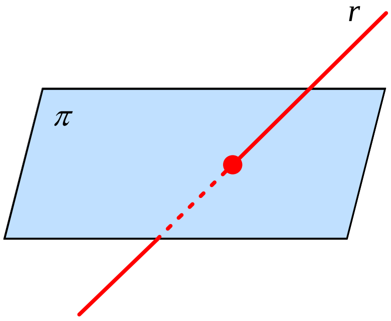
$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$$



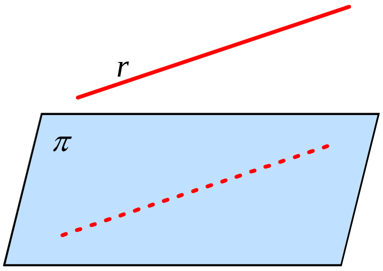
Planos coincidentes

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$$

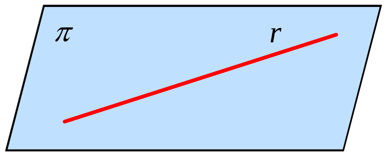
POSICIONES RELATIVAS DE UNA RECTA Y UN PLANO



Recta y plano, secantes
(en un punto)



Recta paralela al plano



Recta contenida en el plano

Si la recta viene dada como intersección de dos planos y el plano a través de su ecuación implícita:

$$\begin{cases} r \equiv \begin{cases} A'x + B'y + C'z + D' = 0 \\ A''x + B_2 y + C''z + D'' = 0 \end{cases} \\ \pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$$

consideramos

$$M = \begin{pmatrix} A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \\ A & B & C \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \widetilde{M} = \begin{pmatrix} A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \\ A & B & C & D \end{pmatrix}$$

y se pueden presentar las siguientes posiciones relativas:

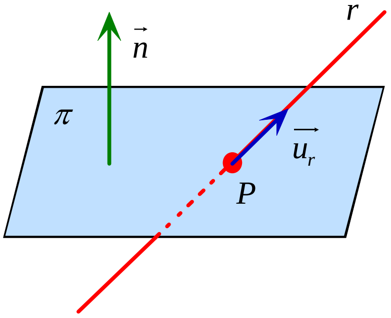
rango M	rango $\widetilde{M}$	Sistema	Posición relativa
3	3	Compatible determinado	Se cortan en un punto
2	3	Incompatible	Son paralelos
2	2	Compatible indeterminado	Recta contenida en el plano

Usando el vector normal al plano, se entiende mucho mejor lo visto en el apartado 13 de la unidad anterior (1ª forma de estudiar la posición relativa de una recta y un plano), y que se puede escribir en la forma:

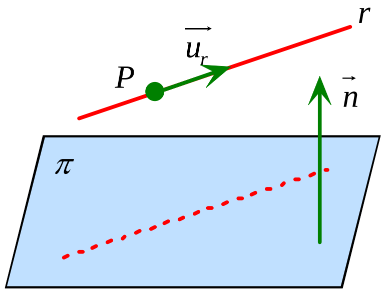
Sea $r \equiv \left\{P, \overrightarrow{u_r}\right\}$ una recta y $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ un plano, con vector normal $\vec{n} = (A, B, C)$.

Se pueden presentar las siguientes ***posiciones relativas***:

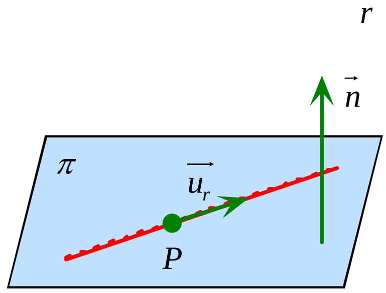
- $\vec{u_r} \not\perp \vec{n} \Leftrightarrow r$ y π se cortan en un punto
- $\vec{u_r} \perp \vec{n} \begin{cases} P \in \pi \Rightarrow r \subset \pi \text{ (} r \text{ contenida en } \pi\text{)} \\ P \notin \pi \Rightarrow r \parallel \pi \text{ (} r \text{ y } \pi \text{ paralelos)} \end{cases}$



Recta y plano, secantes
(en un punto)



Recta paralela al plano



Recta contenida en el plano

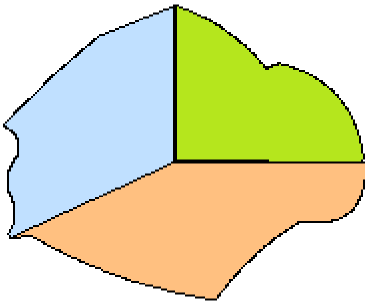
POSICIONES RELATIVAS DE TRES PLANOS

Sean $\begin{cases} \pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0 \\ \pi' \equiv A'x + B'y + C'z + D' = 0 \\ \pi'' \equiv A''x + B''y + C''z + D'' = 0 \end{cases}$ tres planos y consideremos

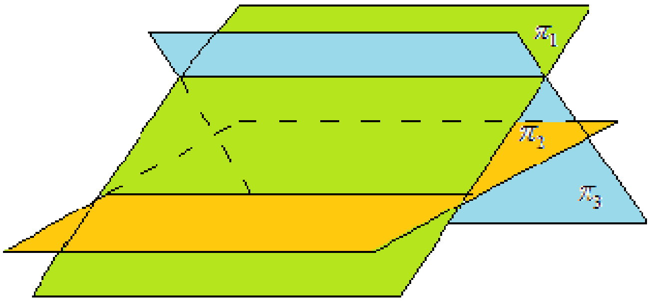
$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix} \text{ y } \widetilde{M} = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix}.$$

Se tienen las siguientes posiciones relativas:

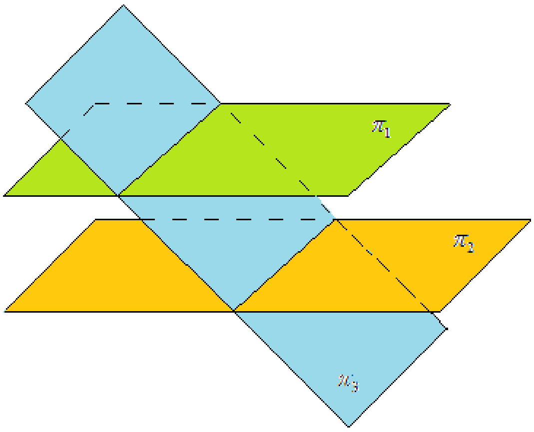
$\text{rg}(M)$	$\text{rg}(\widetilde{M})$	Sistema	Rango de las submatrices de M de orden 2×3	Rango de las submatrices de $\widetilde{M}$ de orden 2×4	Posición relativa
3	---	C.D.	---	---	Secantes en un punto
2	3	I.	2 (todas)	---	Se cortan dos a dos según tres rectas
2	3	I.	1 (una)	---	Dos planos paralelos y el tercero los corta según dos rectas paralelas
2	2	C.I	---	2 (todas)	Distintos y se cortan en una recta
2	2	C.I.	---	1 (una)	Dos planos coinciden y el tercero los corta según una recta
1	2	I.	---	2 (todas)	Paralelos
1	2	I.	---	1 (una)	Dos planos coinciden y el otro es paralelo
1	1	I.	---	---	Coincidentes



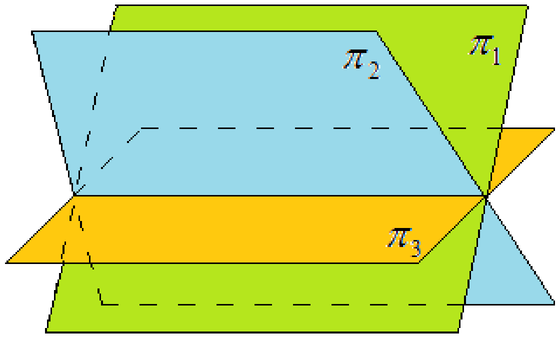
Tres planos secantes en un punto



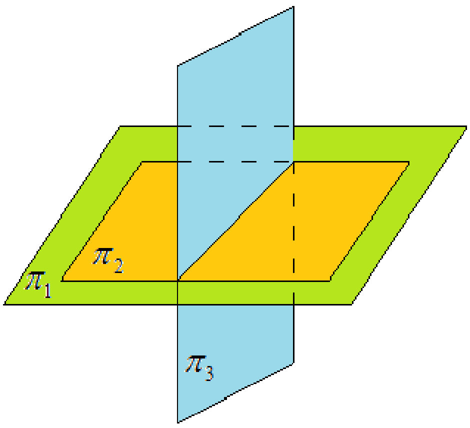
Tres planos secantes dos a dos según 3 rectas



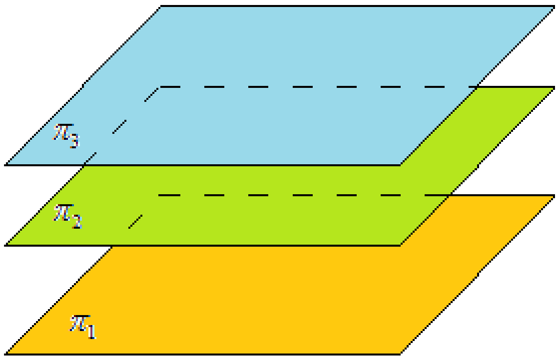
Dos planos paralelos y el tercero los corta según dos rectas



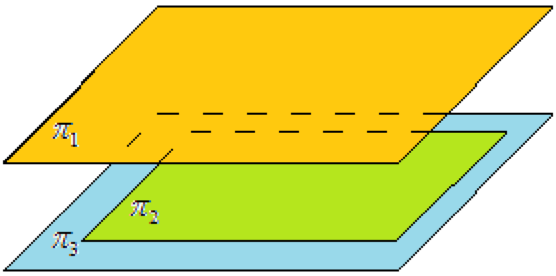
Tres planos distintos, secantes en una recta



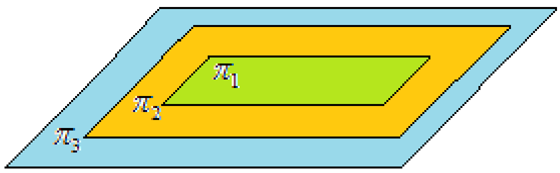
Dos planos coincidentes y el tercero los corta según una recta



Los tres planos son paralelos



Dos planos coinciden y el otro es paralelo



Los tres planos son coincidentes