

FUNCIONES Y GRÁFICAS

INTRODUCCIÓN: EJEMPLOS

Una **función** es una correspondencia (relación) entre dos conjuntos (magnitudes...) numéricos, de forma que a cada elemento del primer conjunto le corresponde **un único** elemento del segundo conjunto.

Ejemplos:

- 1) Si 1 botella de agua cuesta 60 cent., entonces 2 botellas nos costarán $2 \cdot 60 = 120$ cent., y si compramos 3 botellas nos costarán $3 \cdot 60 = 180$ cent. ... Es decir, existe una relación entre el número de botellas que compramos y el precio que pagamos. Esta relación la podemos describir mediante una tabla como la que sigue:

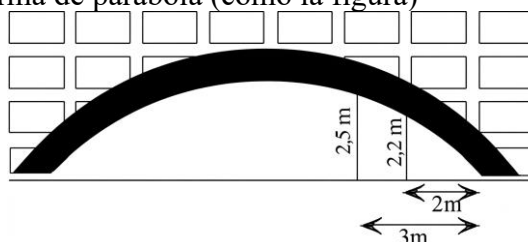
Nº de botellas	1	2	3	4
Precio (en cent.)	60	120	180	240

Ahora bien, si llamamos x al número de botellas que compramos e y al precio que pagamos por ellas, la relación que hay entre estas dos magnitudes (variables) es:

$$y = 60x$$

(como el precio depende del número de botellas, también se suele escribir $p(x)$).

- 2) Los túneles tienen forma de parábola (como la figura)



Si estudiamos la relación que hay entre la distancia entre uno de los extremos (en metros) y la altura (también en metros), obtenemos la siguiente tabla:

Distancia (en m)	0	2	3	...
Altura (en m)	0	2,2	2,5	...

Esta relación también la podemos escribir mediante una expresión algebraica (aunque por ahora no nos interesa cómo obtenerla). Dicha expresión algebraica es:

$$h(x) = -\frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{3}x$$

donde $h(x)$ es la altura (en función de la distancia a uno de los extremos) y x es la distancia del extremo al punto considerado.

- 3) Cuando hablamos de velocidad, decimos que vamos a 50 km/h, a 100 km/h, ... ¿Qué nos dice esto? Pues simplemente, que recorreremos 50 km en 1 h, o que recorreremos 100 km en 1 hora, ... Para centrar ideas, vamos a suponer que queremos recorrer 100 km, y vamos a ver que relación hay entre la velocidad y el tiempo empleado en recorrer dicha distancia. Los datos los recogemos en la siguiente tabla:

Velocidad (en km/h)	100	50	25	10
Tiempo (en h)	1	2	4	10

La expresión algebraica de esta relación es la siguiente: $v(t) = \frac{100}{t}$

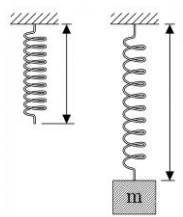
donde $v(t)$ es la velocidad, y t el tiempo.

En general, la relación que hay entre la velocidad, el espacio y el tiempo, es la siguiente:

$$\text{velocidad} = \frac{\text{espacio}}{\text{tiempo}} \Leftrightarrow v = \frac{e}{t}$$

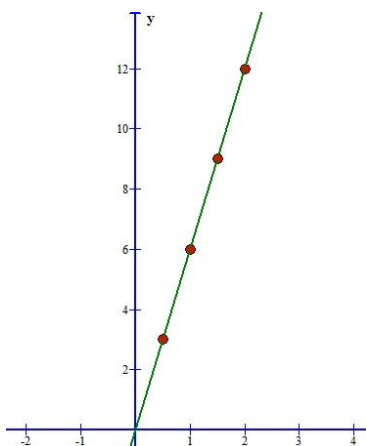
(es decir, la velocidad depende del espacio que se recorre y del tiempo que se emplea en recorrerlo).

- 4) Si colgamos una masa al final de un muelle, la longitud de éste aumenta. Los datos obtenidos en el experimento son los siguientes:



Masa (kg)	Alargamiento (cm)
0,5	3
1,0	6
1,5	9
2,0	12

Representamos gráficamente los datos de la tabla:



Vemos que la representación gráfica es la de una recta, es decir, hay una relación (correspondencia) lineal entre la masa y el alargamiento. La expresión algebraica de esta función es:

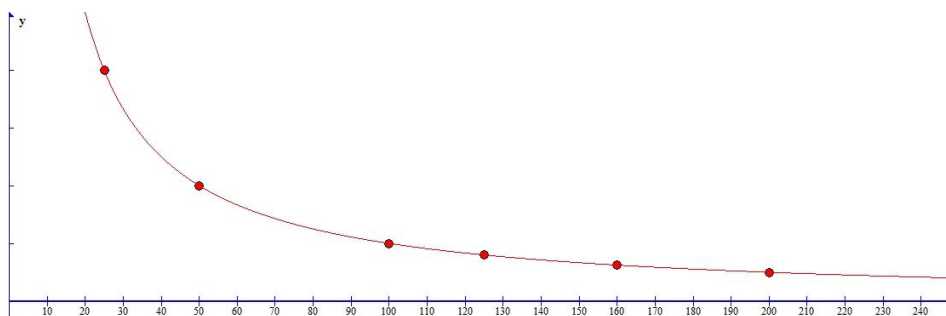
$$a(m) = 6m$$

donde hemos llamado $a(m)$ al alargamiento (hemos puesto entre paréntesis la masa m , para indicar que dicho alargamiento depende de la masa que colguemos del muelle).

- 5) La siguiente tabla recoge el volumen que ocupa un gas en función de su presión:

V (cm ³)	200	160	125	100	50	25
p (atm)	1	1,25	1,6	2	4	8

La representación gráfica de esta tabla es:



La función asociada a esta gráfica es

$$V = \frac{200}{p}$$

que es una función de proporcionalidad inversa.

ALGUNAS FUNCIONES ELEMENTALES Y SU REPRESENTACIÓN

Funciones lineales

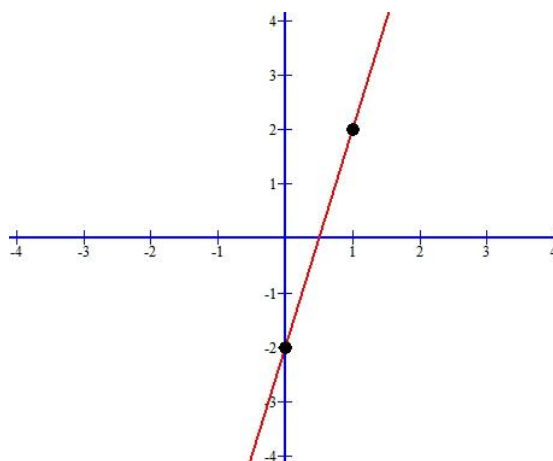
Son de la forma $y = ax + b$ donde a y b son números reales.

Geométricamente representan **rectas**, y para dibujarlas basta con construir una tabla de valores con dos valores.

Ejemplo:

$$y = 4x - 2$$

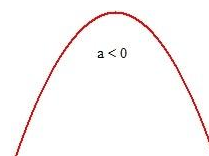
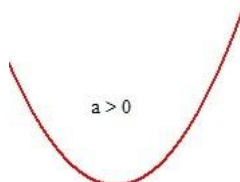
x	y
0	-2
1	2



Funciones cuadráticas

Son de la forma $y = ax^2 + bx + c$ donde a , b y c son números reales y $a \neq 0$.

Geométricamente representan **parábolas**, que tienen la forma



y para dibujarlas distinguimos dos casos:

Caso 1: La parábola corta al eje OX

Calculamos el **vértice**: $V(x, y) \begin{cases} x = \frac{-b}{2a} \\ y = \text{sustituir } x \text{ en la función} \end{cases}$

Calculamos los **puntos de corte con el eje X** resolviendo la ecuación $0 = ax^2 + bx + c$.

Ejemplo:

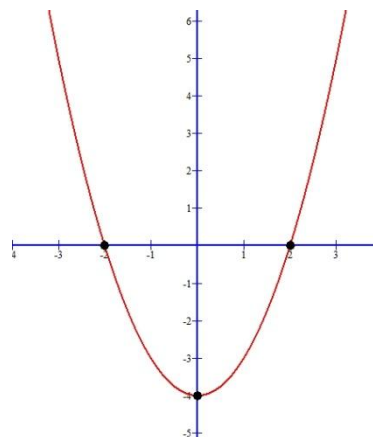
$$y = x^2 - 4$$

Vértice

$$V(x, y) \begin{cases} x = \frac{-b}{2a} = \frac{-0}{2 \cdot 1} = 0 \\ y = 0^2 - 4 = -4 \end{cases} \rightarrow V(0, -4)$$

Puntos de corte con el eje X

$$0 = x^2 - 4 \rightarrow x = \begin{cases} 2 \\ -2 \end{cases} \rightarrow (2, 0) \text{ y } (-2, 0)$$



Caso 2: La parábola no corta al eje OX (salvo tal vez en el vértice)

Calculamos el **vértice**: $V(x, y) \begin{cases} x = \frac{-b}{2a} \\ y = \text{sustituir } x \text{ en la función} \end{cases}$

Construimos una **tabla de valores**, con dos valores a la izquierda del vértice y dos valores a la derecha.

Ejemplo:

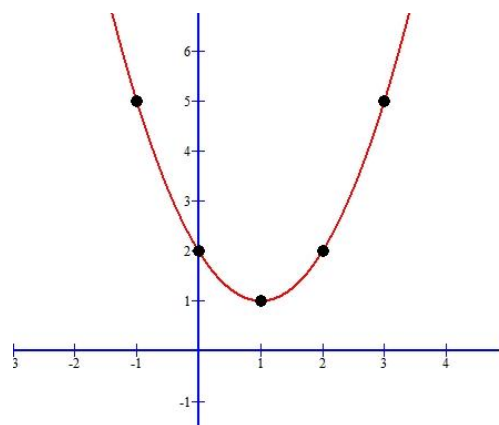
$$y = x^2 - 2x + 2$$

Vértice

$$V(x, y) \begin{cases} x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2 \cdot 1} = 1 \\ y = 1^2 - 2 \cdot 1 + 2 = 1 \end{cases} \rightarrow V(1, 1)$$

Tabla de valores

x	y
0	2
-1	5
2	2
3	5



Funciones de proporcionalidad inversa

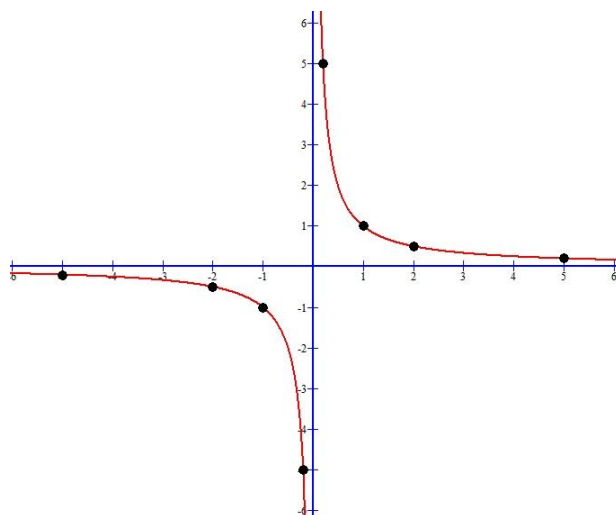
Son de la forma $y = \frac{k}{x}$ donde $k \neq 0$.

Geométricamente representan **hipérbolas**, y para dibujarlas basta con construir una tabla de valores.

Ejemplo:

$$y = \frac{1}{x}$$

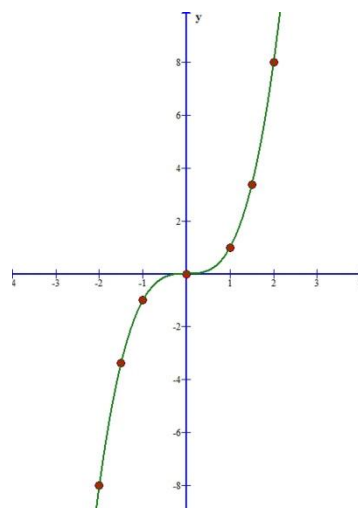
x	y
1	1
2	0,5
5	0,2
0,2	5
-1	-1
-2	-0,5
-5	-0,2
-0,2	-5



Otras funciones

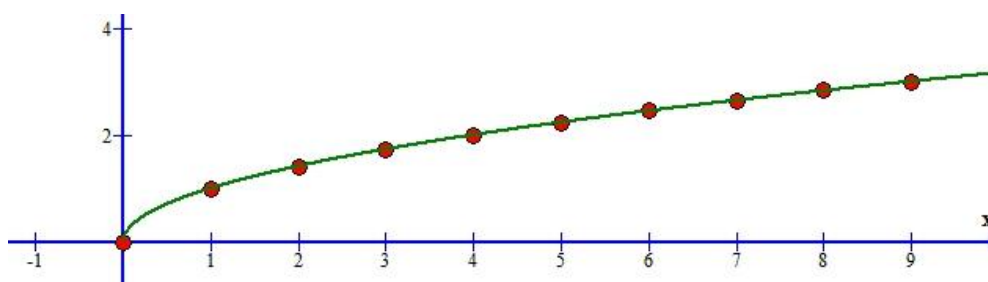
1) Vamos a representar la función $f(x) = x^3$ (función que aparece por ejemplo al ver la relación del lado de un cubo y su volumen). Como todavía no tenemos un procedimiento general para dibujar funciones, construiremos una tabla de valores:

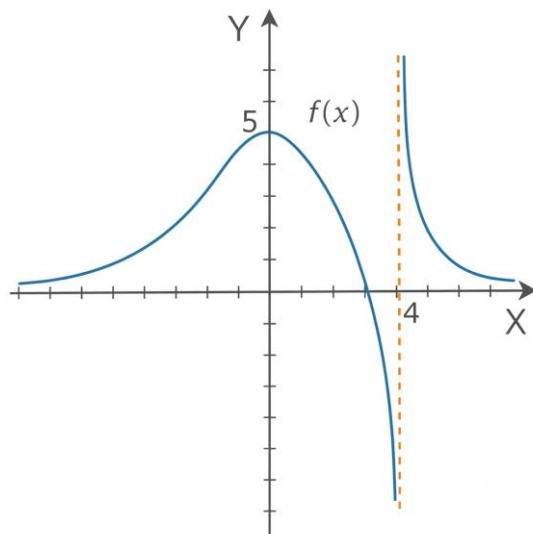
x	y
-2	-8
-1,5	-3,375
-1	-1
0	0
1	1
1,5	3,375
2	8



2) Por último, vamos a representar la función $g(x) = +\sqrt{x}$ (fíjate que solo hemos considerado la raíz cuadrada positiva). Igual que antes, construimos una tabla de valores (recuerda que el dominio de esta función es $[0, +\infty)$).

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$g(x)$	0	1	1,41	1,73	2	2,23	2,45	2,65	2,83	3



CARACTERÍSTICAS DE UNA FUNCIÓN

$\text{Dom}(f) =$

$\text{Img}(f) = \text{Rec}(f) =$

Es creciente en:

Es decreciente en:

Tiene máx. relativo en:

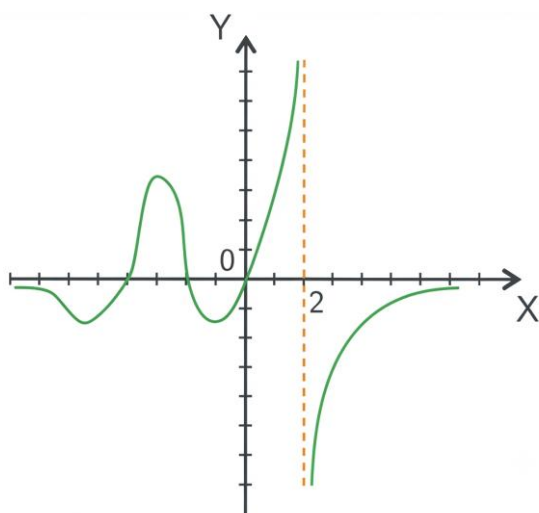
Tiene mín. relativo en:

Corta al eje OX en y al eje OY en

Es continua en:

Simetrías:

Asíntotas:



$\text{Dom}(f) =$

$\text{Img}(f) = \text{Rec}(f) =$

Es creciente en:

Es decreciente en:

Tiene máx. relativo en:

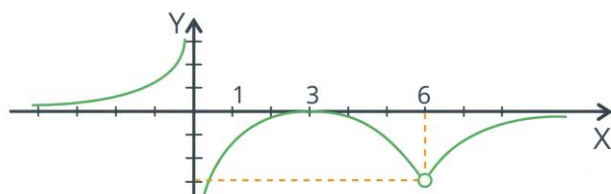
Tiene mín. relativo en:

Corta al eje OX en y al eje OY en

Es continua en:

Simetrías:

Asíntotas:



$\text{Dom}(f) =$

$\text{Img}(f) = \text{Rec}(f) =$

Es creciente en:

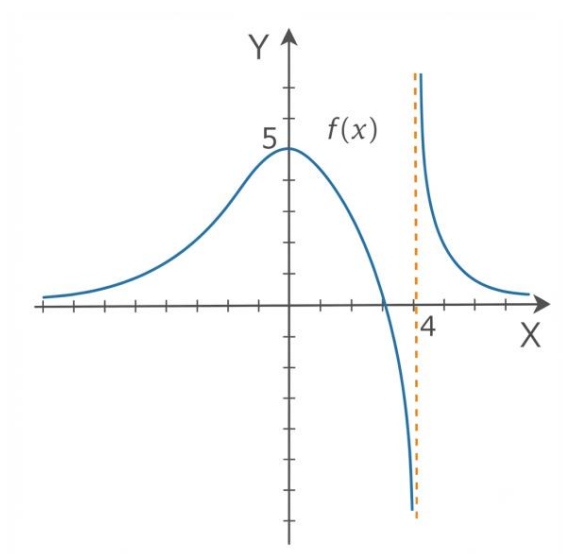
Es decreciente en:

Tiene máx. relativo en:

Tiene mín. relativo en:

Corta al eje OX en y al eje OY en

Es continua en:



Simetrías:

Asíntotas:

 $\text{Dom}(f) =$ $\text{Img}(f) = \text{Rec}(f) =$

Es creciente en:

Es decreciente en:

Tiene máx. relativo en:

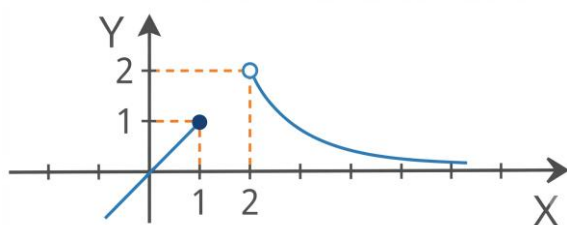
Tiene mín. relativo en:

Corta al eje OX en y al eje OY en

Es continua en:

Simetrías:

Asíntotas:

 $\text{Dom}(f) =$ $\text{Img}(f) = \text{Rec}(f) =$

Es creciente en:

Es decreciente en:

Tiene máx. relativo en:

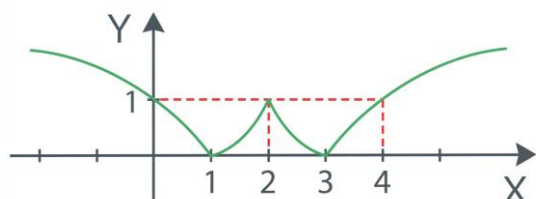
Tiene mín. relativo en:

Corta al eje X en y al eje Y en

Es continua en:

Simetrías:

Asíntotas:

 $\text{Dom}(f) =$ $\text{Img}(f) = \text{Rec}(f) =$

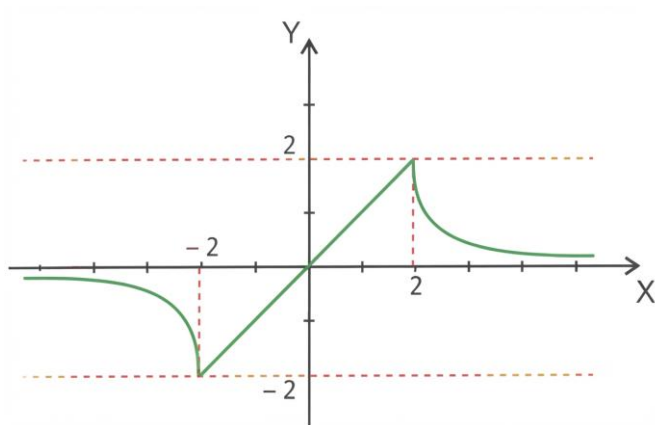
Es creciente en:

Es decreciente en:

Tiene máx. relativo en:

Tiene mín. relativo en:

Corta al eje OX en y al eje OY en



Es continua en:

Simetrías:

Asíntotas:

$\text{Dom}(f) =$

$\text{Img}(f) = \text{Rec}(f) =$

Es creciente en:

Es decreciente en:

Tiene máx. relativo en:

Tiene mín. relativo en:

Corta al eje OX en y al eje OY en

Es continua en:

Simetrías:

Asíntotas: