Aplicaciones del teorema de Bolzano

Teorema de Bolzano: Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$ y en los extremos del intervalo toma valores de signo contrario, entonces $\exists c \in (a,b) : f(c) = 0$.

1. Como aplicación del teorema de Bolzano, razona que la ecuación $x^2 \operatorname{sen} x = \log x$ (donde $\log x$ representa el logaritmo natural de x) tiene al menos una solución.

Solución:

Consideramos la función $h(x) = x^2 \operatorname{sen} x - \log x$, que es continua en $(0,+\infty)$ por ser diferencia de funciones continuas en $(0,+\infty)$.

- h es continua en $(0,+\infty)$, luego en particular, en cualquier intervalo cerrado $[a,b]$ contenido en $(0,+\infty)$.
- $[a,b] = [2,6]$

  $h(2) > 0$

  $h(6) < 0$

Por el teorema de Bolzano, $\exists c \in (2,6)$ tal que $h(c) = 0$, esto es, la ecuación $x^2 \operatorname{sen} x = \log x$ tiene al menos una solución en el intervalo $(2,6)$.

2. Como aplicación del teorema de Bolzano, razona que la ecuación $x^3 + \log x = -\sqrt{x}$ (donde $\log x$ representa el logaritmo natural de x) tiene al menos una solución.

Solución:

Consideramos la función $h(x) = x^3 + \log x + \sqrt{x}$, que es continua en $(0,+\infty)$ por ser suma de funciones continuas en $(0,+\infty)$.

- h es continua en $(0,+\infty)$, luego en particular, en cualquier intervalo cerrado $[a,b]$ contenido en $(0,+\infty)$.
- $[a,b] = [0{,}1\ ,\ 1]$

  $h(0{,}1) < 0$

  $h(1) > 0$

Por el teorema de Bolzano, $\exists c \in (0{,}1\ ,\ 1)$ tal que $h(c) = 0$, esto es, la ecuación $x^3 + \log x = -\sqrt{x}$ tiene al menos una solución en el intervalo $(0{,}1\ ,\ 1)$.

3. ¿Se puede aplicar el teorema de Bolzano a la función $f(x) = x - \log^2 x$ (donde $\log x$ representa el logaritmo natural de x) en el intervalo $[0{,}1\ ,\ 0{,}5]$?

Solución:

La función $f(x) = x - \log^2 x$, que es continua en $(0, +\infty)$ por ser diferencia de funciones continuas en $(0, +\infty)$.

- f es continua en $[0{,}1\ ,\ 0{,}5]$
- $f(0{,}1) < 0$
  $f(0{,}5) > 0$

Por el teorema de Bolzano, $\exists c \in (0{,}1\ ,\ 0{,}5)$ tal que $f(c) = 0$.