REGLA DE L'HÔPITAL PARA $\left[\frac{0}{0}\right]$

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones derivables en un entorno E de a y tales que:

1) $f(a) = g(a) = 0$

2) g' no se anula en E

Si existe el límite finito $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces existe también $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, y, además:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Otras formas de la regla de L'Hôpital:

El esquema

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

es válido para $x \to a,\ x \to a+,\ x \to a-,\ x \to +\infty$ y $x \to -\infty$, tanto si la indeterminación es del tipo $\left[\frac{0}{0}\right]$, como si es de la forma $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, e independientemente de que el límite sea finito o infinito.

Indeterminación $[0\cdot\infty]$: Para transformarla en una de la forma $\left[\frac{0}{0}\right]$ o $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ tendremos en cuenta que:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)g(x)\right] = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

Indeterminación $[\infty-\infty]$: Puede resolverse utilizando la regla de L' Hôpital; para ello, se suelen realizar las operaciones indicadas, obteniéndose indeterminaciones de la forma $\left[\frac{0}{0}\right]$ o $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Indeterminaciones $[\infty^0]$, $[0^0]$ y $[1^\infty]$: Para aplicar la regla de L'Hôpital, las transformamos en la forma $0\cdot\infty$ teniendo en cuenta que:

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} e^{g(x)\cdot \ln f(x)} = e^{\lim_{x\to a} g(x)\cdot \ln f(x)}$$

RESOLUCIÓN DE INDETERMINACIONES

Indeterminación del tipo $\left[\frac{0}{0}\right]$

- Calcula los siguientes límites:

1) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \left[\frac{0}{0}\right]$ (aplicando L'Hôpital) $= \lim_{x\to 1} \frac{2x}{1} = 2$

2) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-5x+4}{x^3-7x^2+12x} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$ (aplicando L'Hôpital) $= \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2x-5}{3x^2-14x+12} = \dfrac{3}{4}$

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$ (aplicando L'Hôpital) $= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{1} = 1$

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^3}{x-\operatorname{sen} x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{6x^2}{1-\cos x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{12x}{\operatorname{sen} x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{12}{\cos x} = \dfrac{12}{1} = 12$

5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4^x-2^x}{\operatorname{sen} 4x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4^x\cdot\log 4 - 2^x\cdot\log 2}{4\cdot\cos 4x} = \dfrac{\log 4-\log 2}{4} = \dfrac{\log\frac{4}{2}}{4} = \dfrac{\log 2}{4}$

6) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^x-e}{x^2-1} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^x}{2x} = \dfrac{e}{2}$

Indeterminación del tipo $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$

- Calculamos los siguientes límites:

1) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^2+2} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{2x^2} = 0$

2) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^2-1}{e^{2x}} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{4x}{e^{2x}\cdot 2} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{4}{e^{2x}\cdot 2\cdot 2} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{e^{2x}} = 0$

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log x}{\operatorname{cotg} x} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{-x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\cdot\operatorname{sen} x\cdot\cos x}{-1} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{-1} = 0$

Indeterminación del tipo $[0\cdot\infty]$

- Calculamos los siguientes límites:

1) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left[\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\cdot\operatorname{tg} x\right] = [0\cdot\infty] = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left[\dfrac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}\right] = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left[\dfrac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}\right] = \left[\dfrac{0}{0}\right] =$

$= \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1}{\frac{-\operatorname{sen} x\cdot\operatorname{sen} x-\cos x\cdot\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}} = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1}{\frac{-\operatorname{sen}^2 x-\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}} = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1}{\frac{-\left(\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x\right)}{\operatorname{sen}^2 x}} =$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\dfrac{-1}{\operatorname{sen}^2 x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{-1} = \frac{1}{-1} = -1$$

2) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \left(\operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{arc\,sen} x\right) = \left[\infty \cdot 0\right] = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{arc\,sen} x}{\dfrac{1}{\operatorname{cotg} x}}\right) = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{arc\,sen} x}{\operatorname{tg} x}\right) = \left[\frac{0}{0}\right] =$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\dfrac{1}{\cos^2 x}}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\cos^2 0}{\sqrt{1}} = \frac{1}{1} = 1$$

Indeterminación del tipo $[\infty - \infty]$

- Calcula los siguientes límites:

1) $\displaystyle \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{e}{e^x - e}\right) = [\infty - \infty] =$

$$= \lim_{x\to 1}\left(\frac{\dfrac{\frac{1}{e}}{e^x - e} - \dfrac{\frac{1}{1}}{x-1}}{\dfrac{1}{\frac{1}{x-1}\cdot\frac{e}{e^x-e}}}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{\dfrac{e^x - e}{e} - \dfrac{x-1}{1}}{\dfrac{(x-1)\cdot(e^x - e)}{e}} = \lim_{x\to 1} \frac{\dfrac{e^x - e - e\cdot(x-1)}{e}}{\dfrac{(x-1)\cdot(e^x - e)}{e}} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{e^x \cancel{-e} - e\cdot x \cancel{+e}}{x\cdot e^x - e\cdot x - e^x + e} = \lim_{x\to 1} \frac{e^x - e\cdot x}{x\cdot e^x - e\cdot x - e^x + e} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1} \frac{e^x - e}{1\cdot e^x + x\cdot e^x - e - e^x} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{e^x - e}{x\cdot e^x - e} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1} \frac{e^x}{1\cdot e^x + x\cdot e^x} = \lim_{x\to 1} \frac{e^x}{e^x + x\cdot e^x} = \lim_{x\to 1} \frac{e^x}{e^x\cdot(1+x)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{(1+x)\cdot} = \frac{1}{2}$$

Nota: La mayoría de las veces no es necesario realizar esa transformación. Operando convenientemente transformamos la indeterminación del tipo $[\infty - \infty]$ en otra del tipo $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

2) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}\right) = [\infty - \infty] =$ (operando, se transforma en una indeterminación del tipo $\left[\dfrac{0}{0}\right]$)

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x - x}{x\cdot\operatorname{sen} x}\right) = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x - 1}{1\cdot\operatorname{sen} x + x\cdot\cos x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x - 1}{\operatorname{sen} x + x\cdot\cos x}\right) = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x + 1\cdot\cos x - x\cdot\operatorname{sen} x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x + \cos x - x\cdot\operatorname{sen} x}\right) = \frac{0}{2} = 0$$

3) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\log x}-\frac{1}{x-1}\right)=\left[\infty-\infty\right]=\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x-1-\log x}{(x-1)\cdot\log x}\right)=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\log x+\frac{1}{x}\cdot(x-1)}=$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x\cdot\log x+x-1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\cdot\log x+x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x+x\cdot\frac{1}{x}+1}=\frac{1}{0+1+1}=\frac{1}{2}$$

Indeterminación del tipo $\left[1^{\infty}\right]$

- Calculamos los siguientes límites:

1) $\lim\limits_{x\to 1}x^{1/1-x}=\left[1^{\infty}\right]$

Supongamos que $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}=M$ $\Rightarrow$ Tomando logaritmos, se tiene que:

$\log\left[\lim\limits_{x\to 1}(x)^{\frac{1}{1-x}}\right]=\log M$ $\Rightarrow$ aplicando las propiedades de los límites:

$\log\left[\lim\limits_{x\to 1}(x)^{\frac{1}{1-x}}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\left[\log(x)^{\frac{1}{1-x}}\right]$ $\Rightarrow$ aplicando las propiedades de los logaritmos:

$\lim\limits_{x\to 1}\left[\log(x)^{\frac{1}{1-x}}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\left[\left(\frac{1}{1-x}\right)\cdot\log x\right]=\left[\infty\cdot 0\right]$ (operando) $=\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{\log x}{1-x}\right)=\left[\frac{0}{0}\right]=$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\frac{1}{x}}{-1}\right)=\lim_{x\to 1}\left(-\frac{1}{x}\right)=-1$$

Luego, $\log M=-1 \quad\Rightarrow\quad M=e^{-1}=\frac{1}{e}$

Por tanto, $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}=e^{-1}=\frac{1}{e}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{x}=\left[1^{\infty}\right]$

Llamamos $M=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{x}$

Tomando logaritmos neperianos:

$$\log M=\log\left\{\lim_{x\to\infty}\left[\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{x}\right\}$$

Aplicando las propiedades de los límites:

$$\log\left\{\lim_{x\to\infty}\left[\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{x}\right\}=\lim_{x\to\infty}\left\{\log\left[\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{x}\right\}$$

Aplicando las propiedades de los logaritmos: $\log A^{B}=B\cdot\log A$

$$\lim_{x\to\infty}\left\{\log\left[\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{x}\right\}=\lim_{x\to\infty}\left\{x\cdot\log\left[\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]\right\}=[\infty\cdot 0]$$

Transformamos esta indeterminación en una del tipo $\left[\frac{0}{0}\right]$ o $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ mediante el cambio:

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\ [0\cdot\infty]\ \text{o}\ [\infty\cdot 0]=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}\right]=\left[\frac{0}{0}\right]\ \text{o}\ \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{\log\left[\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]}{\frac{1}{x}}\right\}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{\frac{-\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}}{-\frac{1}{x^2}}\right\}=\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{-\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{\cancel{x^2}}\right)}{-\frac{1}{\cancel{x^2}}\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right)}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[-\operatorname{tg}\left(\frac{1}{x}\right)\right]=-\operatorname{tg}0=0\quad\Rightarrow\quad\log M=0\quad\Rightarrow\quad M=e^0=1$$

Luego, $\lim_{x\to\infty}\left[\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{x}=1$

Indeterminación del tipo $\left[\infty^0\right]$

Se resuelven también aplicando logaritmos neperianos.

- Calculamos los siguientes límites:

1) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[(\operatorname{tg}x)^{\cos x}\right]=\left[\infty^0\right]$

Llamamos $M=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[(\operatorname{tg}x)^{\cos x}\right]$

Tomando logaritmos neperianos:

$$\log M=\log\left\{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[(\operatorname{tg}x)^{\cos x}\right]\right\}$$

Aplicando las propiedades de los límites:

$$\log\left\{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[(\operatorname{tg}x)^{\cos x}\right]\right\}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\log\,(\operatorname{tg}x)^{\cos x}\right]$$

Aplicando la propiedad de los logaritmos: $\log A^B=B\cdot\log A$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\log\,(\operatorname{tg}x)^{\cos x}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\cos x\cdot\log\,(\operatorname{tg}x)\right]=[0\cdot\infty]$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\log(\operatorname{tg} x)}{\frac{1}{\cos x}} \right] = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg} x}}{\frac{0\cdot\cos x - 1\cdot(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}} \right] = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg} x}}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}} \right] =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\frac{1}{\cos^2 x\cdot\operatorname{tg} x}}{\frac{\operatorname{tg} x}{\cos x}} \right] = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\cos x}{\cos^2 x\cdot\operatorname{tg}^2 x} \right] = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\cos x}{\frac{\cos^2 x\cdot\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}} \right] = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} \right] = \frac{0}{1} = 0$$

$\Rightarrow \quad \log M = 0 \quad \Rightarrow \quad M = e^0 = 1$

Luego, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left[(tg\, x)^{\cos x} \right] = 1$

2) $\lim_{x\to\infty} \left[\left(2^x - 1\right)^{\frac{2}{x+1}} \right] = \left[\infty^0\right]$

Llamamos $M = \lim_{x\to\infty} \left[\left(2^x - 1\right)^{\frac{2}{x+1}} \right] =$

Tomando logaritmos neperianos:

$\log M = \log \left\{ \lim_{x\to\infty} \left[\left(2^x - 1\right)^{\frac{2}{x+1}} \right] \right\}$

Aplicando las propiedades de los límites:

$\log \left\{ \lim_{x\to\infty} \left[\left(2^x - 1\right)^{\frac{2}{x+1}} \right] \right\} = \lim_{x\to\infty} \left[\log \left(2^x - 1\right)^{\frac{2}{x+1}} \right]$

Aplicando la propiedad de los logaritmos: $\log A^B = B\cdot\log A$

$$\lim_{x\to\infty} \left[\log\left(2^x - 1\right)^{\frac{2}{x+1}} \right] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{2}{x+1}\cdot\log\left(2^x - 1\right) \right] = [0\cdot\infty]$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left[\frac{\log\left(2^x - 1\right)}{\frac{1}{\frac{2}{x+1}}} \right] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{\log\left(2^x - 1\right)}{\frac{x+1}{2}} \right] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{2\cdot\log\left(2^x - 1\right)}{x+1} \right] = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left[\frac{2\cdot 2^x\cdot\log 2}{2^x - 1} \right] = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{2\cdot\log 2\cdot 2^x\cdot\log 2}{2^x\cdot\log 2} \right] = 2\cdot\log 2 = \log 2^2 = \log 4$$

$\Rightarrow \quad \log M = \log 4 \quad \Rightarrow \quad M = 4$

Luego, $M = \lim_{x\to\infty} \left[\left(2^x - 1\right)^{\frac{2}{x+1}} \right] = 4$

Indeterminación del tipo $\left[0^0\right]$

Se resuelven también tomando logaritmos neperianos.

- Calculamos los siguientes límites:

1) $\lim\limits_{x \to 0} (\operatorname{sen} x)^x = 0^0$

Llamamos $M = \lim\limits_{x \to 0} (\operatorname{sen} x)^x$

Tomando logaritmos neperianos:

$$\log M = \log \left[\lim_{x \to 0} (\operatorname{sen} x)^x \right]$$

Aplicando las propiedades de los límites:

$$\log \left[\lim_{x \to 0} (\operatorname{sen} x)^x \right] = \lim_{x \to 0} \left[\log (\operatorname{sen} x)^x \right]$$

Aplicando la propiedad de los logaritmos: $\log A^B = B \cdot \log A$

$$\lim_{x \to 0} \left[\log (\operatorname{sen} x)^x \right] = \lim_{x \to 0} \left[x \cdot \log (\operatorname{sen} x) \right] = \left[0 \cdot (-\infty) \right]$$

Transformamos esta indeterminación en una del tipo $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$ mediante el siguiente cambio:

$$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{\log(\operatorname{sen} x)}{\frac{1}{x}} \right] = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \to 0} \left[\frac{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}{\frac{-1}{x^2}} \right] = \lim_{x \to 0} \left[\frac{x^2 \cdot \cos x}{-\operatorname{sen} x} \right] = \left[\frac{0}{0} \right]$$

Nota: $D\left[\frac{1}{x} \right] = D\left[x^{-1} \right] = -1 \cdot x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{2x \cdot \cos x + x^2 \cdot (-\operatorname{sen} x)}{-\cos x} \right] = \frac{0}{-1} = 0 \Rightarrow \quad \log M = 0 \quad \Rightarrow \quad M = e^0 = 1$$

Luego, $M = \lim\limits_{x \to 0} (\operatorname{sen} x)^x = 1$

2) $\lim\limits_{x \to 0} x^{\log(2 - e^x)} = \left[0^0 \right]$

Llamamos

$$M = \lim_{x \to 0} x^{\log(2 - e^x)}$$

Tomando logaritmos neperianos:

$$\log M = \log \left[\lim_{x \to 0} x^{\log(2 - e^x)} \right]$$

Aplicando las propiedades de los límites:

$$\log \left[\lim_{x \to 0} x^{\log(2 - e^x)} \right] = \lim_{x \to 0} \left[\log x^{\log(2 - e^x)} \right]$$

Aplicando la propiedad de los logaritmos: $\log A^B = B \cdot \log A$

$$\lim_{x \to 0} \left[\log x^{\log(2 - e^x)} \right] = \lim_{x \to 0} \left[\log(2 - e^x) \cdot \log x \right] = \left[0 \cdot (-\infty) \right]$$

Transformamos esta indeterminación en una del tipo $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$ mediante el siguiente cambio:

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{\log x}{\dfrac{1}{\log\left(2-e^x\right)}}\right] = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{\dfrac{-(-e^x)}{2-e^x}}{\log^2\left(2-e^x\right)}}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{e^x}{\left(2-e^x\right)\cdot\log^2\left(2-e^x\right)}}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{\left(2-e^x\right)\cdot\log^2\left(2-e^x\right)}{x\cdot e^x}\right] = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{-e^x\cdot\log^2\left(2-e^x\right)+\cancel{\left(2-e^x\right)}\cdot 2\cdot\log\left(2-e^x\right)\cdot\dfrac{\left(-e^x\right)}{\cancel{\left(2-e^x\right)}}}{e^x+x\cdot e^x}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{-e^x\cdot\log^2\left(2-e^x\right)-2\cdot e^x\cdot\log\left(2-e^x\right)}{e^x+x\cdot e^x}\right] = \frac{-1\cdot\log^2 1-2\cdot\log^2 1}{1+0} = \frac{0}{1} = 0$$ ya que $\log(1)=0$

$\Rightarrow \quad \log M = 0 \quad \Rightarrow \quad M = e^0 = 1$

Luego,

$$M = \lim_{x\to 0} x^{\log\left(2-e^x\right)} = 1$$

3) $\lim\limits_{x\to \pi} \left(1-\cos 2x\right)^{\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}} = \left[0^0\right]$ (para finalizar uno difícil)

Llamamos $M = \lim\limits_{x\to \pi} \left(1-\cos 2x\right)^{\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}}$

Tomando logaritmos neperianos:

$$\log M = \log\left\{\lim_{x\to \pi} \left(1-\cos 2x\right)^{\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}}\right\}$$

Aplicando las propiedades de los límites:

$$\log\left\{\lim_{x\to \pi} \left(1-\cos 2x\right)^{\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}}\right\} = \lim_{x\to \pi}\left[\log\left(1-\cos 2x\right)^{\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}}\right]$$

Aplicando la propiedad de los logaritmos: $\log A^B = B\cdot\log A$

$$\lim_{x\to \pi}\left[\log\left(1-\cos 2x\right)^{\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}}\right] = \lim_{x\to \pi}\left[\frac{1}{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}\cdot\log\left(1-\cos 2x\right)\right] = \left[0\cdot(-\infty)\right]$$

Transformamos esta indeterminación en una del tipo $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$:

$$= \lim_{x\to\pi}\left[\frac{\log\left(1-\cos 2x\right)}{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}\right] = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\pi}\left[\frac{\dfrac{\operatorname{sen} 2x\cdot(2)}{1-\cos 2x}}{\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x}{2}}\cdot\dfrac{1}{2}}\right] = \lim_{x\to\pi}\left[\frac{4\cdot\operatorname{sen} 2x\cdot\cos^2\dfrac{x}{2}}{1-\cos 2x}\right] = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to\pi}\left[\frac{8\cdot\cos 2x\cdot\cos^2\dfrac{x}{2} + 2\cdot\cos\dfrac{x}{2}\cdot\left(-\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)\cdot 4\cdot\operatorname{sen} 2x}{2\cdot\operatorname{sen} 2x}\right] =$$

$$= \lim_{x\to\pi}\left[\frac{8\cdot\cos 2x\cdot\cos^2\dfrac{x}{2} - 4\cdot\cos\dfrac{x}{2}\cdot\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}\cdot\operatorname{sen} 2x}{2\cdot\operatorname{sen} 2x}\right] = \text{(operando)}$$

$$\cos\frac{x}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} = \sqrt{\frac{(1+\cos x)\cdot(1-\cos x)}{4}} = \sqrt{\frac{1-\cos^2 x}{4}} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2 x}{4}} = \frac{\operatorname{sen} x}{2}$$

$$= \lim_{x\to\pi}\left[\frac{8\cdot\cos 2x\cdot\cos^2\dfrac{x}{2} - 4\cdot\dfrac{\operatorname{sen} x}{2}\cdot\operatorname{sen} 2x}{2\cdot\operatorname{sen} 2x}\right] = \lim_{x\to\pi}\left[\frac{8\cdot\cos 2x\cdot\cos^2\dfrac{x}{2} - 2\cdot\operatorname{sen} x\cdot\operatorname{sen} 2x}{2\cdot\operatorname{sen} 2x}\right] =$$

$$= \lim_{x\to\pi}\left[\frac{4\cdot\cos 2x\cdot\cos^2\dfrac{x}{2} - \operatorname{sen} x\cdot\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} 2x}\right] = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to\pi}\left[\frac{-8\cdot\operatorname{sen} 2x\cdot\cos^2\dfrac{x}{2} + 2\cdot\cos\dfrac{x}{2}\cdot\left(-\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}\right)\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot\cos 2x - \cos x\cdot\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} x\cdot\cos 2x\cdot(2)}{2\cdot\cos 2x}\right] = 0$$

$\Rightarrow \quad \log M = 0 \quad \Rightarrow \quad M = e^0 = 1$

Luego, $M = \lim\limits_{x\to\pi}\left(1-\cos 2x\right)^{\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}} = 1$